纯粹数学与应用数学专著·典藏版

第24号

微分动力系统的定性理论

廖山涛 著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著　第24号

微分动力系统的
定性理论

廖山涛　著

科学出版社

1992

内 容 简 介

我国著名数学家廖山涛教授曾因微分动力学等领域研究的贡献获首届第三世界科学院数学奖. 本书收集他在 1963—1984 年间在微分动力系统方面有代表性的学术论文八篇, 并按投稿的时间顺序编辑成书.

本书系统介绍“典范方程组”和“阻碍集”两个基本概念的由来, 并详细论述它们的重要性质及其在稳定性问题上的应用.

读者对象为大学数学系和应用数学系的学生、研究生、教师以及有关的科学工作者.

图书在版编目(CIP)数据

纯粹数学与应用数学专著丛书：典藏版/杨乐主编. —北京：科学出版社，2018.1

ISBN 978-7-03-055754-4

Ⅰ. ①纯… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ① 数学 Ⅳ. ① O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 298639 号

责任编辑：吕 虹 赵彦超 / 责任校对：李静科

责任印制：张 伟 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1992 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2018 年 1 月 印 刷 印张: 20 1/2

字数: 397 000

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《纯粹数学与应用数学专著》丛书

前　　言

微分动力系统的现代研究兴起于 20 世纪 60 年代初. 先是 M. Peixoto 于 1959 和 1962 年发表文章, 讨论 2 维的结构稳定常微系统, 重新处理 A. Andronov-L. Pontrjagin 于 1937 年宣布过的成果, 将其扩充至闭曲面上, 并加进新的所谓稠密性的内容, 引人注意. 在前一篇文章的序言中写道 "这方向的一个成熟的研究领域可以期待". 一个自然的问题是, 维数高于 2 的情况下该有何等结论呢? 此后, 世界上一些数学家, 特别是 S. Smale, 或先或后地在这一课题上开展了重要的研究和探索.

作者于 1961 年起正式准备在这方面的工作, 后来相继提出 "典范方程组" 和 "阻碍集" 两个基本概念, 并以此为核心, 形成研究体系, 其中表现出来的方法与国际上为微分动力系统研究的需要而发展起来并被广泛采用的几何和泛函分析方法, 有很大程度的不同. 由于这一缘故, 许多同行曾经催促作者写一本适当介绍 "典范方程组" 和 "阻碍集" 及其应用的书, 并建议: 如果因为某些缘故暂写不成这样的书, 也宜汇集一些最必要的论文, 为读者提供方便. 这就是本书的由来.

本书收集作者如下的文章 (I—VIII, 即本书的第 1 至第 8 章) 和一篇附录:

I. 紧致微分流形上常微分方程系统的某类诸态备经性质. 北京大学学报 (自然科学), **9**(1963), 241–265; (续)309–326.

II. 典范方程组. 数学学报, **17**(1974); 100–109; (续一)175–196; (续完)270–295.

III. 阻碍集与强匀断条件. 数学学报, **19**(1976), 203–209.

IV. 阻碍集 (I). 数学学报, **23**(1980), 411–453.

V. On the stability conjecture, *Chinese Annuals of Math.*, **1**(1980), 9–30.

VI. 阻碍集 (II). 北京大学学报 (自然科学), 2(1981), 1–36.

VII. Standard systems of differential equations and obstruction sets with applications to structural stability problems, Proceedings of the 1983 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations (Chief ed. Liao Shantao). Science Press, Beijing, 1986, 65–97.

VIII. 关于结构稳定的特征性质. 应用数学和力学, **5**(1984), 771–775.

附录.

这些文章的顺序是按以前投稿的时间先后来排列的. 文章 II, VI 和 VI 论述的是它们各自的标题范围内的主体内容. 文章 V 和 VIII 是这些内容在稳定性问题上的应用, VI 的一部分内容也含有这样的应用. 文章 III 是 IV 的摘要叙述, 它为阅读 IV 提供方便. 文章 I 是我们整个体系的工作的源头, 除开被 II 直接引用的内容外,

还含有所考虑的流形上常微系统在切丛上导出的单参变换群的遍历性的讨论; 这种遍历性与典范方程组的线性逼近部分的系数函数性质密切相关. 综合性文章 VII 从宏观上展示我们对微分动力系统这项研究项目的接触方式. 最末的附录是作者临时加写进去的, 对所收集的文章起连贯和补充解释作用. 由于这些文章中有的是许久前的原始性论文, 在今日看来, 虽则在数学思想上或许偶有可取, 但芜杂之处将在所难免, 有待于今后再编写时净化. 为此, 尚请读者见谅.

典范方程组的目的是要把流形上常微系统的相图的一部分性质循适当途径化成欧氏空间中通常的常微分方程组来讨论. 这是通过活动标架来实现的. 这办法有计算和定量估计上的方便. 在典范方程组的基础上, 后来发现了阻碍集, 进而又探讨了所谓正常集. 需要指出的是: 虽然我们曾经证明所考虑的流形本身是正常集当且仅当常微系统满足 Smale 公理 A 及强匀断两个条件, 但阻碍集的内涵比 Smale 条件要多. 这是因为, 若阻碍集不是空集, 则可引出所谓极小歧变集. 可以认为, 分析极小歧变集的构造对于了解常微系统的动力学行为是十分要紧的事情. 为此, 文章 VI 中证明在一重要情况下, 极小歧变集将可由某些小扰动中的常微系统所具有的指数相异的周期轨道来任意地靠近.

