普通高等教育"十三五"规划教材
应用型本科保险学专业系列　　总主编◇徐爱荣

NSURANCE

NSURANCE

主编/张　薏

寿险精算学

立信会计出版社
LIXIN ACCOUNTING PUBLISHING HOUSE

普通高等教育“十三五”规划教材
应用型本科保险学专业系列　　　总主编◇徐爱荣

主编/张　薏

寿险精算学

立信会计出版社
LIXIN ACCOUNTING PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

寿险精算学 / 张薏主编. —上海：立信会计出版社，2019.1

普通高等教育“十三五”规划教材　应用型本科保险学专业系列

ISBN 978 - 7 - 5429 - 5987 - 4

Ⅰ. ①寿…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①人寿保险—保险精算—高等学校—教材　Ⅳ. ①F840.622

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 297052 号

责任编辑　王艳丽
封面设计　南房间

寿险精算学
Shouxian Jingsuanxue

出版发行	立信会计出版社		
地　　址	上海市中山西路 2230 号	邮政编码	200235
电　　话	(021)64411389	传　　真	(021)64411325
网　　址	www.lixinaph.com	电子邮箱	lxaph@sh163.net
网上书店	www.shlx.net	电　　话	(021)64411071
经　　销	各地新华书店		

印　　刷	上海肖华印务有限公司	
开　　本	787 毫米×1092 毫米	1/16
印　　张	16.5	
字　　数	368 千字	
版　　次	2019 年 1 月第 1 版	
印　　次	2019 年 1 月第 1 次	
印　　数	1 - 2100	
书　　号	ISBN 978 - 7 - 5429 - 5987 - 4/F	
定　　价	42.00 元	

应用型本科保险学专业系列教材

编写委员会

总主编

徐爱荣

编　委

（按姓氏拼音排序）

陈　玲　杜　鹃　李　鹏　凌　云
沈　丹　万晴瑶　徐　英　杨青骥
张　杰　张　薏　周佳妮

前　言

精算学是一门以概率论与数理统计为基础，与经济学、金融学及保险理论相结合，对保险经营中的计算问题做定量分析，以保证保险经营的稳定性和安全性的学科。它所解决的问题包括人口死亡率（生存率）的测定、生命表的编制、保险条款的设计、费率的厘定、准备金的计提、盈余的分配、险种创新、投资等。精算师是通过权威机构认可的精算师资格考试，获得相应专业资格并从事精算学研究与应用的专业人才。一个称职的精算师不仅需要有较为扎实的数学功底，还需要掌握经济学、统计学、财经、金融、管理、法律、计算机等方面的专业知识。

精算技术最早应用于人寿和养老金类业务的产品定价中，之后逐步向非寿险、健康保险、社会保障、银行、投资、金融等领域扩展。对于掌握并应用精算技术的专业人才，英国政府于1871年首次官方为其设立了精算师职位。各国精算组织都围绕着国际精算师协会制定的精算教育标准设立或选择相关的精算师考试体系，进一步选拔并培养复合型精算人才。

我国的精算教育始于南开大学。1988年11月，北美精算师协会与南开大学签订协议，由其协助南开大学培养精算硕士，相关的培养方案、教材以及师资等都由北美精算师协会确定并提供。当时精算学习者可以参考的教材主要是北美、英国资格考试体系下的考试用书。直到1997年，由中国人民银行保险司牵头才开始了中国精算师资格考试体系的构建与考试教材的编写，随后，国内各高校也开始围绕着考试大纲编写相关教材。

在各大精算师考试体系中，寿险精算都是其中的核心科目。本书作者从事精算教学多年且参加过北美准精算师资格考试、中国准精算师资格考试。本书更多地从读者的角度出发，增强理解性的引导，适用于初学精算的读者，也可作为参加精算师资格考试学员的辅助学习材料。

本书共8章。第1章是基础知识部分，介绍了单生命生存模型，该模型从随机变量的角度刻画了被保险人死亡年龄和剩余寿命的不确定性。第2章和第3章是基础理论部分，介绍了精算现值的概念，并以保险人的给付金额为代表归纳了精算现值的计算步

