数学模型（第五版）习题参考解答

姜启源　谢金星　叶　俊　编

高等教育出版社

数学模型（第五版）习题参考解答

Shuxue Moxing (Di-wu Ban)
Xiti Cankao Jieda

姜启源　谢金星　叶　俊　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书对《数学模型(第五版)》中的大部分习题给出了解答或提示,其中部分解答包含了编者在多年教学中发现的学生可能遇到的问题和常犯的错误。一些习题,特别是开放性的每章的训练题,不存在标准答案,本书给出的解答仅供参考。

本书可作为讲授数学建模课程和辅导数学建模竞赛的教师的参考资料及《数学模型(第五版)》自学者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学模型(第五版)习题参考解答 / 姜启源,谢金星,叶俊编. -- 北京:高等教育出版社,2018.5
ISBN 978-7-04-049631-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①姜… ②谢… ③叶… Ⅲ.①数学模型-高等学校-题解 Ⅳ.①O22-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 082290 号

策划编辑 李艳馥　　责任编辑 李晓鹏　　封面设计 王　鹏　　版式设计 范晓红
插图绘制 杜晓丹　　责任校对 张　薇　　责任印制 耿　轩

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	北京鑫海金澳胶印有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	8		
字　　数	170 千字	版　　次	2018 年 5 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2018 年 5 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	20.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　49631-00

前 言

实例研究是学习数学建模(主要指用机理分析方法建模)的有效方法,大体上包含两方面的工作,一方面是阅读、分析、评价、改进别人做的模型,另一方面是亲自动手,认真做几个实际题目(哪怕是已经相当简化的)。《数学模型(第五版)》中的习题分为复习题与训练题两部分,前者放在每一个案例(节)的后面,供复习、消化这个案例所用,主要配合上述第一方面的学习;后者放在每一类型案例(章)的后面,供这一类案例的训练所用,通常需要读者自己做出假设、构造模型并求解,因而没有确定的答案,它们配合上述第二方面的研究。

这本参考解答是为《数学模型(第五版)》的习题编写的,其中复习题的解答基本上是正确的,甚至是唯一的,虽然不可避免地存在一些纰漏和缺陷;而训练题的解答则只能作为参考,相信会有不少与这里提供的解答完全不同的结果。对于训练题,作为教师,应该允许和鼓励学生做出与本书不同的答案;作为学生,应该努力开发自己的想象力和创造力,争取得到有特色的结果。编者特别希望学习数学建模的同学们,对于这部分题目不要先看本书给出的解答,可以等自己做出(哪怕是非常粗糙的)结果之后,再与参考解答比较。

为使用方便起见,将《数学模型(第五版)》的复习题与训练题重排在每一章参考解答的前面,习题所涉及的参考文献见原书。

编 者

2017.9

目　　录

第 1 章　建立数学模型

习题

1.1　从现实对象到数学模型

怎样解决下面的实际问题，包括需要哪些数据资料，要做些什么观察、试验以及建立什么样的数学模型等[24,35].

（1）估计一个人体内血液的总量.

（2）为保险公司制定人寿保险金计划（不同年龄的人应缴纳的金额和公司赔偿的金额）.

（3）估计一批日光灯管的寿命.

（4）确定火箭发射至最高点所需的时间.

（5）决定十字路口黄灯亮的时间长度.

（6）为汽车租赁公司制订车辆维修、更新和出租计划.

（7）一高层办公楼有 4 部电梯，早晨上班时间非常拥挤，试制订合理的运行计划.

1.2　数学建模的重要意义

举出两三个实例说明建立数学模型的必要性，包括实际问题的背景，建模目的，需要大体上什么样的模型以及怎样应用这种模型等.

1.3　建模示例之一　包饺子中的数学

1. 利用模型（5）式①说明：如果 n_1 个饺子包 m kg 馅，那么 n_2 个饺子能包多少馅？由此给出本节中$\sqrt{2}$的结果.

2. 将所有饺子面皮一样厚的假设改为饺子越大面皮越厚，并对比给出简化.合理的数学描述，重新建模，给出 V 与 mv 之间的关系，讨论"饺子数量减少一倍能多包多少馅"与什么因素有关.

1.4　建模示例之二　路障间距的设计

1. 通过资料调查或实地测试，自己获取汽车加速度和减速度的数据，用来求解模型.