微分动力系统是一门有关系统演化规律的数学学科, 着重于整体性和大范围的研究, 主要研究的是当系统有某种扰动时, 有哪些不变性质及其反面, 即突变性质. 这些不变性质包括重要的结构稳定和 Ω- 稳定. 有关这些稳定性的特征性质及稳定性推测是否成立是多年来所关注的问题. 2 维常微系统稳定推测成立, 见于上面提到的 Peixoto 二十多年前的工作. 但现时, 要对高维常微系统在这方面得出完备的答案, 距离尚颇遥远, 虽然对相应的离散系统来说, 这方面已有确切的结论. 众所周知, 在稳定性及一些相关的问题的研究中, 常微系统的结果常可通过所谓扭扩的办法直接导出离散系统的结果. 但反方面, 适用于离散系统的办法不总是容易引申应用到常微系统上. 关于这些, 后面附录中还将谈到. 文章 V, VI 及 VIII 给出有关 3 维或 4 维无奇点常微系统稳定的特征性质定理, 以及高维常微系统稳定推测的部分验证 (参阅文章 VII, 1.8). 这些都是应用阻碍集和极小歧变集的性质得到的. 但这里值得更加注意的或许是这些集合所起的作用.

本书第 5、第 7 两章原为英文发表的论文, 承唐云先生译成中文, 在这里刊出, 谨于此致谢.

廖山涛

1989 年 5 月于北京大学

目　　录

前言
第 1 章　紧致微分流形上常微分方程系统的某类诸态备经性质 …… 1
1.1　某些在标架丛上的单参数变换群 …… 2
1.2　共变微商, 函数 $w_k(\alpha)$ …… 6
1.3　函数 $\log \zeta_{\alpha k}(t)$ …… 10
1.4　格数 $k^*(F)$ …… 14
1.5　关于格数的判定方式 …… 26
1.6　某类函数的比较 …… 35
1.7　格数退化的 3 维常微系统 …… 44
1.8　方阵 $R_\alpha(t)$ 及发散量 $\mathrm{div}S$ …… 49
参考文献 …… 55
第 2 章　典范方程组 …… 56
2.1　典范方程组的回顾 …… 58
2.2　另一类典范方程组 …… 69
2.3　常微方程族 $\mathscr{M}_p$ …… 100
2.4　一个应用 …… 121
参考文献 …… 137
第 3 章　阻碍集与强匀断条件 …… 139
3.1　引言 …… 139
3.2　阻碍集 $Ob(S)$ …… 140
3.3　结果的叙述 …… 141
3.4　槽点集合 …… 145
参考文献 …… 147
第 4 章　阻碍集 (I) …… 148
4.1　槽点集合 …… 150
4.2　阻碍集 $Ob(S)$ …… 161
4.3　奇点 …… 167
4.4　正常集的线性理论 …… 172
4.5　正常集的线性理论 (续) …… 189
参考文献 …… 201

第 5 章　关于稳定性推测 ······ 203
5.1　引言和主要结果的叙述 ······ 203
5.2　常微系统族 $\mathscr{X}^*(M^n)$ ······ 204
5.3　可缩周期轨道 ······ 205
5.4　$S \in \mathscr{X}^*(M^3)$ 情形 ······ 210
5.5　"筛滤" 引理和定理 4.1 的证明 ······ 216
5.6　定理 1.1 和 1.2 的证明 ······ 223
参考文献 ······ 226
第 6 章　阻碍集 (II) ······ 228
6.1　引言 ······ 228
6.2　阻碍集与极小歧变集 ······ 230
6.3　简单极小歧变集 ······ 233
6.4　集合 $M(\bar{\eta}, \bar{T}; p)$ 与 $S \in \mathscr{X}^*$ 的扭拆集 $R(\zeta, p) \cup L(\zeta, p)$ ······ 241
6.5　$S \in \mathscr{X}^*$ 的非简单极小歧变集与定理 1.1 及 1.2 的证明 ······ 253
6.6　关于集合 $R(\zeta, p)$ 及 $L(\zeta, p)$ ······ 269
参考文献 ······ 273
第 7 章　典范微分方程组和阻碍集及对于结构稳定性问题的应用 ······ 275
7.1　常微系统的整体线性化与线性表达式 ······ 275
7.2　典范方程组 ······ 278
7.3　低一维的约化 ······ 280
7.4　应用例子 ······ 283
7.5　常微系统族 $\mathscr{X}^*$ ······ 287
7.6　阻碍集 ······ 288
7.7　简单与非简单极小歧变集 ······ 291
7.8　Ω 稳定性和结构稳定性 ······ 293
参考文献 ······ 296
第 8 章　关于结构稳定的特征性质 ······ 298
8.1　引言 ······ 298
8.2　预备. 阻碍集与极小歧变集 ······ 298
8.3　关键步骤 ······ 300
8.4　应用 ······ 301
参考文献 ······ 302
附录 ······ 304
参考文献 ······ 313
编后记 ······ 315

第1章　紧致微分流形上常微分方程系统的某类诸态备经性质*

设 M^n 为一紧致的 n 维 C^∞ 型 Riemann 流形, $n \geqslant 2$. M^n 上一 C^1 型常微系统是指 M^n 上的一 C^1 型切向量场. 这常微系统导出 M^n 上一单参数 C^1 型可微变换群, 从而导出 M^n 的切空间从上一单参数变换群. 本章的主要目的, 本质上, 是探讨这后一变换群的若干诸态备经性质①.