骤。第 4 章至第 6 章是对前 3 章内容的应用，建立了保险人在不同时刻精算意义下的收支平衡关系，并在此基础上完成了保费（包括净保费和毛保费）和责任准备金（包括修正准备金）的计算。第 7 章定义了多个生命体构成的生存状态，并通过多生命生存模型刻画了这些生存状态存续时间的分布，从而利用精算原理对以这些生存状态为标的的寿险产品进行定价。第 8 章从实际出发分析了导致保险人给付的各项风险因素，并建立了多元风险模型来研究其不确定性，从而可以更加精确地对寿险产品进行定价。此外，本书每章都列出了许多例题且配备了习题，帮助读者理解、掌握并巩固各个知识点。

本书作为寿险精算学的一本入门教材，可以作为高等院校精算学、保险学、金融学、应用数学等相关专业本科高年级学生的教材及教学参考用书，也可供自学精算学的读者阅读及参考。

在本书的编写过程，得到了上海立信会计金融学院保险学院的李鹏、周佳妮、张杰以及上海财经大学的蔡文靖、潘婧、陈燃萍、何迪、陈明镜、唐一鸣等老师和朋友的帮助，在此表示感谢。同时，感谢立信会计出版社编辑王艳丽对本书所做的努力。

作　者
2019 年 1 月

目　　录

第 1 章　单生命生存模型

传统寿险保单是以被保险人的生命为标的，以其在保险期限内是否存活作为给付保险金的判断依据，因此有必要研究被保险人在投保之后的生存状态，尤其是在保险期限内的生存状态. 考虑到投保时被保险人年龄各异，我们定义符号(x)表示 x 岁的人，并以新生婴儿(0 岁的人）为出发点，研究特定年龄个体的生存状态. 选择这一特殊年龄的理由是，新生婴儿是一个生命的开始，无论哪位被保险人都要经历新生婴儿这一阶段，而且可以被形容为附带一定条件的新生婴儿. 例如，30 岁的被保险人可以被形容为在 30 岁时生存着的新生婴儿.

1.1　死亡年龄的分布

1.1.1　连续型死亡年龄的分布

每个新生婴儿出生时，他的死亡年龄都是不确定的，可以将其理解为一个随机变量并记作 X. 与统计学中灯泡的使用寿命类似，死亡年龄通常被理解为取值非负实数的连续型随机变量，因此对死亡年龄的研究就转变为对一个连续型随机变量的分布的研究.

设某一新生婴儿群体的死亡年龄的分布函数为 $F(x)$，定义 $s(x)=1-F(x)$ 为相应的生存函数，即

$$s(x)=P\{X>x\},\quad x\geqslant 0 \tag{1.1}$$

作为一个概率函数，函数值 $s(x)$ 可以被理解为新生婴儿活过 x 岁的概率. 由于研究对象是个体未来的生存状态，故假设 $s(0)=1$，即新生婴儿在出生时(当前时刻）是处于生存状态的. 相应地 $F(0)=0$.

根据生存函数与分布函数的关系，不难推导出生存函数的性质(如连续性和单调性等). 理论上连续型随机变量的生存函数是单调递减的，而且递减的速度可以随年龄的增加而增加、减少或是不变，因此可以用递减的凸函数、凹函数以及线性函数来拟合. 图 1.1 给出了几种常见的生存函数的图像，反映了不同的生存规律. 例如，线性函数中，只要时间区间是等长度的，那么新生婴儿在这些时间区间内死亡的概率都是相等的(想想这种情形下随机变量 X 服从什么分布).