2. 关于路障，你还能想到有哪些问题可以用数学建模分析和解决吗？

1.5　建模示例之三　椅子能在不平的地面上放稳吗

将假设条件 1 中的"四脚的连线呈正方形"改为"四脚的连线呈长方形"，试建立模

---

① 因本书是《数学模型（第五版）》的配套辅导书，故题干中所提到的图、表、公式等序号均与《数学模型（第五版）》对应.

型并求解.

1.6 数学建模的基本方法和步骤

对于 1.1 节的复习题 1,考虑建立模型的基本方法,并对建模的具体步骤做出计划.

1.8 怎样学习数学建模——学习课程和参加竞赛

为了培养想象力、洞察力和判断力,考察对象时除了从正面分析外,还常常需要从侧面或反面思考.试尽可能迅速地回答下面的问题:

(1) 某甲早 8:00 从山下旅店出发,沿一条路径上山,下午 5:00 到达山顶并留宿.次日早 8:00 沿同一路径下山,下午 5:00 回到旅店.某乙说,甲必在两天中的同一时刻经过路径中的同一地点.为什么?

(2) 37 支球队进行冠军争夺赛,每轮比赛中出场的每两支球队中的胜者及轮空者进入下一轮,直至比赛结束.问共需进行多少场比赛,共需进行多少轮比赛.如果是 n 支球队比赛呢?

(3) 甲乙两站之间有电车相通,每隔 10 min 甲乙两站相互发一趟车,但发车时刻不一定相同.甲乙之间有一中间站丙,某人每天在随机的时刻到达丙站,并搭乘最先经过丙站的那趟车,结果发现 100 天中约有 90 天到达甲站,约有 10 天到达乙站.问开往甲乙两站的电车经过丙站的时刻表是如何安排的.

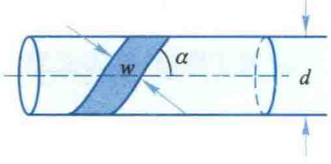
(4) 某人家住 T 市在他乡工作,每天下班后乘火车于 6:00 抵达 T 市车站,他的妻子驾车准时到车站接他回家.一日他提前下班搭早一班火车于 5:30 抵达 T 市车站,随即步行回家,他的妻子像往常一样驾车前来,在半路上遇到他,即接他回家,此时发现比往常提前了 10 min 到家.问他步行了多长时间.

(5) 一男孩和一女孩分别在离家 2 km 和 1 km 且方向相反的两所学校上学,每天同时放学后分别以 4 km/h 和 2 km/h 的速度步行回家.一小狗以 6 km/h 的速度由男孩处奔向女孩,又从女孩处奔向男孩,如此往返直至回到家中.问小狗奔波了多少路程.

如果男孩和女孩上学时小狗也往返奔波在他们之间,问当他们到达学校时小狗在何处[40].

第 1 章训练题

1. 用宽 w 的布条缠绕直径 d 的圆形管道,要求布条不重叠,问布条与管道轴线的夹角 α 应多大(如右图).若知道管道长度,需用多长布条(不考虑或考虑两端的影响)? 如果管道是其他形状呢?[17]



2. 雨滴匀速下降,假定空气阻力与雨滴表面积和速度平方的乘积成正比,试确定雨速与雨滴质量的关系.

3. 参考"更多案例 1-1 商人们如何安全过河"中的状态转移模型,做下面这个众所周知的智力游戏:人带着猫、鸡、米过河,需要人来划船,船至多能载猫、鸡、米三者之一,而当人不在场时猫要吃鸡、鸡要吃米.试设计一个安全过河方案,并使渡河次数尽量地少.

4. 大包装商品比小包装商品便宜是人所共知的事实(当然指单位质量或体积),你能仅从包装成本的对比对此作出解释吗?

习题参考解答

1.1　从现实对象到数学模型

参看 1.6 节复习题解答.

1.2　数学建模的重要意义

略.

1.3　建模示例之一　包饺子中的数学

1. n_2个饺子能包 $m\sqrt{n_1/n_2}$ kg 馅,令 $n_1=100, n_2=50, m=1$,得到$\sqrt{2}$.