可是, 本章的动机当初还不是仅仅从这一个 (从文献看来颇似是新的) 方向本身的目的而来的, 我们原想讨论 M^n 上的结构稳定的常微系统. 这一种系统, 它的基本概念在 1937 年为 A. Andronov 及 L. Pontrjagin 就一简单情况下提出, 至最近已开始受到注意. 这种系统的意义以及关于它的最近研究概况可以在 M. Peixoto [2] 一文的序言及若干按语 (以及所附少数参考文献) 中清楚地看出, 我们不打算在这里叙述. 总的说来, 当流形 M^n 的维数 $n \geqslant 3$ 时, 这方面目前已有的成果可算是甚少的.

举一例来说, 当从事结构稳定性的讨论时, 明显地, 我们容易遇到: 是否可以经过微小的 C^1- 扰动使得一 C^1 型常微系统的一个非显然的具有点回归性的轨道消失而成为一周期轨道的问题. 要处理这样的问题, 我们不可能完全不涉及切向量在单参数变换群下的数量变化性质. 这理由说起来是简单的, 正好像当我们讨论一通常的常微分方程组时, 一般需涉及这方程组的系数函数的偏微商一样. 但前面一类型的问题主要是大范围的, 可能有一部分是拓扑的, 也有一部分是统计式的. 本章的目的即在就这统计式的一部分提供若干基础. 它在结构稳定系统的讨论方面的应用等等将出现在以后的章节及文章中.

在本章 1.4 节中, 我们对于 M^n 上一个不包含奇点且对所给单参数变换群来说不变的非空的闭子集 F, 联系了一整数 $k^*(F)$, 叫做 F 的格数. 它的几何意义, 当 $n=3$ 时, 易看出是 M^n 上在一点处某些一对的切向量所决定的两个方向在所给变换群中的变换下的某类渐近性质的估计. 对于一般 $n>3$, 这也可以有类似的解释. 1.3 节及 1.6 节中包含了某些切向量在所给变换群中的变换下长度变化的估计. 这类结果大部分是用函数沿轨道取积分的时间中值的上极限表达出来的. 在 1.7 节中, 我们对于格数退化的 3 维 C^1 常微系统给出较多的讨论. 在这一简短的序言中,

---

* 本章对原文中的定理和公式的序号作了适当的变动.

① "诸态备经性质" 与通常所说的 "遍历性" 为同义词.

欲进一步较确切地叙述这类结果, 即令是扼要的叙述, 将仍会显得过长.

我们工作的主要工具是 Kryloff-Bogoliouboff 诸态备经理论, 这方面的情况见 [1, 第 6 章, 1.9]. 这是一个关于紧致度量空间及其上一单参数变换群所构成的动力体系的一般理论. 本章本质上涉及的是 M^n 上的切空间丛上的一单参数变换群. 这丛空间自然不是紧致的; 这些变换具有性质, 即它们把 M^n 上一些点处的切空间彼此间线性地变换. 可以说, 本章大部分结果的导出也都依赖这一个简单性质.

1.1 某些在标架丛上的单参数变换群

本章中普遍以 M^n 表一紧致的 n 维 C^∞ 型微分流形, 它是可度量的且其维数 $n \geqslant 2$. 任取定 M^n 上一 C^∞ 型 Riemann 度量①. 我们先叙述几个以后常用到的记号. M^n 上任一点处的切向量 u 及 v 的内积将记作 $u \cdot v$, u 的长度记作 $\|u\|$, 即 $\|u\| = (u \cdot u)^{\frac{1}{2}}$(都是对所给的 Riemann 度量而言). 我们将以 $\mathscr{C}$ 表 M^n 的切空间丛, 以 $\sigma : \mathscr{C} \to M^n$ 表它的投射. 设 $1 \leqslant l \leqslant n$. 命 $\mathscr{U}_l$ 为 M^n 的通常的 l- 标架丛, 以 $p_l : \mathscr{U}_l \to M^n$ 为投射. 这丛在 $x \in M^n$ 处的纤维 $p_l^{-1}(x)$ 由 M^n 一切的在 x 处的 l- 标架 (即, 有顺序的且线性无关的切向量组 $(u_1, u_2, \cdots, u_l)$) 所作成. 一 l- 标架 $\alpha = (u_1, u_2, \cdots, u_l) \in \mathscr{U}_l$ 叫做正交的, 如果 $u_i \cdot u_j = 0$ 对一切 $1 \leqslant i < j \leqslant l$. 容易看出, 一切如此的正交 l- 标架构成 $\mathscr{U}_l$ 的一子丛 $\mathscr{F}_l$, 其投射将记作 q_l, 即

$$q_l = p_l | \mathscr{F}_l.$$

关于丛的定义及它的拓扑, 我们参考 [3, §2, 3, 6]. 这里, 丛空间 $\mathscr{C}, \mathscr{U}_l$ 及 $\mathscr{F}_l$ 都是可度量的.

我们将考虑 M^n 上一 C^1 型常微系统 S, 这即是: 对 M^n 在其上每一点 x 处联系了一个切向量 $S(x)$, 对一切 $x \in M^n$ 的这些 $S(x)$ 作成 M^n 上一 C^1 型可微的切向量场 S. 因 M^n 是紧致且可度量的, S 产生 M^n 上一单参数 C^1 型可微变换群 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$. 我们申述一下, 这里所谓变换群是 C^1 型可微的是指由式子 $\phi(x, t) = \phi_t(x)$ 定义的映射 $\phi : M^n \times (-\infty, \infty) \to M^n$ 是一 C^1 型可微的映射. 若以 $e(x, t)$ 表微分流形 $M^n \times (-\infty, \infty)$ 在点 (x, t) 处沿 t 轴正方向的单位切向量, 则 ϕ 的微分 $d\phi$ 将 $e(x, t)$ 映射至 $S(\phi_t(x))$.