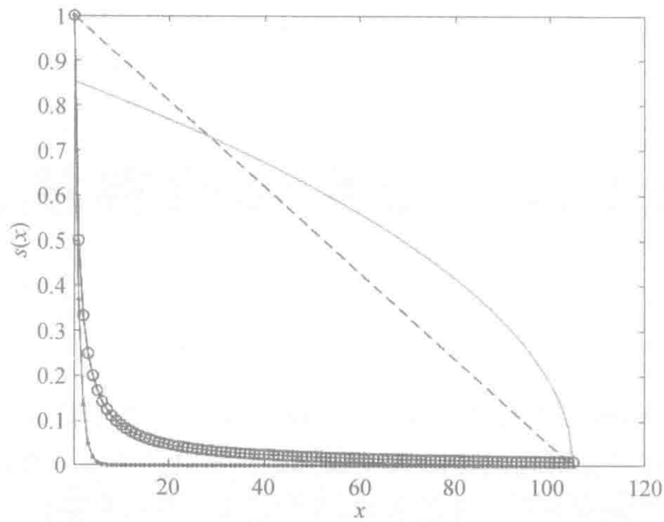

图 1.1　生存函数图像

注: 图 1.1 展示了常用的几种生存函数:实线对应的函数式为 $s(x)=\dfrac{\sqrt{105-x}}{105}$, $0\leqslant x\leqslant 105$;虚线对应的函数式为 $s(x)=\dfrac{105-x}{105}$, $0\leqslant x\leqslant 105$;圈线对应的函数式为 $s(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $x\geqslant 0$;点线对应的函数式为 $s(x)=\mathrm{e}^{-x}$, $x\geqslant 0$.

从客观实际出发,人的寿命是有限的. 定义满足:$\begin{cases} s(x)>0, & x<\omega \\ s(x)=0, & x\geqslant\omega \end{cases}$ 的正数 ω 为极限年龄,它是目前人类无法逾越的最小年龄. 极限年龄通常隐含于生存函数的表达式中,例如,表达式 $s(x)=1-\dfrac{x}{105}$, $0\leqslant x\leqslant 105$ 中隐含的极限年龄为 105 岁.

除了识别极限年龄外,生存函数还可用于推导 X 的概率密度函数

$$f(x)=-s'(x),\quad x\geqslant 0 \tag{1.2}$$

以及计算随机事件发生的概率. 例如,新生婴儿活过 x 岁且在 $y(x<y)$ 岁及 y 岁之前死亡的概率可表示为

$$P\{x<X\leqslant y\}=s(x)-s(y)$$

鉴于连续型随机变量分布的特点,事件 $\{x\leqslant X\leqslant y\}$, $\{x\leqslant X<y\}$ 以及 $\{x<X<y\}$ 发生的概率都与之相等. 类似地,还有 $P\{X\geqslant x\}=P\{X>x\}=s(x)$. 除此之外,由 X 所表达的一些复杂事件的概率也能用生存函数进行计算.

例 1.1.1　假设生存函数 $s(x)=1-\dfrac{x}{100}$, $0\leqslant x\leqslant 100$,试计算:(1) 概率密度函数 $f(x)$,(2) $P\{10<X<40\}$,(3) $P\{10<X<40\mid X>10\}$.

解　回忆密度函数与生存函数、生存函数与分布函数的关系,有

(1) $f(x) = -s'(x) = \frac{1}{100},\ 0 \leqslant x \leqslant 100$;

(2) $P\{10 < X < 40\} = s(10) - s(40) = 1 - \frac{10}{100} - \left(1 - \frac{40}{100}\right) = 0.3$;

(3) $P\{10 < X < 40 \mid X > 10\} = \frac{P\{10 < X < 40\}}{P\{X > 10\}} = \frac{s(10) - s(40)}{s(10)} = \frac{1}{3}$.

最后一项条件概率可解读为:新生婴儿在 10 岁时处于生存状态的条件下,在 10 岁至 40 岁之间死亡的概率.

生存函数能刻画连续型随机变量 X 的分布,自然也能计算包括期望和方差在内的数字特征.

例 1.1.1 中的条件概率又可以理解为 10 岁的人在 40 岁之前死亡的概率,这里 10 岁的人指代在 10 岁时处于生存状态的新生婴儿. 这为我们将研究对象从新生婴儿过渡到某一年龄的人提供了思路.

例 1.1.2　根据例 1.1.1 中的生存函数,计算随机变量 X 的期望及方差,并对结果做出解释.

解　由 $s(x)$ 的表达式可知,X 服从区间[0, 100]上的均匀分布,所以

$$E(X) = 50,\ \mathrm{Var}(X) = \frac{100^2}{12} = \frac{2\,500}{3}$$

又或者通过以下计算得到

$$E(X) = \int_0^{\infty} s(x)\mathrm{d}x = \int_0^{100} 1 - \frac{x}{100}\mathrm{d}x = 50$$

$$E(X^2) = 2\int_0^{\infty} xs(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{100}\left(x - \frac{x^2}{100}\right)\mathrm{d}x = \frac{10\,000}{3}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2\,500}{3}$$

因为 X 为新生婴儿的死亡年龄,所以 $E(X) = 50$ 意味着新生婴儿的平均死亡年龄为 50 岁. 就单个新生婴儿而言,其真实的死亡年龄会在 50 岁上下波动,且波动性很大.