2. 假设饺子面皮厚度与半径的关系可以表为 $D=cR^{\alpha}, d=cr^{\alpha}, \alpha\geqslant 0, c$ 是比例系数.于是本节(1)式应改为 $SD=nsd$,而(2)、(3)式不变, 由此可得 $V=n^{\frac{1-\alpha}{2+\alpha}}(nv)$.当 $\alpha=0$ 时面皮厚度与半径无关,结果与(5)式相同;$\alpha=1$ 时 $V=nv$,大小饺子包的馅一样多;$\alpha=1/4$ 时 $V=\sqrt[3]{n}(nv)$;$\alpha=1/2$ 时 $V=\sqrt[5]{n}(nv)$.若饺子数量减少一倍(取 $n=2$),对于 $\alpha=1/4$和 $\alpha=1/2$,饺子能多包的馅分别为 26%和 15%,比较合理.

1.4　建模示例之二　路障间距的设计

1. 略.
2. 路障断面的高度、形状.

1.5　建模示例之三　椅子能在不平的地面上放稳吗

相邻两椅脚与地面距离之和分别定义为 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$,将椅子旋转 180°,其余作法与 1.5 节相同.

1.6　数学建模的基本方法和步骤

(1) 注射一定量的葡萄糖,采集一定容积的血样,测量注射前后葡萄糖含量的变化,即可估计人体的血液总量.注意采集和测量的时间要选择恰当,使血液中的葡萄糖含量充分均匀,又基本上未被人体吸收.

(2) 调查不同年龄的人的死亡率,并估计其在未来一定时期的变化,还应考虑银行存款利率和物价指数,保险金与赔偿金之比大体上应略高于死亡率.

(3) 从一批灯管中取一定容量的样本,测得其平均寿命,可作为该批灯管寿命的估计值.为衡量估计的精度,需要从样本寿命确定该批灯管寿命的概率分布,即可得到估计值的置信区间.还可试验用提高电压的办法加速寿命测试,以缩短测量时间.

(4) 根据牛顿第二定律建立火箭向上发射后的运动方程,初速已知,若不考虑空气

阻力,很容易算出到达最高点(即速度为零)时间;若考虑空气阻力,不妨设其与火箭速度(或速度的平方)成正比,并由试验及拟合方法确定阻力系数,再解方程得到结果.

(5) 司机看到黄灯后停车要有一定的刹车距离 S_1,设通过十字路口的距离为 S_2,汽车行驶速度为 v,则黄灯的时间长度 t 应使距停车线 S_1 之内的汽车能通过路口,即$t\approx(S_1+S_2)/v$.而 S_1 可由试验得到,或按照牛顿第二定律解运动方程,进一步可考察不同车重、不同路面及司机反应灵敏程度等因素的影响.

(6) 根据资料和经验确定维修费用随着车龄和行驶里程的增加而增加的关系,再考虑维修和更新费用,可以以一年为一个时段,结合租金决定应该维修还是更新.

(7) 统计在各层上班的人数,通过数据或计算确定电梯运行时间,以等待的人数与时间乘积为目标,建立优化模型,确定每部电梯运行的楼层(有些电梯可以从大厅直接运行到高层,低层不停).

1.8 怎样学习数学建模——学习课程和参加竞赛

(1) 设想有两个人一人上山,一人下山,同一天同时出发,沿同一路径,必定相遇.

(2) 36 场比赛,因为除冠军队外,每队都负一场;6 轮比赛,因为 2 队赛 1 轮,32 队需赛 5 轮.n 队需赛 $n-1$ 场,若 $2^{k-1}<n\leqslant 2^k$,则需赛 k 轮.

(3) 不妨设从甲到乙经过丙站的时刻表是:8:00,8:10,8:20,…,那么从乙到甲经过丙站的时刻表应该是:8:09,8:19,8:29,….

(4) 步行了 25 min.设想他的妻子驾车遇到他后,先带他去车站,再回家,汽车多行驶了 10 min,于是带他去车站这段路程汽车跑了 5 min,而到车站的时间是 6:00,所以妻子驾车遇到他的时刻是 5:55.

(5) 放学时小狗跑了 3 km.孩子上学到达学校时小狗的位置不定,因为设想放学时小狗从任何位置起跑,都会与孩子同时到家.之所以出现位置不定的结果,是由于上学时小狗初始跑动的方向无法确定.

第 1 章训练题

1. 将管道展开如图 1,可得 $w=\pi d\cos\alpha$,若 d 一定,$w\to 0$ 时 $\alpha\to\pi/2$;$w\to\pi d$ 时 $\alpha\to 0$.若管道长度为 l,不考虑两端的影响时布条长度显然为 $\pi dl/w$,若考虑两端影响,则应加上 $\pi dw/\sin\alpha$.对于其他形状管道,只需将 πd 改为相应的周长即可.