对每一 $-\infty < t < \infty$, ϕ_t 是 M^n 上一 C^1 型可微映射, 故 ϕ_t 的微分 $d\phi_t$ 将 M^n 在其上任一点 x 处的切空间线性变换至 M^n 在 $\phi_t(x)$ 处的切空间上. 由是易验证 ϕ_t 自然地给出一拓扑映射

$$\varPhi_t : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$$

① 本章的讨论中, 普遍假定 M^n 上有一给定的 C^∞ 型 Riemann 度量 (即在 M^n 上给定一正定对称的 C^∞ 型可微共变 2 阶张量场, 它定义一 Riemann 度量); 在 1.8 节末我们给出要点, 它实际上可以用来说明本文某些主要结论与 M^n 上的 (C^∞ 型)Riemann 度量的选取无关.

使得对任一 $u \in \mathscr{C}$, $\Phi_t(u) = d\phi_t(u)$. 我们说 $\Phi_t(-\infty < t < \infty)$ 构成 $\mathscr{C}$ 上一单参数变换群. 事实上, Φ_0 是 $\mathscr{C}$ 上的恒同映射. 因 $\phi_s\phi_t = \phi_{s+t}$, 故 $\Phi_s\Phi_t = \Phi_{s+t}$; 因 $\phi : M^n \times (-\infty, \infty) \to M^n$ 是一 C^1 型可微映射, 故由式子 $\Phi(u,t) = \Phi_t(u)$ 确定一 (连续的) 映射 $\Phi : \mathscr{C} \times (-\infty,\infty) \to \mathscr{C}$. 这证明断语. 显然, 映射的交换性

$$\phi_t\sigma = \sigma\Phi_t, \quad -\infty < t < \infty$$

成立.

常微系统 S 在 $\mathscr{C}$ 上的单参数变换群 $\Phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下是不变的, 换言之, 即对任意的 $x \in M^n$ 及 $-\infty < t < \infty$,

$$\Phi_t(S(x)) = S(\phi_t(x)). \tag{1.1}$$

事实上, $\phi_t\phi(x,s) = \phi_t\phi_s(x) = \phi(\phi_t(x), s)$(对一切 $(-\infty < s < \infty)$). 故

$$\begin{aligned} d\phi_t(S(x)) &= d\phi_t(d\phi(e(x,0))) = d(\phi_t\phi)(e(x,0)) \\ &= d\phi(e(\phi_t(x),0)) = S(\phi_0\phi_t(x)) = S(\phi_t(x)). \end{aligned}$$

一般地, 设 $1 \leqslant l \leqslant n$. 我们可类似地验证, 对每一 $-\infty < t < \infty$, 有拓扑映射

$$\Phi_t : \mathscr{U}_l \to \mathscr{U}_l$$

使得对任一 l- 标架, $\alpha = (u_1, u_2, \cdots, u_l) \in \mathscr{U}_l$, $\Phi_t(\alpha) = (d\phi_t(u_1), d\phi_t(u_2), \cdots, d\phi_t(u_l))$, 并且 $\Phi_t(-\infty < t < \infty)$ 构成 $\mathscr{U}_l$ 上一单参数变换群.

为了以下的方便, 对任一 l- 标架 $\alpha = (u_1, u_2, \cdots, u_l) \in \mathscr{U}_l$ 及任一在实数域上的非奇异的 l 阶方阵 $A = (a_{ij})$, 我们将简单地用矩阵记号 $\alpha \cdot A$ 表示 l- 标架

$$\left(\sum_{i=1}^{l} a_{i1}u_i, \sum_{i=1}^{l} a_{i2}u_i, \cdots, \sum_{i=1}^{l} a_{il}u_i\right).$$

既然微分 $d\phi_t$ 将 M^n 在其上任一点 x 处的切空间线性变换至 M^n 在 $\phi_t(x)$ 处的切空间上, 据 Φ_t 的定义, 下面 (1.2) 成立.

设 α 为一 l- 标架 $\in \mathscr{U}_l$, A 为一在实数域上非奇异的 l 阶方阵, 则

$$\Phi_t(\alpha \cdot A) = \Phi_t(\alpha) \cdot A. \tag{1.2}$$

本节余下部分中, 我们将从 $\mathscr{U}_l$ 上的单参数变换群 $\Phi_t(-\infty < t < \infty)$ 出发以一定方式确定正交标架丛 $\mathscr{F}_l$ 上一单参数变换群 $\chi_t(-\infty < t < \infty), 1 \leqslant l \leqslant n$. 对任一 $\alpha \in \mathscr{U}_l$, 命 $\Gamma(\alpha)$ 为具有下述性质 (i) 及 (ii) 的 (在实数域上的)l 阶三角式的方阵, 即

(i) $\Gamma(\alpha)$ 的对角线元素都是 1, 对角线下面的元素都是 0;

(ii) $\alpha\cdot\Gamma(\alpha)$ 是正交的 l- 标架.