1.1.2　离散型死亡年龄的分布

对连续型死亡年龄 X 取整可得到一个离散型随机变量,称其为周岁数并记为 $K = [X]$. 显然 K 的取值为所有非负整数,概率质量函数为

$$\begin{aligned} P\{K = k\} &= P\{[X] = k\} \\ &= P\{k \leqslant X < k+1\} \\ &= s(k) - s(k+1),\quad k = 0, 1, \cdots \end{aligned} \tag{1.3}$$

可求得期望

$$E(K) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (s(k) - s(k+1)) = \sum_{k=1}^{\infty} s(k) \tag{1.4}$$

很明显,离散型死亡年龄的分布可以借助连续型死亡年龄进行刻画.

例 1.1.3　已知新生婴儿死亡年龄 X 的密度函数为 $f(x) = \dfrac{x}{3\,200}$, $0 \leqslant x \leqslant 80$. 记 $K = [X]$,计算 $E(K)$.

解　$$s(x) = \int_x^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{80} \frac{t}{3\,200}\mathrm{d}t = 1 - \frac{x^2}{6\,400}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 80$$

$$E(K) = \sum_{k=1}^{\infty} s(k) = \sum_{k=1}^{80}\left(1 - \frac{k^2}{6\,400}\right) = 80 - \frac{173\,880}{6\,400} = 52.831\,3$$

虽然 K 的取值范围为所有非负整数,但其期望未必为整数!

1.2　剩余寿命的分布

剩余寿命是指当前生存的个体未来能够存活的时间长度. 很明显剩余寿命与死亡年龄是两个不同的概念,具有不同的属性,但是两者之间存在密切的关系. 如图 1.2 所示,标记新生婴儿出生的时刻为时间轴的原点,当前时刻为 x,死亡时刻(死亡年龄)为 X. 对于(x),死亡必然发生在时刻 x 之后,故将(x)的剩余寿命定义为

$$T(x) = X - x \mid X > x \tag{1.5}$$

显然 $T(x)$ 也是取值非负的连续型随机变量. 注意:条件 $X > x$ 不可缺少!因为 X 泛指新生婴儿的死亡年龄,取值为一切非负实数,所以一方面该条件的存在指明了研究的对象是 x 岁的人,另一方面缺少该条件,$X - x$ 就有可能取负值,也就无法表示剩余寿命. 倘若平移坐标轴,将当前时刻记为时间轴原点,那么 $T(x)$ 还可表示(x)的死亡时刻.

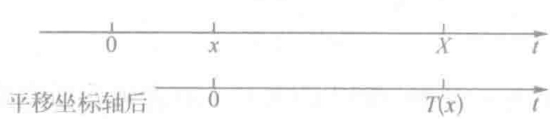

图 1.2　剩余寿命与当前年龄及死亡年龄之间的关系

定义 $T(x)$ 的生存函数和分布函数为

$$_tp_x = P\{T(x) > t\} = P\{X > x + t \mid X > x\},\ t \geqslant 0 \tag{1.6}$$

和

$$_tq_x = P\{T(x) \leqslant t\} = P\{X \leqslant x + t \mid X > x\} = 1 - {_tp_x},\ t \geqslant 0 \tag{1.7}$$

其中 $_tp_x$ 表示(x)在 t 年后依然生存的概率,$_tq_x$ 表示(x)在接下来 t 年内死亡的概率,两者皆

为条件概率. 进一步定义符号 $u|$ 表示延期 u 年，则 ${}_{u|t}q_x$ 表示 (x) 在 u 年后的 t 年内死亡的概率. 上述符号在 $t=1$ 时，可以将该部分省略不写，即 $p_x={}_1p_x$，$q_x={}_1q_x$，${}_{u|}q_x={}_{u|1}q_x$. 从分布函数和生存函数的应用角度看，有

$$
\begin{aligned}
{}_{u|t}q_x &= P\{u<T(x)\leqslant u+t\} \\
&= P\{T(x)>u\}-P\{T(x)>u+t\} \\
&= {}_up_x-{}_{u+t}p_x
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

及

$$
\begin{aligned}
{}_{u|t}q_x &= P\{u<T(x)\leqslant u+t\} \\
&= P\{T(x)\leqslant u+t\}-P\{T(x)\leqslant u\} \\
&= {}_{u+t}q_x-{}_uq_x
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