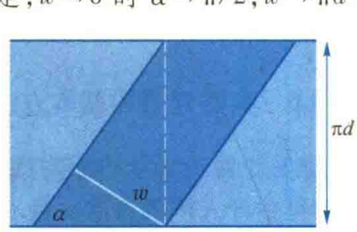


图 1

2. 雨滴质量 m,体积 V,表面积 S 与某特征尺寸 l 之间的关系为 $m\propto V\propto l^3$,$S\propto l^2$,可得 $S\propto m^{2/3}$.雨滴在重力 f_1 和空气阻力 f_2 的作用下以匀速 v 降落,所以 $f_1=f_2$,而$f_1\propto m$,$f_2\propto Sv^2$.由以上关系得$v\propto m^{1/6}$.

3. 人、猫、鸡、米分别记为 $i=1,2,3,4$,当 i 在此岸时记 $x_i=1$,否则记 $x_i=0$,则此岸的状态可用 $s=(x_1,x_2,x_3,x_4)$表示.记 s 的反状态为 $s'=(1-x_1,1-x_2,1-x_3,1-x_4)$,允许状态集合为 $S=\{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(1,0,1,0)$ 及它们的 5 个反状态$\}$.

决策为乘船方案,记作 $d=(u_1,u_2,u_3,u_4)$,当 i 在船上时记 $u_i=1$,否则记$u_i=0$,允许

决策集合为$D=\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(1,0,0,0)\}$.

记第 k 次渡河前此岸的状态为 s_k,第 k 次渡河的决策为 d_k,则状态转移律为 $s_{k+1}=s_k+(-1)^k d_k$,设计安全过河方案归结为求决策序列 $d_1,d_2,\cdots,d_n \in D$,使状态 $s_k \in S$ 按状态转移律由初始状态 $s_1=(1,1,1,1)$经 n 步到达 $s_{n+1}=(0,0,0,0)$.一个可行方案如下:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
s_k	(1,1,1,1)	(0,1,0,1)	(1,1,0,1)	(0,1,0,0)	(1,1,1,0)	(0,0,1,0)	(1,0,1,0)	(0,0,0,0)
d_k	(1,0,1,0)	(1,0,0,0)	(1,0,0,1)	(1,0,1,0)	(1,1,0,0)	(1,0,0,0)	(1,0,1,0)	

4. 记商品的特征尺寸为 l, 商品包装成本与 l^2 成正比,商品质量或体积与 l^3 成正比,则单位质量或体积的包装成本为 $C=kl^2/l^3=k/l$(k 只与商品种类和包装材料等有关), l 越大 C 越小.

第 2 章　初等模型

习题

2.1　双层玻璃窗的功效

北方旧宅改造时，为了增强保暖效果常用保温材料在外墙外面再加一层墙. 假定仍然只考虑热传导，试通过建模对改造后减少的热量损失给出定量分析，并获取相关数据作简单计算.

2.2　划艇比赛的成绩

考虑八人艇分重量级组（桨手体重不超过 86 kg）和轻量级组（桨手体重不超过 73 kg），建立模型说明重量级组的成绩比轻量级组的大约好 5%.

2.3　实物交换

用实物交换模型中介绍的无差别曲线的概念，讨论以下雇员和雇主之间的协议关系：

（1）以雇员一天的工作时间 t 和工资 w 分别为横坐标和纵坐标，画出雇员无差别曲线族的示意图. 解释曲线为什么是你画的那种形状.

（2）如果雇主付计时工资，对不同的工资率（单位时间的工资）画出计时工资线族. 根据雇员的无差别曲线族和雇主的计时工资线族，讨论双方将在怎样的一条曲线上达成协议.

（3）雇员和雇主已经达成了一个协议（工作时间 t_1 和工资 w_1）. 如果雇主想使雇员的工作时间增加到 t_2，他有两种办法：一是提高计时工资率，在协议线的另一点（t_2，w_2）达成新的协议；二是实行超时工资制，即对工时 t_1 仍付原计时工资，对工时 t_2-t_1 付给更高的超时工资. 试用作图方法分析哪种办法对雇主更有利，指出这个结果的条件[7].

2.4　汽车刹车距离与道路通行能力

1. 由表 1 的数据用最小二乘法拟合模型（7），计算参数 c_1，c_2，对数据和拟合曲线作图，并估计刹车时的减速度.

