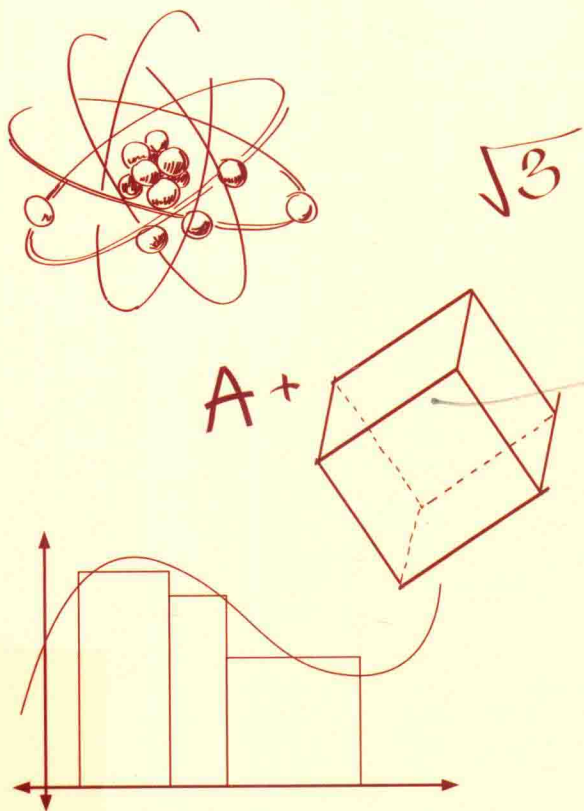


门外汉都可以看懂的教科书式的科普读物

Mathematical Principles
of Natural Philosophy

自然哲学之 数学原理

〔英〕牛頓著
Newton



经典力学划时代的巨著

对物理学、数学、天文学和哲学领域产生了巨大的影响

深远影响人类社会历史走向的扛鼎之作

要是没有牛顿明晰的体系，我们到现在为止所得到的收获将是不可想象的。——爱因斯坦

台海出版社

自然哲学之数学原理

牛 顿 著
卜 可 译



台海出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

自然哲学之数学原理 / (英) 牛顿著 ; 卜可译 . --
北京 : 台海出版社 , 2017.12
ISBN 978-7-5168-1644-8

I . ①自… II . ①牛… ②卜… III . ①牛顿力学
IV . ① O3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 276128 号

自然哲学之数学原理

著 者 : [英] 牛顿

责任编辑 : 高惠娟

责任印制 : 蔡 旭

出版发行 : 台海出版社

地 址 : 北京市东城区景山东街 20 号 邮政编码 : 100009

电 话 : 010 - 64041652 (发行 , 邮购)

传 真 : 010 - 84045799 (总编室)

网 址 : www.taimeng.org.cn/thcbs/default.htm

E - mail : thcbs@126.com

印 刷 : 大厂回族自治县彩虹印刷有限公司

开 本 : 710 毫米 × 1000 毫米 1/16

字 数 : 500 千字

印 张 : 26.5

版 次 : 2018 年 8 月第 1 版

印 次 : 2018 年 8 月第 1 次印刷

书 号 : ISBN 978-7-5168-1644-8

定 价 : 62.00 元

版权所有 侵权必究



原序

古人在自然研究方面，把力学看得很重要，近现代则抛弃了物性形式及潜在属性的理论以后，已开始将自然现象归宿到数学定理。所以本书内，于物理学的范围中尽量将数学演出，看来是有意义的事。

古人用两种方法演述力学，其一是纯理论的，用论证精确推导，其二是实用的。一切技术方面的事均属于后者，力学之名也由此得来。技术家的工作不能十分精确，所以力学与几何学只能被分开，把精确的归类为几何学，较不精确的则归类为力学。不过所遇的差失，不能尽归之技术，而应该归之技术家。但凡工作不精确的工作者，是不完全的力学家；极精确的工作者，方是完全的力学家。

直线与圆之演述，为几何学之基础，但亦属于力学范围。在几何学上，我们不能知道此项线如何作成，只当作已知先假定好而已。初学者在学习几何学之前，必须先学习此项线之精确作法。几何学上所叙者，是如何用此项方法解决问题。至于如何作成直线与圆，这是力学上的问题，非几何问题。几何学上教人应用此项线，故几何学能应用极少的别处来的原则收到许多成就，这真是可称颂的。所以几何学之基础在实用力学方面，而几何学为广大力学的一部分。能建设并证明其方法。

因为技术上的事主要应用在物体运动方面，故一般将几何学与量相关联，而力学则属于运动。在这个意义上，纯理论力学是极精确演述出来而且已证明的科学，其任务是研究如何由某种力发生运动，及产生某种运动所需要的力。古人于五种内力曾经从事于此。古人之视重力（因为不是人手之力）除重量以外没有其他。但我们的研究不在技术而在科学。不在人手之力而在自然之力，故必须主要研究关于重、轻、弹力、流体抵抗力以及其他吸引力之状况：所以我们的研究是自然理论之数学的原理。

