高等学校"十三五"规划
重点立项教材

泛函分析引论

Introduction to Functional Analysis

杨有龙　编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校“十三五”规划重点立项教材

泛函分析引论

Introduction to Functional Analysis

杨有龙　编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书主要内容可分为三部分：第一部分为空间理论的建立，包含第一章“度量空间”和第二章“线性赋范空间与内积空间”；第二部分为两个空间之间线性映射的研究，包含第三章“线性算子”和第四章“线性算子的谱分析”；第三部分为应用举例，即第五章“泛函分析应用选讲”. 第二部分以第一部分为基础，第三部分的内容可选择讲解或者供学生自学，也可适当插入到前面的相关内容中阅读学习.

本书可作为数学与统计等专业高年级本科生的教材，也可作为理工科低年级研究生的教材，同时还可作为工程技术人员、高年级研究生和相关任课教师的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析引论/杨有龙编著. —西安：西安电子科技大学出版社，2018.8
ISBN 978-7-5606-4949-8

Ⅰ. ① 泛…　Ⅱ. ① 杨…　Ⅲ. ① 泛函分析—研究
Ⅳ. ① O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 126608 号

策划编辑　刘小莉
责任编辑　张倩
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　北京虎彩文化传播有限公司
版　　次　2018 年 8 月第 1 版　2018 年 8 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印张 11.75
字　　数　274 千字
印　　数　1～1000 册
定　　价　30.00 元
ISBN 978-7-5606-4949-8/O

XDUP　5251001-1

* * * 如有印装问题可调换 * * *

作者简介

杨有龙教授现为西安电子科技大学数学与统计学院教授、博士生导师，中国数学会理事、陕西省数学会常务理事. 1990 年在陕西师范大学数学系获理学学士学位，1993 年在陕西师范大学数学系获理学硕士学位，2003 年在西北工业大学获博士学位，2006 年在西安电子科技大学博士后流动站出站，2007 年作为访问学者在美国罗切斯特大学(University of Rochester)访学一年. 现主要从事图形模型与数据分析等理论与应用研究工作，发表科研论文 50 余篇，2005 年获陕西高等学校科学技术奖一等奖，2006 年获陕西省科学技术二等奖，2008 年获陕西高等学校科学技术奖二等奖. 已结题完成国家自然科学基金和陕西省自然科学基金各一项，现主持一项国家自然科学基金. 杨有龙教授 2014 年获国家教学成果二等奖，2016 年主持的“高等数学”获国家精品资源共享课称号、主持的“数学建模”获陕西省精品资源共享课称号；开设了本科生课程“泛函分析”、“高等数学”，研究生课程“应用泛函分析”、“概率图模型及应用”以及“现代数据分析”等，授课力求深入浅出、循序渐进、形象生动，强调数学思维的教育和培养.

前言

QIANYAN

随着社会对创新人才的大量需求以及信息技术的广泛应用，数学教育在大学教育中的作用显得尤为重要，它不仅是学习专业课程的工具以及从事高水平科学研究的必备基础，更重要的是它能培养和训练学生逻辑推理的理性思维，这种数学理性思维方法的培养对学生创新能力的提高、分析能力的加强、创新意识的启迪都至关重要. 如果对一个非空集合赋予适当的结构，使之能引入微积分中的极限和连续的概念，这样的结构就称为拓扑，具有拓扑结构的空间称为拓扑空间. 泛函分析就是研究拓扑空间到拓扑空间之间满足各种拓扑和代数条件的映射的学科.

泛函分析综合运用分析、几何和代数的观点与方法研究无穷维向量空间上的算子和极限理论，在二十世纪四五十年代就已经成为一门理论完备、内容丰富的数学分支. 泛函分析也强有力地推动着其他学科的发展，例如它在微分方程、概率论、函数论、连续介质力学、量子物理、计算数学、控制论、最优化理论等学科中都有重要的应用. 泛函分析的观点和方法已经渗入到不少工程技术性的学科之中，并起着重要的作用. "泛函分析"是一门重要的数学基础课,更是进一步从事高水平科学研究所必需的知识储备.

本书第一章和第二章顺序建立了三个空间的概念讨论了相关的知识，这三个空间即度量空间、线性赋范空间与内积空间. 第三章为线性算子，涉及线性算子的主要结论和重要定理. 第四章为线性算子的谱分析，涉及伴随算子、正规算子、酉算子、投影算子以及紧算子、自伴算子的性质与谱分析. 第五章为泛函分析应用选讲，涉及 Banach 不动点定理、Hahn-Banach 延拓定理的应用、凸集分离定理以及最佳逼近定理等内容.