这样 $\Gamma(\alpha)$ 的存在易从通常的 Gram-Schmidt 正交化手续得出; 由是 $\Gamma(\alpha)=\alpha$, 若 $\alpha\in\mathscr{U}_1$, 并且若一 $(l+1)$- 标架 $\alpha'=(u_1,u_2,\cdots,u_{l+1})$ 中的 l- 标架已经是正交的, 则有

$$\Gamma(\alpha)=\left(\begin{array}{c:c} & \dfrac{-u_{l+1}\cdot u_1}{\|u_1\|^2} \\ & \dfrac{-u_{l+1}\cdot u_2}{\|u_2\|^2} \\ I_l & \vdots \\ & \dfrac{-u_{l+1}\cdot u_l}{\|u_l\|^2} \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right), \tag{1.3}$$

其中 I_l 表 l 阶单位方阵. 从这些并对 l 取归纳法可看出, $\Gamma(\alpha)$ 由是 $\alpha\cdot\Gamma(\alpha)$ 都是由 α 唯一地确定的. 进一步易验证由式子 $\pi(\alpha)=\alpha\cdot\Gamma(\alpha),\alpha\in\mathscr{U}_l$, 给出一 (连续的) 映射

$$\pi:\mathscr{U}_l\to\mathscr{F}_l,\quad 1\leqslant l\leqslant n.$$

为了将来的方便, 我们于此顺便提述下面的 (1.4).

设 $\alpha=(u_1,u_2,\cdots,u_l)\in\mathscr{U}_l,\alpha'=\alpha\cdot\Gamma(\alpha)=(u_1',u_2',\cdots,u_l')\in\mathscr{F}_l$, 则

$$\|u_k'\|\leqslant\|u_k\|,\quad k=1,2,\cdots,l. \tag{1.4}$$

事实上, 我们用 (1.3) 并对 l 取归纳法直接计算得

$$u_k'\cdot u_k'\leqslant u_k\cdot u_k.$$

设 A 为一在实数域上的 l 阶三角式的方阵. 其对角线元素都是 1, 对角线下面的元素都是 $0(1\leqslant l\leqslant n)$, 则对任一 l- 标架 $\alpha\in\mathscr{U}_l$, 恒有

$$\Gamma(\alpha)=A\Gamma(\alpha\cdot A). \tag{1.5}$$

事实上, $\alpha A\cdot\Gamma(\alpha A)=\alpha\cdot A\Gamma(\alpha A)$. 于是, 据假设, 易见 $A\Gamma(\alpha A)$ 是一个三角式的方阵, 它对 α 而言, 具有前述性质 (i), (ii). 但 $\Gamma(\alpha)$ 由 α 唯一地确定, 如所欲证.

现在, 对任一 $-\infty<t<\infty$, 命

$$\chi_t:\mathscr{F}_l\to\mathscr{F}_l$$

为由 $\chi_t(\alpha)=\pi\varPhi_t(\alpha)$ 定义的映射, 我们说交换性在图表

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}_l \arrow[r, "\chi_t"] & \mathscr{F}_l \\ \mathscr{U}_l \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "\Phi_t"] & \mathscr{U}_l \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

中成立. 事实上, 对任一 $\alpha \in \mathscr{U}_l$,

$$\begin{aligned} \chi_t\pi(\alpha) &= \pi\Phi_t(\pi(\alpha)) = \Phi_t(\pi(\alpha)) \cdot \Gamma(\Phi_t(\pi(\alpha))) \\ &= \Phi_t(\alpha \cdot \Gamma(\alpha)) \cdot \Gamma(\Phi_t(\alpha \cdot \Gamma(\alpha))) \\ &= [\Phi_t(\alpha) \cdot \Gamma(\alpha)] \cdot \Gamma(\Phi_t(\alpha) \cdot \Gamma(\alpha)) & [\text{据}(1.2)] \\ &= \Phi_t(\alpha) \cdot [\Gamma(\alpha)\Gamma(\Phi_t(\alpha) \cdot \Gamma(\alpha))] \\ &= \Phi_t(\alpha) \cdot \Gamma(\Phi_t(\alpha)) = \pi\Phi_t(\alpha). & [\text{据}(1.5)] \end{aligned}$$

我们说 $\chi_t(-\infty < t < \infty)$ 构成 $\mathscr{F}_l$ 上一单参数变换群. 事实上, 当 $t = 0$ 时, $\Phi_0 : \mathscr{U}_l \to \mathscr{U}_l$ 是恒同映射且对于 $\alpha \in \mathscr{F}_l$, $\pi(\alpha) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$ 而 $\Gamma(\alpha) = I_l$, 故 $\chi_0 : \mathscr{F}_l \to \mathscr{F}_l$ 是恒同映射. 其次, 对任一 $\alpha \in \mathscr{F}_l$, 据上面图表的交换性有 $\chi_s(\chi_t(\alpha)) = \chi_s(\pi\Phi_t(\alpha)) = \pi\Phi_s(\Phi_t(\alpha)) = \pi\Phi_{s+t}(\alpha) = \chi_{s+t}(\alpha)$. 再次, 由式子 $\chi(\alpha, t) = \chi_t(\alpha), \alpha \in \mathscr{F}_l$, 定义一 (连续的) 映射 $\chi : \mathscr{F}_l \times (-\infty, \infty) \to \mathscr{F}_l$. 这是因为, $\chi(\alpha, t) = \pi\Phi(\alpha, t)$, 其中 Φ 是由 $\Phi(\beta, t) = \Phi_t(\beta), \beta \in \mathscr{U}$, 定义的映射: $\mathscr{U}_l \times (-\infty, \infty) \to \mathscr{U}_l$. 这证明断语.

这样, 在 $\mathscr{F}_l$ 上就定义了单参数变换群 $\chi_t(-\infty < t < \infty)$.

