



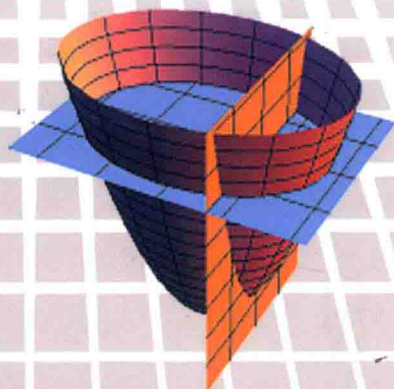
普通高等学校“十二五”规划教材

高等数学

(独立院校用)

上册

李忠定 王雅茹 杨杰 主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校“十二五”规划教材

高等数学

(独立院校用)

上册

主编 李忠定 王雅茹 杨杰
编者 李忠定 王雅茹 郭秀英 左大伟

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本系列教材为独立院校大学工科各专业公共课教材，共4册：高等数学（上下册）、线性代数与几何、概率论与数理统计。编者根据独立院校的教育教学特点及多年的教学经验撰写，是河北省2011年度高等教育教学改革立项项目的研究成果。本书为高等数学·上册，内容包括一元函数微积分、无穷级数及它们的应用。

本书适合作为独立院校工科各专业高等数学课程的教材，也适合作为普通高等学校本科、大专、函大、夜大及自学考试教材或参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学·上册/李忠定等主编. —北京：中国铁道出版社，2011.8 (2018.7 重印)

普通高等学校“十二五”规划教材·独立院校用
ISBN 978-7-113-13214-9

I. ①高… II. ①李… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 155332 号

书 名：高等数学（独立院校用）·上册
作 者：李忠定 王雅茹 杨杰 主编

策划编辑：李小军
责任编辑：李小军
编辑助理：董志乔
封面设计：付 巍
责任印制：郭向伟

封面制作：白 雪

出版发行：中国铁道出版社（北京市西城区右安门西街8号 邮政编码：100054）
网 址：<http://www.tdpress.com/51eds/>
印 刷：三河市兴达印务有限公司
版 次：2011年8月第1版 2018年7月第5次印刷
开 本：787 mm×1000 mm 1/16 印张：15 字数：301千
印 数：3 200册
书 号：ISBN 978-7-113-13214-9
定 价：32.00元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版图书，如有印制质量问题，请与本社教材研究开发中心批销部联系调换。

前 言

进入 21 世纪以来,我国的高等教育经历了扩大招生规模、院校合并等过程,实现了从精英教育到大众化教育的过渡。在这个过程中,原有的大学教育模式就产生了一些问题,尤其是大学数学的教育问题。由于学科特点,数学教育呈现几十年甚至上百年的一贯制。但大众化教育阶段入学群体的多样化使得数学教材也要实行多样化。按照教育部关于《工科类本科数学基础课程教学基本要求》,根据独立院校学生的特点,经过几年的教学实践,在研究、剖析、对比多种同类教材和广泛征求意见的基础上,由教学经验丰富的教师集体编写了本教材。本书以“联系实际,强化概念,加强计算,注重应用”为特色,充分体现了三本院校数学教育“理论够用为度”的编写原则。在内容编写上,首先从实际问题出发,建立数学模型,抽象出数学概念,然后寻求数学处理方法,进而用数学方法解决实际问题。基本概念、基本定理体现出从特殊到一般,从具体到抽象,深入浅出,难点分散,易于教、便于学的特点。归纳起来,本教材具有以下特色:

1. 高等数学与线性代数相结合,相互渗透,建立新的课程体系

将空间解析几何部分编入本系列教材《线性代数与几何》,用向量、矩阵等代数知识解决多元函数微积分学和常微分方程中的问题,使表述更简洁易懂。

2. 内容上做了调整

为了其他后续课程的有序设置,使高等数学更好地服务于其他课程,将无穷级数部分编入了上册。

3. 高等数学与初等数学紧密衔接

从以往的教学经验中得知,独立院校学生的数学基础与一般大学本科生有一定的差距,因此在编写本教材时,对初等数学知识做了较多的介绍,例如,第 1 章函数对集合、区间、函数等概念进行了回顾总结,并且把函数由单值函数推广到多值函数,以便学生通过复习初等数学知识更顺利地学习高等数学的内容,同时也让学生明白高等数学比初等数学内容更深更广。