2. 采用第 1 题得到的 c_1，c_2，或者按照交通工程学提供的数据，适当地设定 d_0（可取车身标准长度的 1.5~2 倍），对于不同的车速（20~100 km/h），利用（9）式计算道路通行能力，并由（10）式分析各参数对最大通行能力的影响.

2.5　估计出租车的总数

1. 对总体 $\{1, 2, \cdots, x\}$ 仍然设定 $x = 1\ 000$，增加样本大小 n 和样本数量 m，用 5

个模型作模拟计算,估计总体,对估计结果进行分析研究. n 和 m 的增加对结果有什么影响.

2. 如果汽车的起始号码未知,5 种建模方法中有哪种方法可加以改进来解决这样的问题? 给出具体的估计模型并作模拟.

2.6　评选举重冠军

1. 搜集下列举重比赛的实际数据,利用(14)~(16)式计算折合成绩及排名:

(1) 截至目前的男子举重比赛世界纪录.

(2) 最近一届奥运会男子举重比赛成绩.

(3) 截至目前的女子举重比赛世界纪录.

2. 研究一般形式的幂函数模型 $y=aw^b$,利用表 1 的男子举重比赛世界纪录或第 1 题搜集的数据,确定系数 a, b(提示:通过取对数将幂函数化为线性函数),与幂函数模型(5)式比较与实际记录的拟合程度,再构造计算折合成绩的公式,对搜集的某次举重比赛各级别总成绩冠军进行排名.

2.7　解读 CPI

1. 表 5、表 6 显示,2013 年 12 月全国 CPI 环比增长率比 11 月上升 0.4%,而同比增长率比 11 月下降 0.5%,如何解释?

2. 按照你所在省(市、自治区)统计局公布的当地 CPI 数据,进行以下分析:

(1) 取 1 至 2 年逐月的环比、同比数据作图,观察、分析指数增长率和指数本身之间的关系.

(2) 取最近 10 年的年价格指数作图,观察、分析指数增长率和指数本身之间的关系.

(3) 利用得到的数据分析表 4 列出的全国 CPI 8 大类的权重是否与你当地的情况一样?

2.8　核军备竞赛

1. 在核军备竞赛模型中,证明由(6)式表示的乙安全线 $y=f(x)$ 的性质.

2. 在核军备竞赛模型中,讨论以下因素引起的平衡点的变化[24]:

(1) 甲方提高导弹导航系统的性能.

(2) 甲方增加导弹爆破的威力.

(3) 甲方发展电子干扰系统.

(4) 双方建立反导弹系统.

2.9　扬帆远航

若风向不变,行驶中 B 点将不在船的正东方,应该如何确定航向及帆的朝向.

2.10　节水洗衣机

1. 对于模型(3),(4)式考虑 $n=2$ 的情况,不作简化直接用初等方法求解,与(9),

(10)式的结果比较.

2. 对于模型(3),(4)式考虑 $n=3$ 的情况,设第2,3轮的加水量相同,不作简化直接求解(可用微积分),与(9),(10)式的结果比较.

3. 如果将模型假设1的"每轮漂洗后衣物上的污物全部均匀地溶于水中",改为"每轮漂洗后衣物上只有一定比例的污物均匀地溶于水中",重新建立模型,讨论如何求解.

第2章训练题

1. 在超市购物时你注意到大包装商品比小包装商品便宜这种现象了吗?比如佳洁士牙膏120 g装的每支10.80元,200 g装的每支15.80元,二者单位质量的价格比是1.14:1.试用比例方法构造模型解释这个现象.

(1) 分析商品价格 C 与商品质量 w 的关系.价格由生产成本、包装成本和其他成本等决定,这些成本中有的与质量 w 成正比,有的与表面积成正比,还有与 w 无关的因素.

(2) 给出单位质量价格 c 与 w 的关系,画出它的简图,说明 w 越大 c 越小,但是随着 w 的增加 c 减小的程度变小.解释实际意义是什么.