物理学上的一切困难源于：由运动的现象以推论自然之力，再由此项力以说明其他现象。关于此，有好些普遍定理，于第一及第二篇中论之。第三编是其应用，将宇宙系统说明了。于此，由天空中所发现的现象，用前二编内数学

上已证明的定理，推论出重力，此力能使物体倾向太阳与行星接近。同此，我们用数学定理由此项力推论行星、彗星、月球、海洋之运动。

或者自然中其他现象，亦可如是由数学原理推论好多理由，使我产生一种推想，以为此项现象均与某项力有关。由此项力，物体之分子，以某种尚未知的原由，互相倾向而成为正则的物体，或亦可相离而飞散。一直到现在，物理学者尚无法用此项力说明自然。我希望本书内所树立的原则能对于此项或其他正确的方法作一先引。

本书之出版，哈雷 (*Edmund Halley*) 君，这位深刻而博学的学者，尽力极多。他不仅负校阅及画图之责，而且他是推动我写这书的人。他要我证明天体轨道之形状，请我将此证明报告给皇家学会，由其要求于是使我想到了编著本书。我开始时先从事于月球运动上之差失，即从事于重力之定律及量以及其他的力，物体按照某种定律被吸引时所作之轨道，若干物体本身间之运动，物体在有抵抗的中介物内之运动，此项中介物之力，密度及运动，以及彗星之轨道，及其相似的研究等等。我曾想，此书的编者必须尚待若干时，乃能将其其他的补充与开始的研究合并发表。关于月球之运动（实在不很完备），我将其总括在 § 107 内，俾别人家不要以为我太将零碎的事多叙了，特别将其提出来，使其余的定理之系统为之混乱。后来发现的零碎事实宁可将其安插在不适当的处所，免得将定理及所引之数目改变。

希望一切能得到人们的细心阅读，在这样的困难材料方面，有缺点之处，其可责备当较之可引起新研究及有趣的补充为多！这是我所寄希望于读者的。

一六八六年五月八日于剑桥

艾萨克·牛顿

说 明

说明 1 物质之量，以其密度及体积联合度之。

倍大空间内倍密之空气，其量加四倍；雪或尘埃同此，可经融化或受压使其加密。一切物体方面亦均如此，可由某种原因以种种方法使其加密。至于可自由透入各部分间空隙之中介物，这里我没有计入。

此项物质之量，以后我将以物体或质量名之，所由以知之者，则为各该物体之重量。至质量与重量之为相比的，此则我曾以很精确的摆锤试验得之，其详见后。

说明 2 运动之量，以速度及物质之量联合度之。

全体之运动，为其各部运动之和。故速度等而物体倍大，则运动量加倍，速度与物体均加倍，则运动量加四倍。

说明 3 物质有抵抗之能力；故每个物体，如其所已然者，保持其静止状况或等速的直线运动。

此项力恒与物体为比例，其与物质惰性之差，只是看法之不同而已。物质之惰性，能使每个物体不易出离其静止的或运动的状态，故此项为物质所固有的力，亦可用“惰性力”这个很确切的名称以称之。因此，物体只在改变其状态时，才显出此项力，而其状态则可由一其他外来与之接触的力影响之，且由不同的观点看来，前者或为抵抗力或为进攻力。如物体为保持其状态与外来的力相抗，则为抵抗的；如物体对于当前的障碍力不易退让，而欲使后者之状态变动，则为进攻的。寻常均以抵抗力属之静的物体，进攻力则属之动的物体；不过如寻常所说的动与静，则其区别只在关系之方式，而寻常所视为静的，实际上不一定是静的物体。