设 $\alpha = (u_1, u_2, \cdots, u_l)$ 及 $\alpha' = (r_1u_1, r_2u_2, \cdots, r_lu_l)$ 均为正交的 l- 标架 $\in \mathscr{F}_l$, 其中 $r_1, r_2, \cdots, r_l$ 均为 $\neq 0$ 的实数. 设对任给的一 $-\infty < t < \infty, \chi_t(\alpha) = (v_1, v_2, \cdots, v_l)$, 则

$$\chi_t(\alpha') = (r_1v_1, r_2v_2, \cdots, r_lv_l). \tag{1.6}$$

事实上, 设 $\Phi_t(\alpha) = (w_1, w_2, \cdots, w_l) \in \mathscr{U}_l$, 则

$$\Phi_t(\alpha') = (r_1w_1, r_2w_2, \cdots, r_lw_l).$$

若 $\Gamma(\Phi_t(\alpha)) = (a_{ij})$, 直接验算就看出

$$\Gamma(\Phi_t(\alpha')) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{r_2}{r_1}a_{12} & \dfrac{r_3}{r_1}a_{13} & \cdots & \dfrac{r_l}{r_1}a_{1l} \\ 0 & 1 & \dfrac{r_3}{r_2}a_{23} & \cdots & \dfrac{r_l}{r_2}a_{2l} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \dfrac{r_l}{r_3}a_{3l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

而

$$\varPhi_t(\alpha') \cdot \varGamma(\varPhi_t(\alpha')) = (r_1v_1, r_2v_2, \cdots, r_lv_l).$$

(1.6) 证完.

任给 $1 \leqslant l' \leqslant l \leqslant n$. 命

$$\iota : \mathscr{U}_l \to \mathscr{U}_{l'}$$

为由 $\iota(u_1, u_2, \cdots, u_l) = (u_1, u_2, \cdots, u_{l'})$ 给出的映射, 部分映射 $\iota|\mathscr{F}_l$ 也将简记作 ι. 显然, $\iota(\mathscr{U}_l) = \mathscr{U}_{l'}, \iota(\mathscr{F}_l) = \mathscr{F}_{l'}$. 又命

$$\theta : \mathscr{U}_l \to \mathscr{C}$$

为由 $\theta(u_1, u_2, \cdots, u_l) = u_1$ 给出的映射, 部分映射 $\theta|\mathscr{F}_l$ 也将简记作 θ. 交换性在图表

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}_{l'} \arrow[r, "\chi_t"] & \mathscr{F}_{l'} \\ \mathscr{F}_l \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\chi_t"] & \mathscr{F}_l \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M^n \arrow[rrrr, "\phi_t"] & & & & M^n & \\ \mathscr{F}_{l'} \arrow[ur, "q_{l'}"] & & \mathscr{C} \arrow[ul, "\sigma"'] \arrow[rr, "\varPhi_t"] & & \mathscr{C} \arrow[ur, "\sigma"] & & \mathscr{F}_{l'} \arrow[ul, "q_{l'}"'] \\ & \mathscr{F}_l \arrow[ul, "\iota"] \arrow[uu, "q_l"'] \arrow[ur, "\theta"'] \arrow[rrrr, "\chi_t"] & & & & \mathscr{F}_l \arrow[ul, "\theta"] \arrow[uu, "q_l"] \arrow[ur, "\iota"'] & \end{tikzcd} \tag{1.7}$$

中成立. 事实上, 对任一 $\alpha \in \mathscr{U}_l$, 从前述关于 $\varGamma(\alpha)$ 的性质 (i) 及 (ii) 易见 $\varGamma(\alpha)$ 的左上角 l' 阶子方阵恰是 $\varGamma(\iota(\alpha))$. 据这性质及 χ_t 的定义易证 $\iota\chi_t = \chi_t\iota$. 这里第二图表中的方形及三角形中交换性成立是明显的.

1.2　共变微商, 函数 $w_k(\alpha)$

设 λ 为沿系统 S 一积分线 $\tilde{C}$ 的切于 M^n 的向量场, 这意思是说, 一映射 $\lambda : (-\infty, \infty) \to \mathscr{C}$ 使得对一切 $-\infty < t < \infty$, 恒有 $\sigma\lambda(t) = \phi_t(\sigma\lambda(0)) \in \tilde{C}$. 如通常, λ 沿 $\tilde{C}$ 在其上各点处的共变微商 (简记作)$\nabla\lambda(t)$, 假定存在且对 t 连续, 则仍将给出沿 $\tilde{C}$ 切于 M^n 的一向量场 $\nabla\lambda$. 但此处这些名词的用法与一般常见情形也许仍微有不同①, 为了清楚, 我们明确解释这共变微商 $\nabla\lambda(t)$ 的意义如下. 当任取 M^n 在一点 $x' = \phi_{t'}(\sigma\lambda(0)) \in \tilde{C}$ 的一邻域内的一局部坐标系 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 时, S 局部地可表成某一 n 维常微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = S_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.1}$$

于是, $\tilde{C}$ 在 x' 处局部地, 即对于一切 $t \in$ 某一区间 (a, b), 可表成这方程组的一个当 $t = t'$ 时取值 $x'_1, x'_2, \cdots, x'_n$ 的解 $x_i = x_i(t, t'; x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)(i = 1, 2, \cdots, n)$; 而

① 例如, 与通常考虑的情况颇不相同, 沿 $\tilde{C}$ 的切向量 $\lambda(t)$ 对于 M^n 中的点 $\sigma\lambda(t)$ 来说不一定是单值的 (当 $\tilde{C}$ 是奇点或周期解时, 可能有这情况发生); 又即令 $\lambda(t)$ 对于 M^n 中的点 $\sigma\lambda(t)$ 来说是单值的, 也不一定是连续的.