2. 一垂钓俱乐部鼓励垂钓者将钓上的鱼放生,打算按照放生的鱼的质量给予奖励,俱乐部只准备了一把软尺用于测量,请你设计按照测量的长度估计鱼的质量的方法.假定鱼池中只有一种鲈鱼,并且得到8条鱼的如下数据(胸围指鱼身的最大周长):

身长/cm	36.8	31.8	43.8	36.8	32.1	45.1	35.9	32.1
质量/g	765	482	1 162	737	482	1 389	652	454
胸围/cm	24.8	21.3	27.9	24.8	21.6	31.8	22.9	21.6

先用机理分析建立模型,再用数据确定参数[24].

3. 用已知尺寸的矩形板材加工半径一定的圆盘,给出几种简便、有效的排列方法,使加工出尽可能多的圆盘[17].

4. 动物园里的成年热血动物靠饲养的食物维持体温基本不变,在一些合理、简化的假设下建立动物的饲养食物量与动物的某个尺寸之间的关系[24].

5. 生物学家认为,对于休息状态的热血动物,消耗的能量主要用于维持体温,能量与从心脏到全身的血流量成正比,而体温主要通过身体表面散失,建立一个动物体重(单位:g)与心率(单位:次/min)之间关系的模型,并用下面的数据加以检验[24].

动物	体重	心率
田鼠	25	670
家鼠	200	420
兔	2 000	205
小狗	5 000	120
大狗	30 000	85

续表

动物	体重	心率
羊	50 000	70
人	70 000	72
马	450 000	38

6. 你能针对估计出租车数量问题提出自己的模型吗？如果有，通过模拟与 2.5 节 5 个模型作比较.

习题参考解答

2.1　双层玻璃窗的功效

设原来墙和增加的保温墙的厚度与热传导系数分别为 d_1,d_2 与 k_1,k_2，单位时间通过单位面积改造后的墙与原来墙的热量为 Q_1,Q_2，则 $Q_1/Q_2=1/(1+s)$，其中 $s=d_2k_1/(d_1k_2)$.

2.2　划艇比赛的成绩

由模型假设 3，划桨功率 p 与体重 w 成正比，而桨手数 $n=8$ 不变，所以 2.2 节(2)式改为 $v\propto(w/s)^{1/3}$. 记重量级组和轻量级组的体重、艇速、比赛成绩和艇的浸没面积分别为 $w_1,w_2,v_1,v_2,t_1,t_2,s_1,s_2$，则 $\dfrac{t_1}{t_2}=\dfrac{v_2}{v_1}=\left(\dfrac{w_2}{w_1}\right)^{1/3}\left(\dfrac{s_1}{s_2}\right)^{1/3}$. 估计 s_1/s_2 的大小：重量级组体重大，会使浸没面积增加，但艇身略大，又会使浸没面积减小，因而 s_1/s_2 不会超过 1.05. 代入 $w_1=86,w_2=73$，可得 $t_1/t_2\approx0.96$.

2.3　实物交换

(1) 雇员的无差别曲线族 $f(w,t)=c$ 是下凸的，如图 1，因为工资低时，他愿以较多的工作时间换取较少的工资；而当工资高时，就要求以较多的工资来增加一点工作时间.

(2) 雇主的计时工资族是 $w=at$，a 是工资率. 这族直线与 $f(w,t)=c$ 的切点 $P_1,P_2,P_3,\cdots$ 的连线 PQ 为雇员与雇主的协议线. 通常 PQ 是上升的(至少有一段应该是上升的)，见图 1.

(3) 设双方在 $P_1(t_1,w_1)$ 点达成协议，当雇主想使雇员的工作时间增至 t_2 时，用提高计时工资率 a 的办法，应在协议线 PQ 上找出横坐标为 t_2 的 P_2 点，工资额为 w_2，见图 2. 用超时工资的办法，应从 P_1 点作某一条无差别曲线的切线(粗虚线)，使切点 P_2' 的横坐标刚好是 t_2，若点 P_2' 在 P_2 下方(图 2 表示了这种情况)，则工资额 $w_2'<w_2$，即第二种办法对雇主有利. 得到这个结果的条件是，在雇员没有工作时和已经工作了 t_1 时

(得到工资 w_1),其无差别曲线族$f(w,t)=c$没有变化.