说明 4 外来的力是对于物体所施的推动，使其状态改变，此状态可为静止或等速的直线运动。

此项力只在推动中，及其施出后，并不留于物体中。该物体之保持其新状态，只为惰性力之作用。此附加的力其来源不一，例如由于撞，压，向心力。

说明 5 向心力之影响，使一物体向一为心的任何点被吸引或被推开，或以

任何方式求达到该处。

属此者有重力，能使物体与地球之中心接近；磁力，能将铁向磁极吸引；以及尚有一种力，不问其为何，能使行星恒离开直线运动而以曲线进行。一块在投石器内旋转的石，有离开使其旋转之手之企图；因此，这石使投石器紧张，且其旋转愈速，则紧张愈甚，如将它释放，则即飞去。与该项飞去企图相反的力，能使石恒不离开手而在圆上者，我名之为向心力，因此力以手为圆之中心而向之。在圆上旋转的物体均是如此。此项物体均有离开轨道中心之企图，如无一与此相反的力，使物体受牵制不能出离其轨道，则必循一直线以等速运动脱去；此力我名之为向心力。一抛出之物，倘不受重力之牵制，则不会向地转下，而以直线向天空飞去，且如没有空气之阻力，其运动为等速。只因重力之故，使其离开了直线运动而倾向地球，而其强弱之度，则与其重量及速度有比例。与物质之量相比其重量愈小，抛出时的速度愈大，则其离开直线轨道可能愈少。保持直线的轨道愈久。假如一铅球以一定的速度循一地平的线由山巅上放射出来，在曲线上进行，于二英里外开始落地，则速度加倍或加十倍，所及之远亦约加倍或加十倍，不过须假定空气之抵抗力于此不产生作用。将速度增加，即可任意的增加所及之远并减少所作轨道之曲度，使其于 10、30 或 90 里距离以外才落下，或使其绕地球运动，或向天空脱去以至于无限。所抛之物可使其入一轨道绕地球运行；同样的，月球如有重量，则亦可由重力使其离开直线道路倾向地球入于它的轨道内，否则亦可由一种其他压迫月球的力使其如此。如无此项力，即不能使其守此轨道。倘此力较小，即不足使月球离开其直线道路，反之，如太大，则将超过倾向地球绕之以行之度。故此力必须恰好。数学的任务，是在求出这个力，能使一物体在已知的轨道内以一定的速度继续保持其状态者；反之，一物体自一已知的处所以一定的速度出发为一已知的力所回折时，要求得其曲线的道路，此亦为数学之任务。

向心力之量分为三种：绝对的、加速的以及运动的。

说明 6 向心力之绝对量，即是其较大或较小之分量，视其发生作用的根源为定，而此则由中心点向其四周部分发出。

例如磁力在各个磁石方面不同，视磁石之大小以及其力之强弱而定。

说明 7 向心力之加速量，与其在一定时间内所产生之速度相比。

例如同一磁石之力，距离近则力大，距离远则力小。重力在深谷较大，于高山之巅较小（此则由摆锤试验所证明），而于离地较远之处更小（此于后明之）。在距地相等之处重力均相等，因将以太之抵抗力消去后，重力所给予一切下坠物体（重或轻，大或小者）之加速，其强均相等。

说明 8 向心力之运动量，与其在一定时间内所产生之运动相比。

例如大物体之重量大，小物体之重量小，而于同等的物体方面则近地球时大，在空中远地球时小。此力即是全物体之向心倾向（可说是）它的重量。而由与此相反相等能阻此物体下坠之力乃能知之。

为简单计，此项分作三种研究过的力之量，可名之为绝对的、加速的以及运动的力，并可将其彼此分别与向中心的物体、物体之处所以及力之中心相属。运动的力对于物体，为一整个之向心的企图及倾向，而此心则由各部之倾向合成。加速力对于物体之处所，为发生作用之根源，由中心出发向其四周之各处所发出，推动在其中之物体。绝对的力则对于中心，而此则带有一根源，没有这个，运动力便不会透过四周的空间而发出。此根源可为任何一中心物体（如磁石之在磁力中心，地球之在重力中心）或因某种关系为不可见者。这至少是数学上的概念，而物理上的根源及力之所在我此处不欲论之。

因此，加速力之与运动力犹如速度之与运动。运动之量于速度乘质量之积求之，运动力则于加速力乘质量之积，而加速力在物体之各部中所产生作用之和则为全物体之运动力。所以，在地面之附近，加速力即重力，于一切物体方面均等，重力之运动力或重量即与物体一致。试攀登至重力之加速力减少之处所，则重量亦即相应减少，而恒与重力之加速力乘物体之积相比。例如在加速力减半之处，物体之重量亦减半。又，吸引与推开我用之与加速运动同其意义。所谓吸引，推开或倾向中心这几个名称，我没有分别混杂用之，盖我之研究此项力，纯就其数学的意义而非物理的。所以读者由此项解释中不能推论出来，说我欲说明作用之种类及方式或物理的根源，而如我说及中心点吸引或有中心力时，亦不能说我对于中心点（这是几何的点）附加了真实的物理的力。

附 说

一直到现在，我所欲说明的，是以后所欲用的不习惯名称，其意义是如何。时间，空间，处所及运动是人所共知，我不须解释了。我只需说明，此项量平常是借官觉来感知的，故不免发生某种偏见，而未免此项偏见起见，可适当地将其分为绝对的与相对的，真的与貌似似的，以及数学的与寻常的。