$\lambda(t)$ 可表成 $(\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_n(t))$. 于是, 在任一 $a<t<b$ 处, 共变微商 $\nabla\lambda$ 在这坐标系下的 n 个分量顺次按

$$\frac{d\lambda_i}{dt}+\sum_{j,k=1}^{n}\left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\}\lambda_j\frac{dx_k}{dt}=\frac{d\lambda_i}{dt}+\sum_{j,k=1}^{n}\left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\}\lambda_j S_k \tag{2.2}$$

取值, 其中 $\left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\}$ 是 Christoffel 记号. M^n 的这切向量 $\nabla\lambda(t)$ 与这局部坐标系的取法无干一事实的验证法如常, 可以略去.

若 λ' 亦为一个沿 $\tilde{C}$ 切于 M^n 的向量场使得 $\sigma\lambda'(t)=\sigma\lambda(t)$, 又若 $h(t)$ 为 $(-\infty,\infty)$ 上一连续的实函数, 则可考虑实函数 $(\lambda\cdot\lambda')(t)=\lambda(t)\cdot\lambda'(t)$ 及分别由式子 $(h\lambda)(t)=h(t)\lambda(t),(\lambda+\lambda')(t)=\lambda(t)+\lambda'(t)$ 定义的沿 $\tilde{C}$ 切于 M^n 的向量场 $h\lambda,\lambda+\lambda'$. 于此, 我们提述一下几个有用的公式, 即

$$\nabla(h\lambda)=h\nabla\lambda+\frac{dh}{dt}\lambda,\quad \nabla(\lambda+\lambda')=\nabla\lambda+\nabla\lambda' \tag{2.3}$$

(此处, 假定 $\nabla\lambda'(t)$ 对一切 t 恒存在, h 对一切 t 有微商),

$$\frac{d\|\lambda\|^2}{dt}\left(=\frac{d(\lambda\cdot\lambda)}{dt}\right)=2\lambda\cdot\nabla\lambda, \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\lambda\cdot\lambda'&=\frac{1}{4}(\|\lambda+\lambda'\|^2-\|\lambda-\lambda'\|^2),\\ \frac{d\lambda\cdot\lambda'}{dt}&=\lambda\cdot\nabla\lambda'+\lambda'\cdot\nabla\lambda.\end{aligned} \tag{2.5}$$

以下, 我们讨论两个特别情况.

I) 设 λ 为沿 S 的一积分线切于 M^n 的向量场使得对一切 $-\infty<t<\infty$ 恒有 $\lambda(t)=\Phi_t(\lambda(0))$(这里 $\Phi_t(-\infty<t<\infty)$ 是 $\mathscr{C}$ 上的单参数变换群, 见前节). 这是沿一条过 $\sigma(\lambda(0))\in M^n$ 的积分线的向量场, 它也将记作 λ_u, 其中 $u=\lambda(0)$ (显然, 对一任给的 $u\in\mathscr{C}$, 只有唯一如此的向量场 λ_u 使 $\lambda_u(0)=u$). 取 M^n 在 $x'=\phi_{t'}(\sigma(u))$ 处的一局部坐标系并考虑常微系统 (2.1) 及 $\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_n(t)$ 等如前. 因系统 S 原假定是 C^1 型的, S_i 具有一阶的连续偏微商

$$\frac{\partial S_i}{\partial x_j},\quad i,j=1,2,\cdots,n. \tag{2.6}$$

取 $x_i(=x_i(t,t';x_1',x_2',\cdots,x_n'))$ 对原始值 $x_1',x_2',\cdots,x_n'$ 沿向量 $\lambda'=(\lambda_1'(t),\lambda_2'(t),\cdots,\lambda_n'(t))$ 的微商, 则有

$$\lambda_i(t)=\left.\frac{\partial x_i}{\partial\lambda'}\right|_t.$$

故据周知的事实, $\lambda_i(t)$ 适合方程组

$$\frac{d\lambda_i}{dt}=\frac{\partial S_i}{\partial \lambda'}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial S_i}{\partial x_j}\lambda_j,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{2.7}$$

这结合 (2.2) 给出 $\nabla\lambda(t')$ 或 $\nabla\lambda_u(t')$ 的存在.

对任给的 $u\in\mathscr{C}$ 及 $-\infty<t<\infty$, 记

$$D(u,t)=\nabla\lambda_u(t).$$

我们说

D 是一 (连续的) 映射: $\mathscr{C}\times(-\infty,\infty)\to\mathscr{C}$. (2.8)

事实上, 因 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 及 $\Phi_t(-\infty<t<\infty)$ 分别是 M^n 及 $\mathscr{C}$ 上的单参数变换群且 $\sigma\Phi_t=\phi_t\sigma$ 对一切 $-\infty<t<\infty$ 成立, 这论断易从 (2.2), (2.7) 及偏微商 (2.6) 的连续性推出.