本书几经修改整理，既有本人多年来为本科生、研究生讲解"泛函分析"课程的经验总结与提升，也有对国内外大量的同类讲义、教材和论文的参考与学习. 在本书的编写过程中，得到了西安电子科技大学数学与统计学院领导和相关授课教师的热情支持，他们对本书的编写提出了许多宝贵的建议和修改意见。本书也吸纳了作者授课班级的学生提出的建议和修改意见. 本书的出版得到了西安电子科技大学出版社社领导及责任编辑张倩、策划编辑刘小莉等同志的大力支持，作者在此一并表示感谢. 由于水平学

识有限，书中难免存在不妥之处，恳请读者批评指正．作者的工作邮箱：ylyang@mail.xidian.edu.cn；个人主页：http://web.xidian.edu.cn/ylyang/；QQ号码：502786866.

本书的出版得到西安电子科技大学本科和研究生教材立项资助.

杨有龙

2018年2月

目录

MULU

第一章 度量空间

度量空间也称为“距离空间”. 提到“距离”，人们常常说：最大的距离是没有网络；距离产生美；两点之间直线距离最短. 在实数集$\mathbb{R}$中，我们使用$|x_n - x|$来表示点x_n和点x之间的距离，那么究竟什么是“距离”呢？或者说“距离”的本质是什么？

事实上，微积分研究的对象是“函数”，它的起点是“连续函数”. “连续函数”的概念始于“极限”理论，“极限”理论立足于“距离”，可见如何刻画“距离”尤为重要. 本章通过在非空集合中引入“距离”，定义两个元素之间的“远”和“近”，给出度量空间的基本拓扑属性，进而研讨度量空间的可分性、完备性以及紧性.

1.1 度量空间的定义与举例

定义 1.1.1 度量空间(Metric Spaces)

设X为一非空集合. 若存在二元映射$d: X\times X\to\mathbb{R}$，使得$\forall x, y, z\in X$，满足以下三个条件：

(1) **非负性(Positivity)**：$d(x, y)\geqslant 0$，且$d(x, y)=0$当且仅当$x=y$；

(2) **对称性(Symmetry)**：$d(x, y)=d(y, x)$；

(3) **三角不等式(Triangle Inequality)**：$d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(z, y)$，

则称d为X上的一个**距离函数**，称(X, d)为**距离空间**或**度量空间**，称$d(x, y)$为x和y两点间的**距离**. □

在不产生误解时，(X, d)可简记为X. 下面我们来看一些具体的例子.

例 1.1.1 (欧氏空间$\mathbb{R}^n$) 设$\mathbb{R}^n=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i\in\mathbb{R}, 1\leqslant i\leqslant n\}$，定义

$$d(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

其中$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\mathbb{R}^n$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)\in\mathbb{R}^n$. 试验证$d$是一个距离函数.

在证明之前，先引入两个重要的不等式.

引理 1.1.1 (许瓦兹(Schwarz)不等式) 任给$2n$个实数$a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明 任取实数λ，则由

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}(a_i+\lambda b_i)^2=\lambda^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2\lambda\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

知右端二次三项式的判别式不大于零，即

$$\Delta=\left(2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2-4\sum_{i=1}^{n}b_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^2\leqslant 0.$$

于是，可得 Schwarz 不等式成立. □

进一步有 Hölder 不等式

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中 p，$q>1$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，称这样的两个实数 p，q 为一对共轭数.

引理 1.1.2 (**闵可夫斯基(Minkowski)**不等式)任给 $2n$ 个实数 a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_n，有

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明 由 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,\end{aligned}$$

这就证明了 Minkowski 不等式成立. □

进一步可有 Minkowski 不等式的一般形式，其中 $k\geqslant 1$，

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^k\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^k\right)^{\frac{1}{k}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^k\right)^{\frac{1}{k}}.$$

闵可夫斯基(Minkowski)不等式的积分形式：设 $f(x)$、$g(x)$是可测集 E 上的可测函数，且 $k\geqslant 1$，则

$$\left(\int_E |f(x)+g(x)|^k \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \left(\int_E |f(x)|^k \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{k}} + \left(\int_E |g(x)|^k \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{k}}.$$

例 1.1.1 的证明 度量的非负性和对称性显然成立，下面仅验证三角不等式也成立. 对于任意的 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)\in\mathbb{R}^n$，由闵可夫斯基不等式有

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i-z_i+z_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^{n} (z_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

即 $d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(z, y)$，从而得证 d 是一个距离函数. □