由(1.6)式和(1.7)式可知 ${}_tp_x$ 和 ${}_tq_x$ 均为由 X 表示的随机事件的条件概率，故可利用其生存函数 $s(\cdot)$ 进行化简，有

$$
{}_tp_x=\frac{P\{X>x+t\}}{P\{X>x\}}=\frac{s(x+t)}{s(x)},\ t\geqslant 0 \tag{1.10}
$$

$$
{}_tq_x=1-{}_tp_x=1-\frac{s(x+t)}{s(x)},\ t\geqslant 0 \tag{1.11}
$$

特别地，${}_xq_0=1-s(x)$，${}_xp_0=s(x)$，而且

$$
\begin{aligned}
{}_{u|t}q_x &= {}_up_x-{}_{u+t}p_x \\
&= \frac{s(x+u)}{s(x)}-\frac{s(x+u+t)}{s(x)} \\
&= \frac{s(x+u)-s(x+u+t)}{s(x)} \\
&= \frac{s(x+u)}{s(x)}\cdot\frac{s(x+u)-s(x+u+t)}{s(x+u)} \\
&= {}_up_x\cdot{}_tq_{x+u}
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

(1.12) 式又可以通过乘法公式予以理解

$$
\begin{aligned}
{}_{u|t}q_x &= P\{T(x)>u\}\cdot P\{T(x)\leqslant u+t\mid T(x)>u\} \\
&= P\{T(x)>u\}\cdot P\{X\leqslant x+u+t\mid X>x+u\} \\
&= {}_up_x\cdot{}_tq_{x+u}
\end{aligned}
$$

类似的乘法公式还可用于生存概率，有

$$
{}_{u+t}p_x={}_up_x\cdot{}_tp_{x+u} \tag{1.13}
$$

关于上述精算符号的说明：由符号 ${}_{u|t}q_x$ 自然会联想到 ${}_{u|t}p_x$，很明显它表示的是 (x) 在 u

年后又活过 t 年的概率，也即 (x) 在 $u+t$ 年后依然生存的概率，可以简单地用 ${}_{u+t}p_x$ 替代. 因此，我们不会看到 ${}_{u|t}p_x$ 形式的表达. 另外，${}_tp_x$ 和 ${}_tq_x$ 存在左右两个下标，但是从指定个体的剩余寿命分布来看，它们均是一元函数，左下标 t 才是函数的自变量.

例 1.2.1 设 $p_x=0.99$，$p_{x+1}=0.985$，${}_3p_{x+1}=0.95$，$q_{x+3}=0.02$，求 p_{x+3}，${}_2p_x$，${}_2p_{x+1}$，${}_3p_x$，${}_{1|2}q_x$.

解

$$p_{x+3}=1-q_{x+3}=0.98$$

$${}_2p_x=p_x\cdot p_{x+1}=0.975\,15$$

$${}_2p_{x+1}=\frac{{}_3p_{x+1}}{p_{x+3}}=0.969\,388$$

$${}_3p_x=p_x\cdot {}_2p_{x+1}=0.959\,694$$

$${}_{1|2}q_x=p_x-{}_3p_x=0.030\,306$$

例 1.2.2 已知 ${}_tp_{40}=\begin{cases}1-0.005t, & t<20,\\ 1.3-0.02t, & 20\leqslant t\leqslant 65,\end{cases}$ 计算 50 岁的人活过 30 年的概率.

解 运用(1.13)式，有

$${}_{30}p_{50}=\frac{{}_{40}p_{40}}{{}_{10}p_{40}}=\frac{0.5}{0.95}\approx 0.526\,3$$

例 1.2.3 假设生存函数 $s(x)=1-\dfrac{x}{100}$，$0\leqslant x\leqslant 100$，试计算：(1) $T(x)$ 的生存函数、分布函数以及概率密度函数；(2) 计算 $T(x)$ 的期望.