I. 绝对的，真的及数学的时间，是自身在那里流，而因其性质，是等速的且不与外界任何对象有关系。此时间亦可名之为绵延（*Dauer*）。

相对的，貌似似的及平常的时间，是绵延之可感的及外界的度量，可精确或不齐，而寻常则多用此而不用真时间，如年、月、日、钟点。

II. 绝对的空间，因其性质且无关于外物，恒为等的且不动的。

相对的空间为前者之度量或其动的一部分，而由其与其他物体之对待，吾人之感觉乃有以标识之，且寻常即视之为不动的空间。例如地面内之一部分空间；大气之一部；天空之一部，以其与地球相对之位置为定。就类与量而言，绝对的与相对的空间相同，但就数而论则不必恒如此。例如地球运动，则大气之空间，对于地球而言虽不变，但在绝对空间中则屡易其位置，随其所至而为绝对空间之此部分或彼部分。

III. 处所为物体所占的空间之部分，就空间之相关可为绝对的或相对的。

处所为空间之部分，但并非物体之位置或地位，亦非其四围之面。盖等的固体之处所恒相等，但其面则因形状可有不同，故不必相等。物体之地位实在并没有量可言，谓之为处所，不如谓之为处所之关系。全体的运动与其各部运动之和相同，故全体的处所改变，与其各部的处所改变之和相同。故处所在全物体之内。

IV. 绝对运动是物体由一个绝对处所至一个其他的绝对处所之转移，相对运动则为由一相对的处所至其他一相对的处所之转移。

在行驶的舟中，物体之相对的处所即为其于舟中所在之处，亦即是物体所占据的舟中空间之一部而与舟同时进行者。所谓相对的静止，即是物体继续在此舟中同一的地方，所占的舟中之空间部分不变。真的静止，则为物体继续在不动的空间中之同一的部分，舟本身以及舟所占之空隙及其一切内容，亦均在此不动的空间中运动。故如地球为静止的，则对于舟为相对静止的物体，将实在的绝对的与舟以同样的速度运动。但如地球亦为运动的，则该物体之真的绝对的运动，即由各部所构成，其中有舟在地球上之相对运动，地球在不动空间中之真运动，以及物体在舟中之运动等。由舟在地球上之运动及物体在舟中之运动二者，可得物体在地球上之相对运动。

例如舟所在之地球部分向东运动，其速度为 10010，舟则以风力及驶力向西运动，速度为 10，而舟上的舟子则以速度 1 向东行，如是则舟实在的绝对的在不动空间中以速度 10001 向东行，而对于地球则相对的以速度 9 向西行。

在天文学上，绝对时间与相对时间用时间方程来区别。平日里，寻常用之为时间的度量是看作相等的，但实际上并不相等。天文学家于是按照准确的时间以测量天体运动，因而改正此项不相等。用以准确测量时间的等速运动，简直可为没有的事，这是可能的；一切运动可有加速或迟滞；惟绝对时间之流则不能有所改变。一切事物的存在，均有此项相同的绵延及保持，不问其运动为速为迟或为零。又，此项绵延可与其感觉所能知的度量区别，而用天文方程则

可由之推得，此方程于测定现象上之必要，在应用摆锤钟方面，以及木星之卫星有蚀时，均可证明。

与时间段落之次序相似，空间部分之次序亦不变。试将其由其处所运动之，则（可说）将与其自己相离。时间与空间为其自己的及一切事物的处所；在时间中，所对是相继次序，在空间中则为一切事物之位置。空间之真相，在其为处所中；说原来的处所运动了，这是不合理的。所以这些是绝对的处所，而绝对运动则为由一处所至其他一处所之转移。

因此项空间之部分既不能见亦不能借我们感官之力区分之，故我们不取此而取可见的度量。由事物之位置及其与我们所视为不动的物体间之距离，我们说明一切处所。我们估量一切运动亦均对于固定的处所而言，即我们看见物体之离开这些处所。故我们在人事方面，不用绝对的处所及运动而用相对的，这不能说不当；但在自然研究上，则必须由感官抽象出来。真正的静止物体，可用以作为处所及运动之标识者，事实上很可能没有。

绝对的及相对的静止、运动，由其属性、原因及作用区别之。绝对静止之属性在于这里，即，真正静止的物体本身静止着。不过很可能有这样的事情，一任何物体在恒星之附近或在其很远以外绝对的静止着，只因我们附近物体间相互位置之关系，遂不能知道是否其中之一对于该远处的仍保持其原有的位置；如是，真正的静止，由此项物体本身间不能推得。

运动之一属性在于这里，即，对于全体保持其原有位置的部分，参加其全体之运动。旋转的物体之一切部分均有离开其运动的轴之倾向，而运动的物体之撞击，则为其各部分之联结的撞击所造成。故如运动的物体旋转，则对于物体为相对静止的部分亦均运动。因此，绝对的真正的运动不能自离开视为静止的物体之附近中推论得到。外界的物体，我们不能仅视之为静止的，必须真为静止的才可；否则一切包含在内的部分，除非将脱离旋转者之附近的，均将参与后者之真正的运动。如无此项脱离，则亦不能为真的静止，只是视为静止而已。盖旋转的部分之与包含在内的，犹如全体之外部与其内部或如皮壳之与心核。如皮壳运动则心核亦动，不脱离皮壳之附近，为整个之部分亦然。