通常称例 1.1.1 中的 d 为欧氏距离或标准欧氏距离，称$(\mathbb{R}^n, d)$为 n 维欧氏空间. 今后若不作特殊申明，凡提到度量空间 $\mathbb{R}^n$ 时，距离均指标准欧氏距离 d. 在 $\mathbb{R}^n$ 中还可以定义其他的距离，例如对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意元素 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$定义

$$d_1(x, y)=\max|x_k-y_k|;\ d_2(x, y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|.$$

可以验证距离 d_1、d_2 均满足定义 1.1.1 条件(1)、(2)和(3). 在 $\mathbb{R}^2$ 中上述三种距离 d，d_1 和 d_2 如图 1.1.1 所示，d 表示平面上两点的直线距离；d_1 表示距离 d 在 X 轴、Y 轴上投影距离的最大者；d_2 表示距离 d 在 X 轴与 Y 轴上投影距离之和.

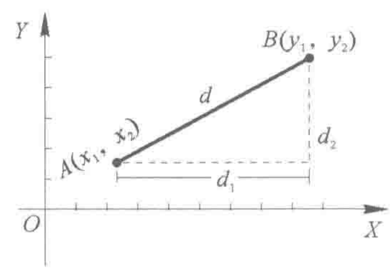

图 1.1.1 二维欧式空间上的三种度量比较

由此知道，在一个非空集合 X 上，定义距离的方法可以不止一种．但必须注意，由于定义的距离不同，即使基本集合 X 相同，也应视其为不同的度量空间．下面的例子说明任何一个非空集合上均可定义距离，使其成为度量空间．

例 1.1.2 （离散度量空间）设 X 为非空集合，$\forall x, y\in X$，定义距离

$$d_0(x, y)=\begin{cases}0, & x=y, \\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

验证(X, d_0)为度量空间．

证明 容易验证，d_0 满足距离的三个条件，故(X, d_0)为度量空间．我们称 d_0 为离散距离，(X, d_0)为**离散度量空间**．□

例 1.1.3 （连续函数空间 $C[a, b]$）设 $C[a, b]=\{f:[a, b]\to\mathbb{R} \mid f \text{ 连续}\}$，$\forall f, g\in C[a, b]$，定义

$$d(f, g)=\max_{t\in[a, b]}|f(t)-g(t)|,$$

验证$(C[a, b], d)$为度量空间．

证明 显然 d 满足度量空间的非负性和对称性，下面验证定义 1.1.1 中的条件(3)也成立．

由于 $\forall f(t), g(t), h(t)\in C[a, b]$及 $\forall t\in[a, b]$均有

$$\begin{aligned}d(f, g)&=\max_{t\in[a, b]}|f(t)-g(t)|\leqslant\max_{t\in[a, b]}\{|f(t)-h(t)|+|h(t)-g(t)|\}\\&\leqslant\max_{t\in[a, b]}|f(t)-h(t)|+\max_{t\in[a, b]}|h(t)-g(t)|\\&=d(f, h)+d(h, g),\end{aligned}$$

即 $d(f, g)\leqslant d(f, h)+d(h, g)$，故$(C[a, b], d)$为一度量空间．我们称$(C[a, b], d)$为**连续函数空间**，简记为 $C[a, b]$．□

在 $C[a, b]$中，我们还可以定义如下的距离：

$$d_1(f, g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

可以验证 d_1 均满足定义 1.1.1 中的条件(1)、(2)和(3)，所以$(C[a, b], d_1)$也为一度量空间．

例 1.1.4 （有界数列空间 l^∞）记 $l^\infty=\{x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)=(x_i) \mid \sup\limits_{i\geqslant1}\{|x_i|\}<\infty\}$．对于 $x=(x_i)$，$y=(y_i)\in l^\infty$，定义

$$d(x, y)=\sup_{i\geqslant1}|x_i-y_i|,$$

验证(l^∞, d)为一度量空间．

证明 容易验证 d 是一个距离函数，(l^∞, d)为一度量空间．我们称(l^∞, d)为**有界数列空间**，简记为 l^∞．□

例 1.1.5 （p 次幂可和的数列空间 l^p）记 $l^p=\{x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)=(x_i) \mid \sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty\}$，其中 $1\leqslant p<+\infty$．对于 $\forall x=(x_i)$，$y=(y_i)\in l^p$，定义

$$d_p(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

验证(l^p, d_p)为一度量空间．

证明 由闵可夫斯基不等式的和式形式及 l^p 的定义知其右端有界，即距离 $d_p(x, y)$ 是有意义的. 容易证明 d_p 是一个距离函数，(l^p, d_p) 为一度量空间. 我们称 (l^p, d_p) 为 p **次幂可和的数列空间**，简记为 l^p. □