4. 基本概念、基本定理与实际相联系

学生们往往认为数学“抽象”,尤其刚入学的大学生学习高等数学时一般需要一段适应过程。为了缩短这一过程,我们按照“实践—认识—实践”的认识过程编写,做到由特殊到一般,再由一般到特殊。引进重要的数学概念和定理时,在保证数学概念的准确性及基本理论的完善性、系统性的原则下,尽量用几何图形、物理意义来解释这些概念和定理,力求使抽象的数学概念形象化。例如讲解凑微分法时,首先通过实际例子让学生了解其基本思想和方法,然后再将被积函数换

成一般函数，得出凑微分法。

本书分上下两册出版。上册内容为一元函数微积分，无穷级数；下册内容为多元函数微积分，常微分方程。各章节都配有习题，书末附有习题答案与提示。

本书主要适用于独立院校工科各专业。

本书由李忠定教授主编。米建民老师认真审阅了原稿，并提出了不少改进意见，对此向他表示衷心感谢。

由于编者水平有限，同时编写时间仓促，教材中难免存在不妥之处，希望广大读者提出批评和指正。

编者

2011年4月

目 录

第 1 章 函数与极限	1
1.1 函数	1
习题 1.1	6
1.2 数列的极限	7
习题 1.2	11
1.3 函数的极限	11
习题 1.3	15
1.4 无穷小量与无穷大量	16
习题 1.4	19
1.5 极限的基本性质和运算法则	19
习题 1.5	23
1.6 极限存在准则及两个重要极限 无穷小的比较	24
习题 1.6	30
1.7 连续函数	31
习题 1.7	38
复习题 1	39
第 2 章 导数与微分	41
2.1 导数概念	41
习题 2.1	47
2.2 求导法则及求导公式	48
习题 2.2	58
2.3 微分及其应用	60
习题 2.3	65
复习题 2	66
第 3 章 中值定理与导数的应用	69
3.1 中值定理	69
习题 3.1	73
3.2 洛必达法则	74
习题 3.2	77
3.3 泰勒中值定理	77

习题 3.3	81
3.4 函数的单调性与极值、最值	81
习题 3.4	87
3.5 曲线的凹凸性与函数作图	88
习题 3.5	93
3.6 曲率	93
习题 3.6	96
复习题 3	96
第 4 章 不定积分	98
4.1 不定积分的概念和性质	98
习题 4.1	102
4.2 不定积分的换元积分法	102
习题 4.2	111
4.3 分部积分法	113
习题 4.3	115
4.4 几种特殊类型函数的积分	116
习题 4.4	121
复习题 4	121
第 5 章 定积分及其应用	124
5.1 定积分的概念与性质	124
习题 5.1	130
5.2 微积分基本定理	131
习题 5.2	134
5.3 积分法	135
习题 5.3	140
5.4 定积分的应用	141
习题 5.4	150
5.5 广义积分	151
习题 5.5	155
复习题 5	156
第 6 章 无穷级数	159
6.1 常数项级数的概念和性质	159
习题 6.1	164
6.2 常数项级数审敛法	164
习题 6.2	171

6.3 幂级数	172
习题 6.3	178
6.4 函数展开成幂级数	179
习题 6.4	183
6.5 傅里叶(Fourier)级数(一)	184
习题 6.5	191
6.6 傅里叶(Fourier)级数(二)	191
习题 6.6	197
复习题 6	197
附录	200
附录 A 常用曲线	200
附录 B 积分表	203
习题答案	211