解 $${}_tp_x=\frac{s(x+t)}{s(x)}=\frac{1-\dfrac{x+t}{100}}{1-\dfrac{x}{100}}=\frac{100-x-t}{100-x},\quad t\in[0,\,100-x]$$

$${}_tq_x=1-{}_tp_x=\frac{t}{100-x},\quad t\in[0,\,100-x]$$

$$f_{T(x)}(t)={}_tq_x'=\frac{1}{100-x},\quad t\in[0,\,100-x]$$

很明显 $T(x)$ 服从区间 $[0,\,100-x]$ 上的均匀分布，所以

$$E(T(x))=\frac{100-x}{2}$$

结论 1.2.1 当新生婴儿的死亡年龄 X 服从区间 $[0,\,\omega]$ 上的均匀分布时，(x) 的剩余寿命 $T(x)$ 服从区间 $[0,\,\omega-x]$ 上的均匀分布.

定义 $K(x)=[T(x)]$ 为 (x) 的离散型剩余寿命，即 (x) 未来活过的整年数，其概率质量函数为

$$P\{K(x)=k\}=P\{k\leqslant T(x)<k+1\}={}_{k|}q_x,\ k=0,1,\cdots \tag{1.14}$$

期望为

$$E(K(x))=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot{}_{k|}q_x=\sum_{k=1}^{\infty}{}_kp_x \tag{1.15}$$

由 $K(x)$ 的定义可知，$K(x)\leqslant T(x)<K(x)+1$. 这表明自当前年龄开始，$(x)$ 死亡所在的年度区间为$[K(x),\ K(x)+1)$(图 1.3).

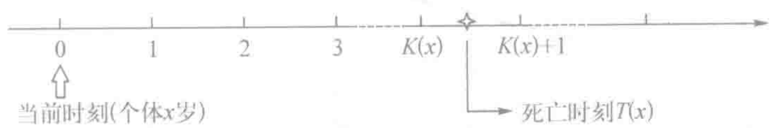

图 1.3　(x) 的死亡所在的年度区间

例 1.2.4　假设生存函数 $s(x)=\mathrm{e}^{-0.05x}$，$x\geqslant 0$，试计算：(1)$K(x)$ 的概率质量函数；(2)$K(x)$ 的期望.

解　因为 $s(x)=\mathrm{e}^{-0.05x}$，$x\geqslant 0$，所以

$${}_tp_x=\frac{s(x+t)}{s(x)}=\mathrm{e}^{-0.05t},\quad t\geqslant 0$$

$$\begin{aligned}{}_{k|}q_x&={}_kp_x-{}_{k+1}p_x\\&=\mathrm{e}^{-0.05k}-\mathrm{e}^{-0.05(k+1)}\\&=\mathrm{e}^{-0.05k}(1-\mathrm{e}^{-0.05})=0.048\,5\mathrm{e}^{-0.05k},\quad k=0,1,\cdots\end{aligned}$$

$$E(K(x))=\sum_{k=1}^{\infty}{}_kp_x=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-0.05k}=\frac{\mathrm{e}^{-0.05}}{1-\mathrm{e}^{-0.05}}=19.504\,2$$

1.3　死　亡　力

将 $T(x)$ 的生存函数对 t 求导，有

$$({}_tp_x)'_t=\left(\frac{s(x+t)}{s(x)}\right)'_t=\frac{s'(x+t)}{s(x)}=\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}\cdot\frac{s(x+t)}{s(x)}$$

因此，$T(x)$ 的概率密度函数为

$$f_{T(x)}(t)=-({}_tp_x)'_t=-\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}\cdot{}_tp_x \tag{1.16}$$

为了理解(1.16) 式右端的第一个因子的含义，先简单地分析 $-\dfrac{s'(x)}{s(x)}$. 根据导函数的定义，有

$$-\frac{s'(x)}{s(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{s(x)-s(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot s(x)}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{s(x)-s(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot s(x)}$$

当 $\Delta x>0$ 时，$\frac{s(x)-s(x+\Delta x)}{s(x)}={}_{\Delta x}q_x$ 表示新生婴儿在 x 岁时处于生存状态的条件下，在接下来的 Δx 年内死亡的概率. 特别地，$\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\frac{s(x)-s(x+\Delta x)}{s(x)}$ 表示新生婴儿在 x 岁时处于生存状态的条件下，在接下来的瞬间发生死亡的概率，故而 $\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\frac{s(x)-s(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot s(x)}$ 表示新生婴儿在 x 岁时处于生存状态的条件下，在接下瞬间的死亡概率密度. 因为

$$-\frac{s'(x)}{s(x)}=f_{T(x)}(0)$$

所以这一结果也可根据 $T(x)$ 在时刻 0 的密度函数进行理解. 在精算学中称其为死亡力(在生存分析或风险管理等科目中又称为失效率、风险率或危险率函数).