例 1.1.6 (p 次幂可积的函数空间 $L^p[a, b]$) 记 $L^p[a, b] = \left\{f(t) \mid \int_{[a, b]} |f(t)|^p \mathrm{d}t < +\infty\right\}$，其中 $1 \leqslant p < +\infty$，$\int_{[a, b]} |f(t)|^p \mathrm{d}t$ 表示 $|f(t)|^p$ 在 $[a, b]$ 上的勒贝格积分，即 L 积分. $L^p[a, b]$ 中，几乎处处相等的函数视为同一函数. 对于 $f, g \in L^p[a, b]$，定义距离

$$d(f, g) = \left(\int_{[a, b]} |f(t) - g(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},$$

验证 $(L^p[a, b], d)$ 为度量空间.

证明 由于 $L^p[a, b]$ 对线性运算是封闭的，即若 $f, g \in L^p[a, b]$，α 是一常数，则

$$\alpha f \in L^p[a, b], \ f + g \in L^p[a, b],$$

所以 $L^p[a, b]$ 是线性空间.

由闵可夫斯基不等式的积分形式知

$$d(f, g) = \left(\int_{[a, b]} |f(t) - g(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_{[a, b]} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{[a, b]} |g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant +\infty,$$

所以定义 $d(f, g)$ 有意义. 显然，$(L^p[a, b], d)$ 作为度量空间的非负性和对称性成立，下面验证三角不等式也成立. 对于任意的 $f(x), g(x), h(x) \in L^p[a, b]$，有

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \left(\int_{[a, b]} |f(t) - g(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{[a, b]} |f(t) - h(x) + h(x) - g(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \left(\int_{[a, b]} |f(x) - h(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{[a, b]} |h(x) - g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = d(f, z) + d(z, g). \end{aligned}$$

故 $(L^p[a, b], d)$ 为度量空间. 我们称 $(L^p[a, b], d)$ 为 p 次幂可积的函数空间，简记为 $L^p[a, b]$. □

上述例子涉及常用的六个度量空间，分别为 n 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^n, d)$、离散度量空间 (X, d_0)、连续函数空间 $C[a, b]$、有界数列空间 l^∞、p 次幂可和的数列空间 l^p 以及 p 次幂可积的函数空间 $(L^p[a, b], d)$.

1.2 度量空间的拓扑性质

定义 1.2.1 邻域(Neighborhood)

设 (X, d) 是度量空间，$x_0 \in X$，$\delta > 0$，称集合 $O(x_0, \delta) = \{x \mid d(x, x_0) < \delta, x \in X\}$ 为以 x_0 为中心、δ 为半径的**开球**，也称 $O(x_0, \delta)$ 为 x_0 的一个 δ **邻域**，如果不特别强调半径，用 $O(x_0)$ 表示 x_0 的**邻域**；称 $\overline{O}(x_0, \delta) = \{x \mid d(x, x_0) \leqslant \delta, x \in X\}$ 为以 x_0 为中心、δ 为半径的**闭球**. □

定义 1.2.2 内点、开集与闭集(Interior Point, Open Set, Closed Set)

设 (X, d) 是一度量空间，$x_0 \in G \subset X$，若存在 x_0 的 δ 邻域 $O(x_0, \delta) \subset G$，则称点 x_0 为 G 的**内点**，称 G 的全体内点所构成的集合为 G 的内部，表示为 $\mathrm{int}G$. 如果 G 中的每个点均是它的内点，即 $\mathrm{int}G = G$，则称 G 为**开集**，并规定空集 ϕ 为开集. 对于 $F \subset X$，若 F 的补集

$F^C = X \setminus F$ 是开集，则称 F 为**闭集**. □

实数域中的任何开球是开集，闭球是闭集，那么对于度量空间其结论如何？下面的例子说明开球依然是开集，闭球依然是闭集，其证明思路如图 1.2.1 与图 1.2.2 所示.