与上述属性相关者有这样的属性。倘如一处所运动，则在其中的物体亦与之运动。脱离一运动的处所之物体，亦参与其处所之运动。因之，一切由运动的处所出发之运动，只为整个的及绝对的运动之部分。每个整个的运动，是由物体从其第一处所之运动，该处所自其原来处所之运动，等等所构成，而其最后者则为一不动的处所，如前所举舟子之例。所以整个的及绝对的运动只能用不动的处所来说明，故我将其与不动的处所相属而相对的运动则与动的相属。但

不动的处所只有那些永远保持其同一的相互位置者才是，故恒为不动的，并构成一空间，我名之为不动的空间。

真正的与相对的运动之所以不同，其原因在于影响物体使其发生运动的力。真正的运动，只当力影响及物体之本身时，才能发生或改变；但相对的运动之发生或改变，则不必有力影响于物体上，只需有力影响于其他与此物相关的物体上便可。如其他物体后退，则其间之相关亦变，而此则即为相对的静止与运动之内容。反之，倘受力影响，则真正的运动必会改变，但相对的运动则不必改变，盖如此力同时并影响该相关的其他物体，俾其相对的位置仍照原来不变，则由已发生相对运动之关系亦不变。故相对运动变时，真正的运动可不变，而相对运动不变时，真正的运动却可变。故真正的运动不在此类关系中。

绝对运动与相对运动所由以分的根源，是离开运动轴之飞力。在仅仅为相对的旋转运动方面，此项力不存在；但此项力随运动之量而或小或大。

试悬一器皿于一很长的线上，而使其恒在圆上旋转，以至于线成为很紧张。于是盛之以水而使其并水静止。如突然的因力之作用使其作相反的旋转运动，而因线之松释，此运动能保持许久，则水之表面初则为平的，与器皿旋转以前无异，继则力渐渐的影响及于水，器皿使水亦开始旋转。于是可见水渐渐的脱离其中心而由器皿之壁上升而成一中空的样子。（此项试验我自己曾做过）。运动愈强则其升亦愈高，以至于与器皿同速而与之相对静止。此项上升可表明一种倾向，求与运动之轴相脱离，而由此项试验，可认识水之真正的绝对的旋转运动并测量之；在相对的方面与此是不同的。在开始时，水在器皿中之相对运动为最大，但无此项求离开运动轴之倾向，水并不求缘壁上升，而为平的，故真正的旋转运动尚未发生。此后水之相对运动减迟，则其缘壁上升，可表明求离开轴之倾向，且由此倾向可看到水之真正的旋转运动继续增加，以至于水在器皿中相对静止时，此项运动达到最高度。该项倾向，与水对于其四周物体之移动无关，故真正的旋转运动不能用如是的移动以说明之。每个旋转的物体之实在的运动，简单地与该项倾向呼应，为其特殊的切当的作用。相对的运动，随其与外物之复杂关系而为无尽，仅为关系之影迹，故无有若何真正的作用，除非含有该项简单的真正的运动在内，则即不然。

所以照或种见解，我们的太阳系在恒星天内旋转并有行星随之行，行星与天体之各个部分，虽对于在其附近的部分为静止，实则是运动的。他们的相互位置变动（此与真正静止的方面不同），且与天体各部分同时参与该项运动。他们既为旋转的整个系统之部分，故有离开其轴之倾向。

所以相对的量不是名副其实的量之本身，而是其可感知的度（真的或错误

的)，我们恒用此以代度得的量。如欲由应用上以定字之义，则所谓时间、空间、处所及运动，实在所指为可感知的度，倘取其度得的量，则语意即成为异常而为纯粹数学的了。

有的人将此项名词由其原来所用度得的量转译出来，实对于圣经有不合之处，但将真的量与其相对的寻常的度相混淆，此亦模糊了数学与自然理论。

欲认识各个物体之真运动，并严格地与伪的相分开，固为极难之事，盖物体于其中做真运动的不动空间之部分，非可由感官知之。不过此事亦非完全无望，所需要的工具，一部分可由与真运动相别的伪运动得之，一部分则可由与真运动不能相分而为其原因的力得之。例如用一线将距离有一定的两球体相连，而以其公共的重心为中心旋转之，则将见线紧张，球有离开运动轴之倾向，且可由此以计算旋转运动之量。试同时于球之两侧施之以任意的但同量的力，使运动增大或减小，则由线之紧张之增加或减小，可知运动之增加或减小，且由此并可认识力必须由球之何侧施入，乃能使运动增加最甚；即是，须由球之后侧，或于运动中居后之侧施入乃可。但如能认识其后侧以及在前而与之相反之侧，则亦必已知运动之方向了。如是，无限的空间中虽没有可认识的外物在，足与球资比较，但我们用以上之法，即可认出该项运动之量及方向了。倘该空间中有若干距离很远的物体，相互间有一定的位置，如天区内之恒星，则由球在该项物体间之相对运动上，不能辨别其运动者究为此或彼。然如注意于线，观其有无紧张，如球运动时所必有者，则不难由此推知球运动而其他物体为静止的，且可由球在物体间之运动，推论得运动之方向。由此原因，作用及表面的区别以推知真正的运动，以及反之，由真正的或貌似运动以推论原因及作用，此为以下所欲详明者，本书之作其目的亦在于是。