定义新生婴儿在 x 岁的死亡力为

$$\mu(x)=-\frac{s'(x)}{s(x)}=\frac{f(x)}{s(x)} \tag{1.17}$$

相应的符号还可记作 μ_x. 类似地，定义 (x) 在 $x+t$ 岁的死亡力为

$$\mu_x(t)=\frac{f_{T(x)}(t)}{{}_tp_x} \tag{1.18}$$

又可记作 μ_{x+t}. 因为

$$\frac{f_{T(x)}(t)}{{}_tp_x}=-\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}=\mu(x+t)$$

所以

$$\mu_x(t)=\mu(x+t) \tag{1.19}$$

这表明无论个体的当前年龄如何，在未来相同年龄的死亡力都相等. 而且从死亡力的定义上看，$\mu(x)\geqslant0$ 对任意的 $x\geqslant0$ 都成立.

例 1.3.1 已知生存函数 $s(x)=1-\frac{x}{100}$，$0\leqslant x\leqslant100$，求：

(1) 新生婴儿在 x 岁的死亡力；

(2) (x) 在 $x+t$ 岁的死亡力；

(3) (x) 的剩余寿命的概率密度函数.

解 (1) $\mu(x)=-\frac{s'(x)}{s(x)}=\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{x}{100}}=\frac{1}{100-x}$，$0\leqslant x<100$；

(2) $\mu_x(t)=\mu(x+t)=-\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}=\frac{1}{100-x-t}$，$0\leqslant t<100-x$；

(3) $_tp_x = \dfrac{s(x+t)}{s(x)} = \dfrac{100-x-t}{100-x}$, $0 \leqslant t < 100-x$,

$$f_{T(x)}(t) = \mu_x(t) \cdot {}_tp_x = \frac{1}{100-x-t} \cdot \frac{100-x-t}{100-x} = \frac{1}{100-x},\ 0 \leqslant t < 100-x$$

例 1.3.2　已知生存函数 $s(x) = e^{-0.05x}$, $x \geqslant 0$,求:

(1) 新生婴儿在 x 岁的死亡力;

(2) (x) 在 $x+t$ 岁的死亡力;

(3) (x) 的剩余寿命的概率密度函数.

解　(1) $\mu(x) = -\dfrac{s'(x)}{s(x)} = 0.05$, $x \geqslant 0$;

(2) $\mu_x(t) = \mu(x+t) = -\dfrac{s'(x+t)}{s(x+t)} = 0.05$, $t \geqslant 0$;

(3) $_tp_x = \dfrac{s(x+t)}{s(x)} = e^{-0.05t}$, $t \geqslant 0$,

$$f_{T(x)}(t) = \mu_x(t) \cdot {}_tp_x = 0.05e^{-0.05t}, \quad t \geqslant 0$$

通过求解微分方程 $\mu(x) = -\dfrac{s'(x)}{s(x)}$,还能得到生存函数关于死亡力的表达式,具体步骤如下:因为

$$\mu(x) = -\frac{s'(x)}{s(x)} = -(\ln s(x))'$$

两边求定积分,得

$$\begin{aligned}\int_0^x \mu(t)\mathrm{d}t &= \int_0^x -(\ln s(t))'\mathrm{d}t \\ &= \ln s(t)\big|_x^0 = -\ln s(x)\end{aligned}$$

所以

$$s(x) = e^{-\int_0^x \mu(t)\mathrm{d}t} \tag{1.20}$$

类似地,

$$_tp_x = e^{-\int_x^{x+t}\mu(s)\mathrm{d}s} = e^{-\int_0^t \mu_x(s)\mathrm{d}s} \tag{1.21}$$

根据生存函数与密度函数的关系有

$$f(x) = \mu(x) \cdot s(x) = \mu(x) \cdot e^{-\int_0^x \mu(t)\mathrm{d}t} \tag{1.22}$$

和

$$f_{T(x)}(t) = \mu_x(t) \cdot {}_tp_x = \mu_x(t) \cdot e^{-\int_0^t \mu_x(s)\mathrm{d}s} \tag{1.23}$$