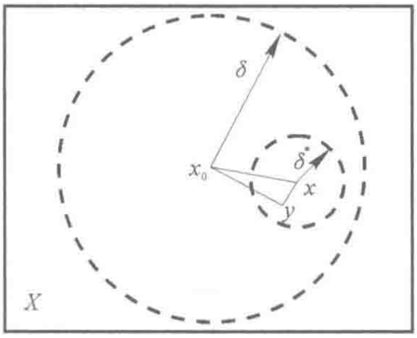

图 1.2.1　例 1.2.1 证明思路示意图

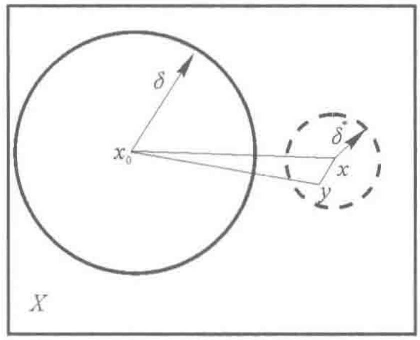

图 1.2.2　例 1.2.2 证明思路示意图

例 1.2.1　度量空间(X, d)的开球 $O(x_0, \delta)$是开集.

证明　$\forall x \in O(x_0, \delta)$，显然 $d(x, x_0) < \delta$，取 $\delta^* = \dfrac{1}{2}(\delta - d(x, x_0))$，即 $2\delta^* + d(x, x_0) = \delta$，则对任何 $y \in O(x, \delta^*)$，都有 $d(x, y) < \delta^*$，从而

$$d(y, x_0) \leqslant d(y, x) + d(x, x_0) < \delta^* + d(x, x_0) < \delta,$$

即 $O(x, \delta^*) \subset O(x_0, \delta)$，所以 $O(x_0, \delta)$是开集. □

例 1.2.2　度量空间(X, d)的闭球 $\overline{O}(x_0, \delta)$是闭集.

证明　$\forall x \in (\overline{O}(x_0, \delta))^C$，显然 $d(x, x_0) > \delta$，取 $\delta^* = \dfrac{1}{2}(d(x, x_0) - \delta)$，即 $2\delta^* + \delta = d(x, x_0)$，则 $\forall y \in O(x, \delta^*)$，有

$$d(y, x_0) \geqslant d(x, x_0) - d(y, x) = 2\delta^* + \delta - d(y, x) > \delta.$$

可见，$y \in (\overline{O}(x_0, \delta))^C$，即 $O(x, \delta^*) \subset (\overline{O}(x_0, \delta))^C$，从而$(\overline{O}(x_0, \delta))^C$ 为开集，故 $\overline{O}(x_0, \delta)$ 为闭集. □

例 1.2.3　设(X, d_0)是离散度量空间，A 是 X 的任意非空子集，证明 A 既是开集又是闭集.

证明　$\forall x_0 \in A$，取 $\delta = \dfrac{1}{2}$，则

$$O\left(x_0, \frac{1}{2}\right) = \left\{x \,\middle|\, d_0(x, x_0) < \frac{1}{2}, x \in X\right\} = \{x_0\} \subset A,$$

故 x_0 是 A 的内点，从而 A 是开集. 由于 $X - A$ 是 X 的子集，故它是开集，从而 A 是闭集. □

下面是一些与实数域相类似的开集、闭集的性质，仿照相应的证明可证得.

定理 1.2.1　**(开集的性质)**度量空间 X 中的开集具有以下性质：

(1) 空集 ϕ 和全空间 X 都是开集.

(2) 任意多个开集的并集是开集.

(3) 有限个开集的交集是开集. □

定理 1.2.2　**(闭集的性质)**度量空间 X 中的闭集具有以下性质：

(1) 空集 ϕ 和全空间 X 都是闭集.

(2) 任意多个闭集的交集是闭集.

(3) 有限个闭集的并集是闭集. □

定义 1.2.3　聚点与闭包(Accumulation Point and Closure)

设(X, d)是一度量空间，$A\subset X$，$x_0\in X$，如果在x_0的任意δ邻域$O(x_0, \delta)$内含有A中异于x_0的点，则称x_0是A的一个**聚点**或极限点. A的全体聚点所构成的集合称为A的**导集**，记为A'. $A\cup A'$称为A的**闭包**，记为$\overline{A}$或者$\mathrm{cl}A$. □

由聚点的定义知，x_0可以在A中，也可以不在A中. x_0是A的一个聚点的一个等价定义是：x_0的任意一个去心δ邻域与A的交非空.

定理 1.2.3　设(X, d)是度量空间，$x_0\in X$，$A\subset X$，那么下面的命题成立：

(1) $x_0\in A'$当且仅当存在$\{x_n\}\subset A$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

(2) $\overline{A}$是闭集.

(3) A是闭集当且仅当$A=\overline{A}$.

(4) 若存在闭集$F\subset X$，使得$A\subset F$，则$A\subset\overline{A}\subset F$.