II) 设 $1\leqslant k\leqslant l\leqslant n$. 命

$$\theta_k:\mathscr{U}_l\to\mathscr{C}$$

为由 $\theta_k(u_1,u_2,\cdots,u_l)=u_k$ 给出的自然映射 (当 $k=1$ 时, θ_1 即为 $\theta:\mathscr{U}_l\to\mathscr{C}$, 见前节末). 对任给的一正交 l- 标架 $\alpha=(w_1,w_2,\cdots,w_l)\in\mathscr{F}_l$, 命

$$\lambda_{\alpha k}(t)=\theta_k\chi_t(\alpha),\quad -\infty<t<\infty.$$

若以 $\tilde{C}_\alpha$ 表系统 S 过 $q_l(\alpha)\in M^n$ 的积分线, 则 $\lambda_{\alpha k}$ 是沿 $\tilde{C}_\alpha$ 切于 M^n 的一向量场.

我们说 $\nabla\lambda_{\alpha k}$ 在任一 $-\infty<t<\infty$ 处都存在. 事实上, 由式子 $\lambda_{wk}(t)=\Phi_t(w_k)$ 给出一个前面 (I) 中所考虑的沿 $\tilde{C}_\alpha$ 的向量场 λ_{wk}. 当 $k=1$ 时, 因 $\theta_1\chi_t(\alpha)=\Phi_t(w_1)$, 据 (I) 中所述, 这断语成立. 归纳地, 设对 $i=1,2,\cdots,k$ 这断语已都成立, 其中 $k<l$. 则从

$$\lambda_{\alpha,k+1}=\lambda_{w_{k+1}}-\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{w_{k+1}}\cdot\lambda_{\alpha i}}{\|\lambda_{\alpha i}\|^2}\lambda_{\alpha i} \tag{2.9}$$

(看 χ_t 的定义及 (1.3)) 及 (2.3)—(2.5), 易见这断语对 $k+1$ 亦成立.

对任给的 $\alpha\in\mathscr{F}_l$ 及 $-\infty<t<\infty$, 记

$$E_k(\alpha,t)=\nabla\lambda_{\alpha k}(t),\quad k=1,2,\cdots,l,$$

我们说

$E_k(k=1,2,\cdots,l)$, 都是 (连续的) 映射:

$$\mathscr{F}_l\times(-\infty,\infty)\to\mathscr{C}. \tag{2.10}$$

事实上, 因 $\Phi_t\theta_1 = \theta_1\chi_t : \mathscr{F}_l \to \mathscr{C}$, 故

$$E_1(\alpha, t) = D(\theta_1(\alpha), t),$$

由是据 (2.8)E_1 是连续的, 当 $1 \leqslant k < l$ 时, 用 (2.3)—(2.5) 直接计算式子 (2.9) 中两端的共变微商 $\nabla\lambda_{\alpha,k+1}(t)$ 等, 即得

$$E_{k+1}(\alpha, t) = D(\theta_{k+1}(\alpha), t) - \sum_{i=1}^{k}[a_i E_i(\alpha, t) + b_i\theta_i\chi_t(\alpha)],$$

其中

$$\begin{aligned} a_i =& \frac{\Phi_t\theta_{k+1}(\alpha) \cdot \theta_i\chi_t(\alpha)}{\|\theta_i\chi_t(\alpha)\|^2}, \\ b_i =& \frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda_{w_{k+1}} \cdot \lambda_{\alpha i}}{\|\lambda_{\alpha i}\|^2}\right) \\ =& \frac{\Phi_t\theta_{k+1}(\alpha) \cdot E_i(\alpha, t) + \theta_i\chi_t(\alpha) \cdot D(\theta_{k+1}(\alpha), t)}{\|\theta_i\chi_t(\alpha)\|^2} \\ & - \frac{2[\Phi_t\theta_{k+1}(\alpha) \cdot \theta_i\chi_t(\alpha)][\theta_i\chi_t(\alpha) \cdot E_i(\alpha, t)]}{\|\theta_i\chi_t(\alpha)\|^4}. \end{aligned}$$

这些结合 (2.8) 并对 k 取归纳法易完成 (2.10) 的证明.

对任一 $\alpha \in \mathscr{F}_l$, 我们将考虑 $(-\infty, \infty)$ 上的实函数

$$\zeta_{\alpha k}(t) = \|\theta_k\chi_t(\alpha)\|, \quad k = 1, 2, \cdots, l; -\infty < t < \infty.$$

因 $\chi_t(\alpha)$ 是 l- 标架, 向量 $\theta_k\chi_t(\alpha) \neq 0$, 故

$$\zeta_{\alpha k}(t) \ \text{恒} > 0.$$

又因 $\chi_t(-\infty < t < \infty)$ 是 $\mathscr{F}_l$ 上的单参数变换群, 这些显然都是 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数.

函数 $\zeta_{\alpha k}(t)$ 都是对 t 连续可微的. 事实上, 据 (2.4) 等, 有

$$\left.\frac{d\zeta_{\alpha k}}{dt}\right|_t = \frac{\lambda_{\alpha k}(t) \cdot \nabla\lambda_{\alpha k}(t)}{\sqrt{\lambda_{\alpha k}(t) \cdot \lambda_{\alpha k}(t)}} = \frac{\theta_k\chi_t(\alpha) \cdot E_k(\alpha, t)}{\|\theta_k\chi_t(\alpha)\|}, \tag{2.11}$$

据 (2.10) 等, 这是对 t 的连续函数.

我们将考虑 $\mathscr{F}_l$ 上的函数

$$w_k(\alpha) = \left.\frac{d\zeta_{\alpha k}}{dt}\right|_0, \quad k = 1, 2, \cdots, l.$$

命题 2.1 $w_k(\alpha)(k = 1, 2, \cdots, l)$ 都是 $\mathscr{F}_l$ 上的连续函数且具有下述性质 (i°) 及 (ii°), 即