运动的基本定理或定律

第一定律 每个物体如果没有外力影响致其改变状态，那么该物体将仍保持其原来静止的或匀速直线运动的状态。

炮弹如果没有空气阻力的阻碍及重力改变方向，将仍保持其运动不变；陀螺的各部分由于凝聚力的关系，总是偏离直线运动；但陀螺的旋转，如果没有空气阻力（及摩擦）的阻碍，将永远不会停止。不过行星和彗星等大的物体，在阻力较弱的媒介中，能保持较长时间的向前和循环旋转运动。

第二定律 运动的变化与外力的作用相比，且总是沿着外力作用的直线方向。

任何一种力产生一种运动时，倍大的力产生倍大的运动，即双倍的力产生双倍的运动，三倍的力产生三倍的运动，并且不管该力是一次同时施加还是逐次或连续施加的。因为运动物体的运动方向，永远沿着产生此运动的力而运动，所以，如果物体一开始就处于运动状态，那么当方向一致时，从斜向加入运动，便会在它们之间形成一个夹角，随之产生一种新的混合运动，即倾斜方向的运动。

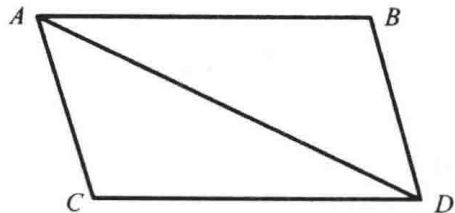
第三定律 作用总是与其反作用相等，也就是说，两个物体之间的相互作用是恒等的，而方向则恰好相反。

每个对象压迫或吸引另一个对象时，施力对象也会受到同样强度的压迫或吸引。比如人用手指压一块石头，则手也同样受到石头的压迫。马去拽一块系在绳上的石头时，马也会受到石头相等的拉力而被往后拽，因为向两端绷紧的绳在放松自身侵向时，其拉力就会像把石头拉向马一样，也会把马拉向石头。同时，阻止马前进的力与拽石头前进的力大小相等。假设一物体撞击另一个物体，使后者的运动发生变化，则前者自身的运动也将因为受到后者的力（因为二者的交互压力相等）而发生变化，其方向则恰好相反。所有这种情况下的物体，这些运动所带来的变化都是相同的，但它们不是速度发生了变化，而是物体运动本身发生的变化相等（假如该物体不受其他的阻碍）。而速度的变化（向相反的方向），是因为运动的变化相等，所以与各该物体成反比。此定律在吸引力方面也适用，以下将有说明。

推论 1 两个力同时作用于同一个物体时，物体将沿着一个平行四边形的对

角线运动。其所用时间等同于两个力分别沿两边运动所用的时间之和。（运动的公理或定律 - 图 1）

假如一个物体只受力 M 的作用，由 A 向 B 运动，只受力 N 时由 A 向 C 运动，则可作平行四边形 $ABDC$ ，如果两力同时作用，则在同时间内该物体便由 A 向 D 运动。因为 N 沿 AC 作用，同时与 BD 平行，所以根据第二定律，此力不能改变

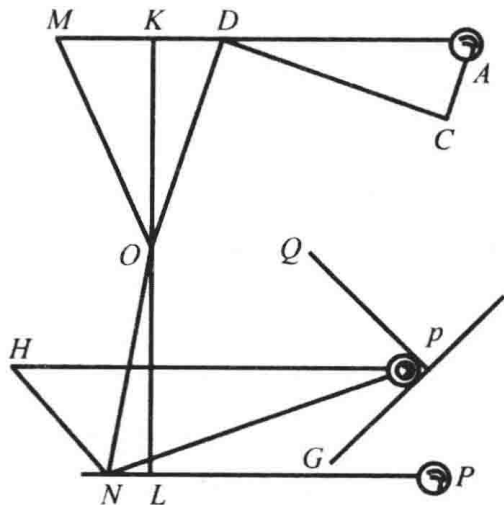


运动的公理或定律 - 图 1

物体沿 BD 运动的力 M 所产生的速度。因此，不管 N 是否在此起作用，物体都将于同时间内达到 BD ，而在最后时刻，物体必然落在 BD 的某一处上。由此可知，在最后时刻，物体也必然落在 CD 的某一处；由此可知该物体定在两条线的交点 D 处。根据第一定律，该物体沿直线由 A 向 D 运动。