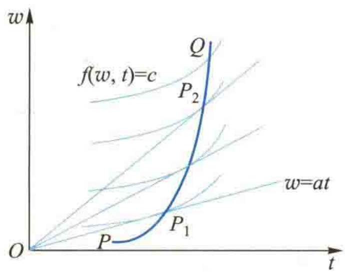


图 1

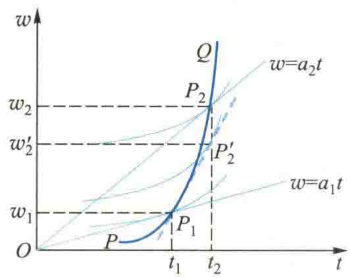


图 2

2.4 汽车刹车距离与道路通行能力

1. 把教材表 1 中车速单位化成 m/s,得到 $c_1=0.652\ 2$ s,$c_2=0.085\ 3\ \mathrm{s^2/m}$,减速度约为6 m/ s^2.

2. 设定 $d_0=8$ m, 道路通行能力 N 如表 1.c_1,c_2,d_0增加,最大通行能力减少.

表 1

$v/(\mathrm{km\cdot h^{-1}})$	20	40	60	80	100
$N/$(辆$\cdot\mathrm{h^{-1}}$)	390	431	392	344	302

2.5 估计出租车的总数

1. 增加样本大小 n 和样本数量 m 都会使平均值的误差及标准差减少,且增加 n 远比增加 m 的影响大.

2. 平均间隔和区间均分方法可以推广.设起始号码为 x_0,平均间隔模型的结果是

$$x-x_0=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)(x_n-x_1)-1.$$

2.6 评选举重冠军

1. 略.

2. 对表 1 数据,幂函数模型 $y=aw^b$ 系数为 $a=31.722\ 6,b=0.567\ 0$,前 3 个级别与世界纪录的拟合程度如表 1.

表 1

级别	总成绩纪录	模型 $y=aw^b$
56 kg 级	305 kg	310.931 8(−1.91%)
62 kg 级	327 kg	329.405 3(−0.73%)
69 kg 级	358 kg	350.004 7(2.28%)

计算折合成绩的公式为 $z=y\left(\dfrac{77}{w}\right)^b$.

2.7　解读 CPI

1. 原因之一是 2012 年 12 月全国 CPI 环比增长率为 2012 年 2 月以来最高值，于是 2013 年 12 月同比基期的 CPI 较高，致使同比增长率下降.

2. 略.

2.8　核军备竞赛

1. 乙安全线 $y=f(x)$ 表为 $y=\frac{y_0}{s^a}=\frac{y_0}{s^{x/y}}$, $0<s<1$，可计算出 $y'=\frac{-\ln s}{1+\ln(y/y_0)}$，而 $y=f(x)$ 的极坐标表达式为 $r=\frac{y_0}{\sin\theta\, s^{\cot\theta}}$. 由这些结果容易证明 $y=f(x)$ 的性质.

2. (1) 若甲方提高导弹导航系统的性能，则乙方的残存率 s 变小，y 增加，乙安全线上移且变陡，平衡点向右上方移动.

(2) 若甲方增加导弹爆破的威力，则甲方的威慑值 x_0 减小，甲安全线左移且变陡，平衡点向左下方移动.

(3) 若甲方发展电子干扰系统，则乙方的威慑值 y_0 和甲方的残存率 s 变大，乙安全线 $y=f(x)$ 上移且变陡，甲安全线变陡，平衡点向左上方移动.

(4) 若双方发展反导弹系统，则双方的威慑值和残存率均变大，前者使平衡点向右上方移动，后者使平衡点向左下方移动，综合影响无法确定.

2.9　扬帆远航

略.

2.10　节水洗衣机

1. (3)，(4)式分别为 $\frac{c^2}{u_1(u_2+c)}\leqslant\varepsilon$, $z=u_1+u_2$，可化为 $u_2=\frac{c^2}{\varepsilon u_1}-c$，$z=u_1+\frac{c^2}{\varepsilon u_1}-c$，当 $u_1=\frac{c^2}{\varepsilon u_1}$ 即 $u_1=\frac{c}{\varepsilon^{1/2}}$, $u_2=\frac{c}{\varepsilon^{1/2}}-c$ 时 $z=\frac{2c}{\varepsilon^{1/2}}-c$ 最小. 而(9)，(10)式的结果是 $u_1=u_2=\frac{c}{\varepsilon^{1/2}}$，$z=\frac{2c}{\varepsilon^{1/2}}$. 二者只有常数 c 的差别.