第 1 章

函数与极限

高等数学的主要内容是研究变量的变化形态. 为了利用变量的变化趋势、变化速度以及变化的积累效应等要素刻画变化过程的特征, 人们提出并发展了极限的理论和方法. 客观世界处在永恒的运动、发展和变化中, 对各种变化过程和变化过程中的量与量的依赖关系的研究, 产生了函数与函数极限的概念. 函数概念就是对运动过程中量与量的依赖关系的抽象描述, 是刻画运动变化中变量之间相依关系的数学模型. 并且, 函数概念本身也在不断发展中. 极限是刻画变化过程中变量的变化趋势的数学模型. 在中学数学里, 通常突出的是极限的描述性定义. 高等数学则强调精确的、定量的极限定义.

本章将介绍函数与极限的基本概念、性质和运算, 并利用极限描述函数的连续性. 连续函数是最常见的一类函数, 具有一系列很好的性质和基本运算, 高等数学理论将以连续函数为主要研究对象.

1.1 函 数

1.1.1 基本概念

1. 集合

具有某种属性的对象的全体称为集合, 可用大写字母 A, B, C, \dots 来表示. 例如, 全体实数的集合 \mathbf{R} , 全体有理数的集合 \mathbf{Q} .

构成集合的对象称为元素, 用小写字母 a, b, c, \dots 来表示.

元素 a 是集合 A 中的元素, 记作 $a \in A$, 读作 a 属于 A ; a 不是集合 A 的元素, 记作 $a \notin A$, 读作 a 不属于 A .

2. 区间

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$,

数集 $\{x | a < x < b\}$ 称为以 a, b 为端点的开区间, 记为 (a, b) ;

数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为以 a, b 为端点的闭区间, 记为 $[a, b]$.

类似可定义 $[a, b)$ 与 $(a, b]$ 称为半开半闭区间.

以上这些区间都称为有限区间.

无限集合 $\{x | x > a\}$ 称为无限区间, 记为 $(a, +\infty)$, 类似还有无限区间:

$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$; $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$; $(-\infty, +\infty) = \{x | x \in \mathbf{R}\}$ 等.

3. 邻域

设 a 为任意实数, δ 是一个正实数, 称开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 为点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) = \{x | |x - a| < \delta\}.$$

点 a 的 δ 去心邻域为 $\dot{U}(a, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\}$.

1.1.2 函数

1. 函数的概念

定义 1.1 设 $A, B \subset \mathbf{R}$ 是两个非空数集, 若对于每个数 $x \in A$, 按照某个确定的法则 f , 有确定的数 $y \in B$ 与之相对应, 则称 $f: A \rightarrow B$ 为 A 到 B 的函数, 记为

$$y = f(x), x \in A.$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量或函数. 当 x 取数值 $x_0 \in A$ 时, 与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 A 的各个数值时, 对应函数值的全体所构成的数集 $f(A) = \{y | y = f(x), x \in A\}$ 称为函数的值域, A 称为函数的定义域.

定义域的约定 在实际问题中, 函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 有解析式子表达的函数如不说明, 则定义域是使其表达式有意义的自变量的全体.

函数的两个要素 确定一个函数的两个要素是: 定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域相同, 对应法则也相同 (在两个对应法则下, 相同的自变量对应相同的因变量), 那么这两个函数就是相同的, 否则就是不同的两个函数.

单值函数与多值函数 根据函数的定义, 当自变量在定义域内任取一个数值时, 对应的函数值总有一个, 这种函数叫做单值函数, 否则叫做多值函数. 以后凡是没有特别说明时, 函数都是指单值函数. 用一个解析式子来表示函数是最重要的表示函数的方法, 但不是唯一的方法. 借助于图形的直观形象表示有助于掌握函数的变化规律.