推论 2 由此可知，直线力 AD 可由任意两个倾斜力 AB 与 BD 所合成。反之，直线的力 AD 也可分解成为两个任意的倾斜力 AB 与 BD 。此项合成与解析在力学上可完全证实。（运动的公理或定律 - 图 2）

例如由轮的中心 O 作两条半径 OM 和 ON ，并在线 MA ， NP 上悬挂重量 A 与 P ，则可以研究此项重量推动该轮所产生的力。试作一直线 KOL 经过 O ，此直线与 MA ， NP 相交于 K 与 L 处。以 O 为心，取 OK ， OL （此处为 OL ）较长的一条为半径作一个圆，与 MA 线相交于 D 。又作 OD 线，以及与之垂直的 DC ，且 AC 与 OD 平行线上 K ， L ， D 点是否在轮上的平面内没有关系，故将重量悬挂在 K ， L 或 D ， L 上，其作用相同。重量 A 的力用 AD 段表示，并将其分解成为 AC 与 CD 两支力。力 AC 使



运动的公理或定律 - 图 2

半径 DO 直线的离心，故与旋转轮子无关，但 DC 则垂直的推动 DO ，因此它对轮子的作用，与它垂直的作用于与 OD 相等的半径 OL 上的效果一样。

假如

$$P: A = CD: DA,$$

则其作用即与 P 的作用相等。因为

$\triangle ADC \sim \triangle DOK$, 故有 $CD: DA = KO: OD = KO: OL$ 。

从中可知 A 、 P 二者重量的比, 与在同一直线内的 OK 与 OL 的比相反, 其强度则可相等因而成为均势。这就是著名的平衡原理。如果两个重量中有一个较大, 不能与该比例相同, 那么推动轮子的力也将同等量地增大。

假设重量 $p=P$ 一部分悬挂在 Np 线上, 一部分则悬挂在斜面 pG 上, 则可作 pH 与地平线垂直以及 NH 与 pG 垂直, 如果把指向朝下的力 p 暂且用 pH 表示, p 即可分解为 pN 与 HN 两支力。如果有任意平面 pQ 与 pN 线垂直, 并相交于另一平面 pQ , 同时相交线平行于地平线, 假如 p 仅在 pQ 与 pG 两个面上, 则 p 对这两个面的压力分别为 pN 和 HN ; 如果将 pQ 面撤去, 其重量能使线紧张, 则该线即代替了所撤去的面, 而其所受的张力与之前压迫在平面上的力都来自相同的力 pN 。因此, 斜线 pN 的张力与 PN 的张力的比, 可以表示为

$$pN: pH。$$

设 OB 与 PN 垂直, 而

$$p: A = OK: OB,$$

且同时

$$p: A = pH: pN,$$

则二者在旋转轮子上的所产生的作用是一样的, 因而成均势, 这在实验中可以得到论证。

在两个倾斜平面上的重量 p , 相当于楔子在已劈开的物体的内层中间, 因此, 楔子和木槌的力能够得以确定。楔子向 pQ 及 pG 的压力与垂直的推力的比, 可以表示为

$$pN: pH,$$

以及

$$HN: pH。$$

因此, pQ 与 pG 所受的力的比即为

$$pN: HN。$$

螺丝力也可以作力的类似分解, 将其看成利用杠杆来推动的楔子。

这个推论的广泛应用在此便可以得到证实: 著作家用各种方法来叙述的全部力学, 与上述均有关系, 故该定理的真理从各个方面都可以得到证实。由此, 不难推知由轮子、杠杆、动的辘鲈、旋螺钉、紧带等等所构成的机械力, 以及动物运动骨骼的肌肉力, 都是如此。

推论 3 在某一方向的运动的总和减去其相反方向的运动的总和, 所得的运动的量, 不因物体的互相作用而发生改变。

由第三定律可知，作用恒与其反作用大小相等，方向相反，因此由第二定律可知，作用与反作用在运动中所引起的变化大小是相等的，且方向相反。也就是说，运动在同方向内进行，则要从后面的运动中减去加在前一个物体上的运动量，其总量保持不变。如果两个物体相撞，则双方运动量将会同等量地减少，而朝相反方向的两物体运动的差仍保持不变。