2. 设第 2,3 轮的加水量为 u，(3)，(4)式为 $\frac{c^3}{u_1(u+c)^2}\leqslant\varepsilon$, $z=u_1+2u$，可化为 $u_1=\frac{c^3}{\varepsilon}\frac{1}{(u+c)^2}$, $z=2u+\frac{c^3}{\varepsilon}\frac{1}{(u+c)^2}$，当 $u=\frac{c}{\varepsilon^{1/3}}-c$, $u_1=\frac{c}{\varepsilon^{1/3}}$，时 $z=\frac{3c}{\varepsilon^{1/3}}-c$ 最小. 而(9)，(10)式的结果是 $u_1=u=\frac{c}{\varepsilon^{1/3}}$, $z=\frac{3c}{\varepsilon^{1/3}}$. 二者只有常数 c 的差别.

3. 设题中的一定比例为 r，则第 k 轮脱水后污物含量 x_k 满足 $x_1=\left(1-r+\frac{c}{u_1}\right)x_0$，$x_{k+1}=$

$\left(1-r+\frac{c}{u_{k+1}+c}\right)x_k$,(3)式变为$\left(1-r+\frac{c}{u_1}\right)\left(1-r+\frac{c}{u_2+c}\right)\cdots\left(1-r+\frac{c}{u_n+c}\right)\leqslant\varepsilon$, c 与 u_k 相比较小可简化为 $\prod_{k=1}^{n}\left(1-r+\frac{c}{u_k}\right)\leqslant\varepsilon$,当 $n=2,3$ 时可用微积分方法求解(设定一系列的 ε 和 r).

第 2 章训练题

1. (1) 生产成本主要与质量 w 成正比,包装成本主要与表面积 s 成正比,其他成本也包含与 w 和 s 成正比的部分,上述三种成本中都含有与 w,s 均无关的成分.又因为形状一定时一般有 $s\propto w^{2/3}$,故商品的价格可表为 $C=\alpha w+\beta w^{2/3}+\gamma$($\alpha,\beta,\gamma$ 为大于 0 的常数).

(2) 单位质量价格 $c=\frac{C}{w}=\alpha+\beta w^{-1/3}+\gamma w^{-1}$,其简图如图 1,显然 c 是 w 的减函数,说明大包装比小包装的商品便宜;曲线是下凸的,说明单价的减少值随着包装的变大是逐渐降低的,不要追求太大包装的商品.

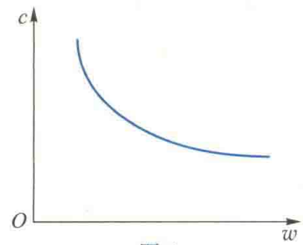


图 1

2. 对于同一种鱼不妨认为其整体形状是相似的,密度也大体上相同,所以质量 w 与身长 l 的立方成正比,即 $w=k_1l^3$,k_1 为比例系数.

常钓得较肥的鱼的垂钓者不一定认可上述模型,因为模型对肥鱼和瘦鱼同等看待.如果只假定鱼的横截面是相似的,则横截面积与鱼身最大周长的平方成正比,于是 $w=k_2d^2l$,k_2 为比例系数.

利用数据估计模型中的系数可得 $k_1=0.014\ 6$,$k_2=0.032\ 2$,将实际数据与模型结果比较如表 1.

表 1

实际重量/g	765	482	1 162	737	482	1 389	652	454
模型 $w=k_1l^3$	727	469	1 226	727	483	1 339	675	483
模型 $w=k_2d^2l$	730	465	1 100	730	483	1 471	607	483

基本上满意.

3. 设圆盘半径为单位 1,矩形板材长 a,宽 b;可以精确加工,即圆盘之间及圆盘与板材之间均可相切.

方案一:圆盘中心按正方形排列,如图 2.圆盘总数为 $N_1=[a/2][b/2]$.

方案二:圆盘中心按六角形排列,如图 3.行数 m 满足 $2+(m-1)\sqrt{3}\leqslant a$,于是 $m=\left[\frac{a-2}{\sqrt{3}}\right]+1$.

列数(按图 3 第 1 行计数)n 满足:若$[b]$为奇数,则各行圆盘数相同为$([b]-1)/2$;若$[b]$为偶数,则奇数行圆盘数为$[b]/2$,偶数行圆盘数为$[b]/2-1$.

$$圆盘总数为\ N_2=\begin{cases}m([b]-1)/2, & m\ 为偶数\\ m([b]-1)/2+1/2, & m\ 为奇数,[b]为偶数\end{cases}$$

两个方案的比较见表 2(表中数字为 N_1/N_2).