证明　(1) 一方面，依据聚点的定义知，在x_0的任意$\delta=\dfrac{1}{n}$邻域$O(x_0, \delta)$内含有A中异于x_0的点x_n，显然$\{x_n\}\subset A$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 另一方面，若存在$\{x_n\}\subset A$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则依据极限和聚点的定义知$x_0\in A'$.

(2) 若$x_0\in\overline{A}^C$，则x_0一定是其内点，否则应存在x_0的任意$\delta_n=\dfrac{1}{n}$邻域$O(x_0, \delta_n)$与$\overline{A}$交非空，即存在$x_n\in O(x_0, \delta_n)\cap\overline{A}$，其中$n=1, 2, \cdots$. 可见，$x_n$是开集$O(x_0, \delta_n)$的内点，即存在$O(x_n, \delta_n^*)\subset O(x_0, \delta_n)$，所以$O(x_n, \delta_n^*)\cap\overline{A}\subset O(x_0, \delta_n)$. 又由于$x_n\in\overline{A}=A\cup A'$，根据聚点的定义，不失一般性可设$x_n\in A$（如果$x_n\in A'\setminus A$，则可根据聚点的定义在$O\left(x_n, \dfrac{\delta_n^*}{2}\right)\cap A$内选取一点代替$x_n$），显然有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，因此与$x_0\in\overline{A}^C$产生矛盾，故$x_0$是$\overline{A}^C$的内点，从而知$\overline{A}$是闭集.

(3) 当A是闭集时，若$\{x_n\}\subset A$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则$x_0\in A$. 否则，若$x_0\in A^C$，即$x_0$是$A^C$的内点，则存在$O(x_0, \delta)\subset A^C$，这与$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$相矛盾，故$A'\subset A$，即$A=\overline{A}$. 反之，当$A=\overline{A}$时，由上述(2)的证明知$A$是闭集.

(4) 由$A\subset F$知$A'\subset F'$，所以$\overline{A}=A\cup A'\subset F\cup F'=\overline{F}$，因此$A\subset\overline{A}\subset F$. □

推论 1.2.1　设(X, d)是度量空间，$A\subset X$，则

(1) A是闭集当且仅当$A'\subset A$.

(2) 如果$A'=\phi$，那么A为闭集.

(3) $\overline{A}=\bigcap\limits_{A\subset F,\ F=\overline{F}}F$.

证明　由定理 1.2.3 易证(1)、(2)成立. 下面仅证明(3)成立.

设$B=\bigcap\limits_{A\subset F,\ F=\overline{F}}F$，依据定理 1.2.2 和定理 1.2.3 知，$B$是闭集且$\overline{A}\subset B$. 记$F_0=\overline{A}$，则$A\subset F_0$，$F_0=\overline{F_0}$，所以$B\subset F_0=\overline{A}$. 故命题成立. □

从定理 1.2.3 及推论 1.2.1 可知，集合A的闭包是包含A的最小闭集，也是比A大的所有闭集的交.

定义 1.2.4　拓扑空间(Topological Space)

设X是一个非空集合，如果τ是X的一个子集族，且满足如下条件：

(1) 空集 ϕ 和 X 都属于 τ；

(2) τ 中任意一个集合的并集都仍然属于 τ；

(3) τ 中任意两个集合的交集也仍然属于 τ，

则称子集族 τ 为 X 的拓扑；(X, τ) 为一个拓扑空间，在不引起混乱的情形下简记为 X. τ 内的集合称为拓扑空间的开集，X 中的元素称为点. □

对于度量空间 (X, d) 而言，若记 X 中由度量定义的开集组成的集合为 τ，那么容易验证 (X, τ) 为一个拓扑空间，称 (X, τ) 为由距离 d 诱导的拓扑.

定义 1.2.5　拓扑空间中的邻域和闭集(Neighborhood and Closed Set of Topological Space)

设 (X, τ) 是一个拓扑空间，点 $x\in X$，U 为 X 的子集，若存在 $G\in\tau$，使得 $x\in G\subset U$，则称 U 为 x 的邻域. 设 F 为 X 的子集，如果存在 $G\in\tau$，使得 $G=F^C=X-F$，则称 F 为拓扑空间 X 的闭集. □

设 U 是拓扑空间 X 的一个子集，若 $\forall x\in U$，U 是 x 的一个邻域，则由定义 1.2.5 知，存在开集 $G_x\in\tau$，使得 $x\in G_x\subset U$. 于是有 $U=\bigcup\limits_{x\in U}G_x\in\tau$，因此 U 是开集当且仅当 U 是它的每一点的邻域.