假设球体 A 是球体 B 的三倍，前者的速度为 2 等分，后者的速度为 10 等分，且两者都沿相同直线运动，则 A 的运动量与 B 的比，可以表示为

$$2 \cdot 3 : 1 \cdot 10 = 6 : 10,$$

其和为 16。二者相撞时，如果 A 获得 3, 4 或 5 个单位的运动量，则 B 就会失去相同单位的运动量，因而 A 有 9, 10 或 11 个单位的运动量， B 只有 7, 6 或 5 个单位的运动量，但总和则仍为 16。如果 A 获得 9, 10, 11 或 12 个单位的运动量，相撞后仍以相同的方向前进，其运动量则为 15, 16, 17 或 18 个单位的量，则 B 就会失去 A 所获得的相同单位量。这样的话，二者相撞后仍以 1 个单位的运动量向原方向前进，抑或是静止，又或者是以 1 或 2 个单位的运动量向后退，因其全部运动全失，并且多失了 1 或 2 个单位的运动量。因此，两个物体运动的总和为

$$15 + 1, 16 + 0, 17 - 1, \text{ 或 } 18 - 2,$$

其和仍为 16，与相撞前没有差别。

已知物体分开后前进的运动量，就可以求出物体的速度，方法是假定相撞前后的速度与相撞前后的运动量的运动比。举个例子，在上述情形中：

相撞前 A 的运动量为 6

相撞后 A 的运动量为 18，相撞前其速度为 2 相撞后其速度为 x

$$\text{故 } 6 : 18 = 2 : x, \text{ 即 } x = 6.$$

假如物体不是球形，或者在不同直线上运动，如果是在斜面上相互作用，则要求出它们相撞后的运动量，必须先求出在相撞点两物体相切的平面位置。同时，把每个物体的运动分解为两个部分，一部分与平面垂直，另一部分与平面平行。因为两个物体只在与平面相垂直的方向内互相作用，所以后一种情况在两个物体相撞前与相撞后不发生改变，但前一种垂直的运动则是反向的等量变化，而向相同目标的运动之和以及向相反目标的运动之差保持之前的状态不变。

此类情况也可以发生在物体绕中心的循环运动，但在下文内我不想研究此项事实，况且将所有属于此范围内的特殊情形都加以证明，实在是太宽泛了。

推论 4 两个物体或多个物体的共同重心，不会因为物体本身间的相互作用而改变其静止或运动的状态，因而该重心（如果无外来作用或阻碍）不是静止

就是做匀速直线运动。

如果有两个点做匀速直线运动，现在按一定比例分割间距，则此分割点要么处于静止状态，要么做匀速直线运动。在 § 58 以及推论中，将会证明其在同一平面内的运动；用相同的方法，可以推广其在空间中运动的情形。也就是说，如果有任意多的物体做匀速直线运动，则其中任何两个的公共重心要么静止要么做匀速直线运动，因为两个物体的重心连线，以一定比例被其公共重心所分割。同理，这两个物体与第三个物体的公共重心要么静止要么做匀速直线运动，因为这两个物体的公共与第三个物体的重心间距也是以给定的比例进行分割的。这三个物体的公共重心与第四个物体的关系也是同理，等等，甚至可以推广至无穷。

同一系统的物体，既无相互间的作用也无一切外来的作用，因而各个物体均作匀速直线运动，则其公共的重心也是处于静止状态或是作匀速直线运动。

在两个物体所构成的系统中，如果这两个物体间有相互作用，则因两个物体的重心及其公共重心间的距离与物体自身成反比，因此物体无论是靠近重心还是远离重心，其相对运动都能是相等的。而运动的变化是相等且反向的，由于物体间的相互作用，该重心既不会加速也不会减速，且其静止或运动的状态也不发生任何变化。在一个多物体所构成的系统内，如果每两个物体间都有相互作用，则整个系统的公共重心将处于静止或是匀速直线运动状态。因为该项作用不能改变这两个物体的公共重心的状态，而其余的重心则并不受其影响，所以与此无关。这两个特殊重心的距离，被全数物体的公共重心分成两个部分，而这个部分则与物体的总和成反比。因为这两个重心仍保持静止或做匀速直线运动，故所有物体的公共重心也是同理。但在这项系统中，所有物体间的相互作用，要么发生在两物体之间，要么是由多个双物体间的作用合成，因此对其公共重心的静止或运动状态不能发生任何作用。因而该公共重心就相当于物体间无相互作用，要么静止要么做匀速直线运动，物体与物体自身间的作用，除非有外来的力促使其运动状态发生改变。所以在保持静止或运动的状态方面，多物体所组成的系统与单独的物体都适用于同样的定律。不论是单独物体还是多物体所组成的系统，其前进运动必须以其重心的运动来衡量。

推论 5 不论是空间静止还是做匀速直线运动的物体，如果不作循环运行的运动，则该空间内的物体本身间的运动不受影响。

向相同方向的各运动之差以及向相反方向的运动之和，假设开始时在两种状况下相同，而由这些和与差产生碰撞和排斥，以及物体间的相互作用，根据第二定律，在这两种状况下其相遇的作用必然相等，所以一种状况下本身间的