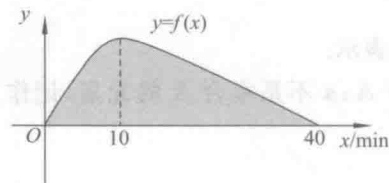


图 1-1

例如, 汽车的计速器把车轮转动的角速度转换为表盘上指针的相应位置, 即指示汽车的速度. 画出车速关于时间的图形, 得到车辆起步后的速度图 (图 1-1), 从图中可以清晰地看到车加速和减速的全过程: 起步后迅速加速, 至 10 min 后又缓缓减速, 直至 40 min 时停下.

如何得到这 40 min 间汽车经过的路程, 并把它显示在里程表上? 一般是通过机械装置的运转实现的, 这个装置的运转结果实际上是计算出了图中阴影的面积, 学了积分后即可知道这部分面积恰恰就是汽车经过的里程. 由此可见直观反映变量间依赖关系的几何图形对研究变量的关系起着十分重要的作用, 将这种几何图形抽象到数学上就是函数的图像.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 对任一 $x \in D$, 对应的函数值为 $y=f(x)$, 这在 xOy 面上就确定了一点 (x, y) , 我们称全体这种有序对的集合

$$C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

为函数 $y=f(x)$ 的图像(图形)(见图 1-2).

(1) 绝对值函数

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{当 } x > 0 \\ 0 & \text{当 } x = 0 \\ -x & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

其定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $[0, +\infty)$ (见图 1-3).

(2) 狄里克莱(Dirichlet)函数

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 为有理数} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

(3) 符号函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0 \\ 0 & \text{当 } x = 0 \\ -1 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

其定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是三个点的集合 $\{-1, 0, 1\}$ (见图 1-4).

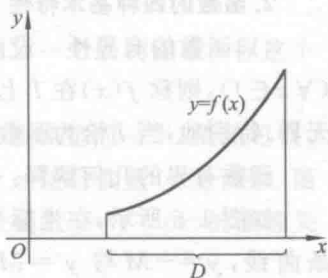


图 1-2

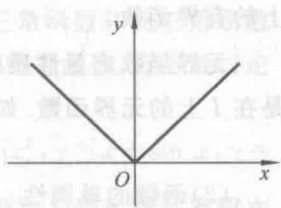


图 1-3

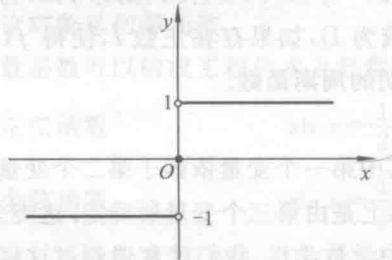


图 1-4

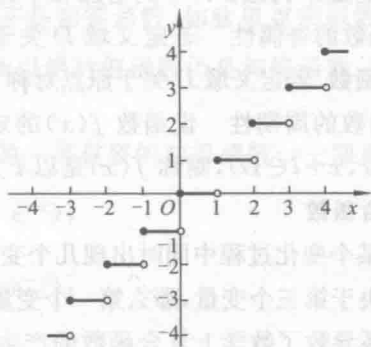


图 1-5

(4) 取整函数

$$f(x) = [x]$$

表示不超过 x 的最大整数, 如: $[3.01] = 3$, $[\pi] = 3$, $[3.9999] = 3$, $[-3.01] = [-\pi] = [-3.9999] = -4$. 其定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是全体整数的集合(见图 1-5).

(3)和(4)中的函数在自变量的不同变化区间中, 函数的表达式也不同, 通常称之为分段函数. 在自然科学、工程技术、社会科学中, 经常会遇到分段函数的情形.

2. 函数的四种基本特性

(1) 函数的有界性 设函数 $f(x)$ 在 I 上有定义. 如果存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M$ ($\forall x \in I$), 则称 $f(x)$ 在 I 上有界, 正数 M 称为 $f(x)$ 在 I 上的界. 否则就称 $f(x)$ 在 I 上无界. 特别地, 当 I 恰为函数 $f(x)$ 的定义域时, 则称函数 $f(x)$ 为有界函数.