定义 1.2.6　离散拓扑空间(Discrete Topological Space)

设 X 是一个非空集合，τ 由 X 的所有子集构成. 容易验证，τ 是 X 的一个拓扑，称之为 X 的离散拓扑，并且称拓扑空间 (X, τ) 为离散拓扑空间. 在离散拓扑空间 (X, τ) 中，X 的每一个子集既是开集，又是闭集. □

显然，**离散度量空间**诱导的拓扑为离散拓扑空间.

定理 1.2.4　拓扑空间 X 中的闭集具有以下性质：

(1) 空集 ϕ 和全空间 X 都是闭集.

(2) 任意多个闭集的交集是闭集.

(3) 有限个闭集的并集是闭集.

定义 1.2.7　Hausdorff 空间(Hausdorff Space)

设 (X, τ) 是一个拓扑空间，如果 X 中任意两个不同的点都有不相交的邻域，则称 X 为 Hausdorff 空间. □

例 1.2.4　试证明度量空间 (X, d) 诱导的拓扑空间是 Hausdorff 空间.

证明　设 $x_0, y_0\in X$ 且 $x_0\neq y_0$，于是有 $\delta=d(x_0, y_0)>0$. 令

$$U_0=O\left(x_0, \frac{\delta}{3}\right)=\left\{x \mid d_0(x, x_0)<\frac{\delta}{3}, x\in X\right\}, V_0=O\left(y_0, \frac{\delta}{3}\right)=\left\{x \mid d_0(x, y_0)<\frac{\delta}{3}, x\in X\right\},$$

显然 U_0，V_0 分别是 x_0，y_0 的邻域，且 $U_0\cap V_0=\phi$. □

1.3　度量空间中的极限与连续

极限理论是微积分的基础，也是微积分学大厦的基石. 在微积分中，利用极限思想给出了连续函数、导数、定积分、级数的敛散性、多元函数的偏导数、广义积分的敛散性、重积分和曲线积分与曲面积分等概念. 可见，极限思想是高等数学的重要思想方法. 同样的，在度量空间中也可定义极限，而且微积分中的数列极限可看成度量空间中点列极限的

特例.

定义 1.3.1　点列的极限(Limit of Sequence)

设(X, d)是度量空间，$x\in X$，$\{x_n\}$是 X 中的点列，若$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n, x)=0$，则称点列$\{x_n\}$收敛于$x$，即点列$\{x_n\}$**收敛(convergence)**，且称$x$为点列$\{x_n\}$的**极限**. 记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x \text{ 或 } x_n \xrightarrow{d} x \text{ 或 } x_n\to x,\ n\to\infty.$$

$\{x_n\}$收敛于x用"$\varepsilon-N$"语言描述是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，当$n>N$时，恒有$d(x_n, x)<\varepsilon$成立. 若点列$\{x_n\}$不收敛，则称其**发散(Divergence)**. □

例 1.3.1　设 X 是实数集，数列$x_n=\dfrac{1}{n}$，$n=1, 2, \cdots$. 若在 X 上定义欧氏距离

$$d(x, y)=|x-y|,\ x, y\in X,$$

试验证数列$\{x_n\}$在度量空间(X, d)中收敛于 0. 若在 X 上定义离散距离

$$d_0(x, y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y,\end{cases}$$

试验证数列$\{x_n\}$在度量空间(X, d_0)中是发散的.

证明　因为对任意给定的$x_0\in X$，只要$\dfrac{1}{n}\neq x_0$，就有$d_0\left(\dfrac{1}{n}, x_0\right)=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}d_0\left(\frac{1}{n}, x_0\right)=1\neq 0,$$

可见数列$\{x_n\}$不收敛于x_0. 虽然(X, d)与(X, d_0)有共同的基本集合 X，但由于定义的距离不同，故它们是两个不同的度量空间. 同一点列$\{x_n\}$在度量空间(X, d)中收敛，却在度量空间(X, d_0)中发散. □

定义 1.3.2　子空间与集合的直径(Subspace, Diameter of a Set)

设(X, d)为度量空间，$A\subset X$，若将距离限制在$A\times A$上，显然 A 也是一个度量空间，称其为 X 的**子空间**. 若$x\in X$，$A\subset X$，则**点 x 到 A 的距离**定义为

$$d(x, A)=\inf_{y\in A}\{d(x, y)\}.$$

集合 A 的直径(Diameter)定义为

$$\mathrm{dia}A=\sup_{x, y\in A}\{d(x, y)\}.$$

若$\mathrm{dia}A$有限，则称 A 为**有界集**；若$\mathrm{dia}A=+\infty$，则称 A 为**无界集**. □

在离散度量空间$(\mathbb{R}, d_0)$中点$x_0\notin A$，$A\subset\mathbb{R}$，那么$d(x_0, A)$和$\mathrm{dia}A$分别是多少？显然有(1) 当 A 是单点集时，有$d(x_0, A)=1$及$\mathrm{dia}A=0$；(2) 当 A 不是单点集时，有$d(x_0, A)=1$及$\mathrm{dia}A=1$.

定理 1.3.1　(极限的性质)设(X, d)是度量空间，$\{x_n\}$是 X 中的一个点列，则有

(1) 若点列$\{x_n\}$收敛，则其极限唯一.

(2) 若点列$x_n\to x_0$，$n\to\infty$，则$\{x_n\}$的任何子列$x_{n_k}\to x_0$，$k\to\infty$.

(3) 若将收敛点列$\{x_n\}$看做是 X 的子集，则它是有界的.

证明　(1)设$x_n\to x$，$n\to\infty$且$x_n\to y$，$n\to\infty$，由定义知：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，当$n>N$时，有

$$d(x_n, x)<\frac{\varepsilon}{2},\ d(x_n, y)<\frac{\varepsilon}{2},$$

故当 $n>N$ 时，我们有

$$d(x,y)\leqslant d(x_n,x)+d(x_n,y)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知，$d(x,y)=0$，从而有 $x=y$.

(2) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$是$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的子列. 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$时，有 $d(x_n,x)<\varepsilon$. 当 $k>N$ 时，由于$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$是$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的子列，所以 $n_k\geqslant k$，即有 $n_k\geqslant N$. 因此有 $d(x_{n_k},x)<\varepsilon$，即$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x$.

(3) 设 $x_n\to x_0$，$n\to\infty$，由定义知：对 $\varepsilon_0=1$，$\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，$d(x_n,x_0)<\varepsilon_0=1$. 取 $M=\max\{d(x_1,x_0),d(x_2,x_0),\cdots,d(x_N,x_0),1\}+1$，则 $\forall n\in\mathbb{N}$，$d(x_n,x_0)<M$. 于是有，$\forall n,m\in N$，$d(x_n,x_m)\leqslant d(x_n,x_0)+d(x_m,x_0)<2M$，即$\{x_n\}$作为点集有界. □

例 1.3.2　设 $d(x,y)$是 X 上的一个距离，证明 $d_1(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$也是 X 上的距离.

证明　显然非负性和对称性成立，下面仅证三角不等式. 由于 $d(x,y)$是 X 上的距离，所以 $\forall x,y,z\in X$，有 $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$. 又知函数 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$ $\left(f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}>0\right)$为单调递增函数，于是有

$$d_1(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\leqslant\frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}=\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)}+\frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$\leqslant\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}+\frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}=d_1(x,z)+d_1(z,y),$$

因此 $d_1(x,y)$也是 X 上的距离. □

定义 1.3.3　连续与一致连续(Continuous and Uniformly Continuous)

设(X,d)，(Y,ρ)是两个度量空间，f 是这两个度量空间之间的一个映射 $f:X\to Y$.

(1) 关于 $x_0\in X$，如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in X$ 且 $d(x,x_0)<\delta$ 时，有 $\rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$，则称 f 在点 x_0 处**连续**. 若 f 在 X 的每一点处都连续，则称映射 f 在 X 上连续.

(2) 如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x,y\in X$，当 $d(x,y)<\delta$ 时，有 $\rho(f(x),f(y))<\varepsilon$，则称 f 在 X 上**一致连续**. □

显然，由一致连续可以推出连续. 对于函数而言，我们知道闭区间上的连续函数一致连续. 可见，定义在闭区间上的函数，连续与一致连续没有任何区别.

函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1]$上连续而不一致连续，其直观解释是：假设有一段“管子”套在函数的图像曲线上，对于任给的“管子直径”，不存在确定的“管子长度”，使得这样的“管子”在图像曲线上可以任意滑动；但是，在某定点 x_0 处，对于任给的“管子直径”，存在确定的“管子长度”，使得这样的“管子”在图像曲线 x_0 处可以左右任意滑动.

定理 1.3.2　(连续的等价条件)设(X,d)，(Y,ρ)是两个度量空间，$f:X\to Y$，$x_0\in X$，则下列各命题等价.

(1) 映射 f 在 x_0 点连续.

(2) 对于 $f(x_0)$的任一邻域 $O(f(x_0),\varepsilon)$，都存在 x_0 的一个邻域 $O(x_0,\delta)$，使得

$$f[O(x_0,\delta)]\subset O(f(x_0),\varepsilon).$$