函数有界的几何解释:

如图 1-6 所示, 在坐标平面上, $y=f(x)$ 表示一条曲线, $y=-M$ 与 $y=M$ 表示两条水平直线. $\exists M > 0$, 使得函数 $y=f(x)$ 的图形位于直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间. 即

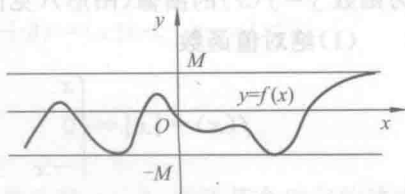


图 1-6

如符号函数、 $\sin x$ 和 $\cos x$ 都是 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界函数.

无界函数定量性质的数学定义为: $\forall M > 0, \exists x_0 \in I$, 使得 $|f(x_0)| \geq M$, 则称 $f(x)$ 是在 I 上的无界函数. 如取整函数为无界函数.

$$|f(x)| \leq M (\forall x \in I) \Leftrightarrow -M \leq f(x) \leq M.$$

(2) 函数的单调性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加; 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

(3) 函数的奇偶性 若定义域 D 关于原点对称, $f(-x) = -f(x)$ ($\forall x \in D$), 则称 $f(x)$ 为奇函数. 若定义域 D 关于原点对称, $f(-x) = f(x)$ ($\forall x \in D$), 则称 $f(x)$ 为偶函数.

(4) 函数的周期性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在正数 l , 使得 $f(x+l) = f(x)$, ($\forall x, x+l \in D$), 则称 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数.

3. 复合函数

如果某个变化过程中同时出现几个变量, 其中第一个变量依赖于第二个变量, 第二个变量又取决于第三个变量, 那么第一个变量实际上是由第三个变量所确定. 这类多个变量的连锁关系导致了数学上复合函数的产生. 在中学数学里, 我们就常遇到过这样的函数, 如 $\ln \sin x$, 是由对数函数 $y=f(u)=\ln u$ 与三角函数 $u=\varphi(x)=\sin x$ 复合构成的函数; 再如 $2^{\tan x}$, 是指数函数 $y=f(u)=2^u$ 与三角函数 $u=\varphi(x)=\tan x$ 复合构成的函数等.

定义 1.2 设函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D , 并且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含于函数 $y=f(u)$ 的定义域中, 称函数 $y=f(\varphi(x))$ 是由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成的定义域为 D 的复合函数. 其中 u 称为中间变量, 函数 $u=\varphi(x)$ 称为里层函数, 函数 $y=f(u)$ 称为外层函数.

4. 反函数

函数可以看作是从定义域到值域的一种运算, 讨论这种运算的逆运算, 就引出了反函数的概念.

定义 1.3 若对于每个数 $y \in B$, 存在唯一的确定数 $x \in A$ 与之相对应, 满足

$$f(x) = y, x \in A$$

按照函数定义,把 $y \in B$ 看作自变量, $x \in A$ 看作因变量,确定了一个新的函数. 称这个函数为函数 $y = f(x)$ 的反函数,记为 $x = \varphi(y)$ 或 $x = f^{-1}(y)$.

事实上,函数 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 互为反函数,二者的图像是同一个. 依照习惯,把 $x = f^{-1}(y)$ 中的字母 x 与 y 对调,记为 $y = f^{-1}(x)$,以保持 x 是自变量, y 是函数. 函数 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 互为反函数,这时函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

结论 单值单调函数的反函数必为单值单调函数,且单调增加函数的反函数仍单调增加的,单调减少函数的反函数仍是单调减少的.

5. 初等函数

在中学里已学过的常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六类函数统称为基本初等函数,中学数学里已重点介绍过基本初等函数,详尽地讨论了它们的定义域、值域、单调(或区间单调)性、奇偶性和周期性.

基本初等函数经四则运算可生成大量的函数,例如: $y = 1 + x^2$, $y = x + \sin x$, $y = \frac{a^x - 2x}{1 + \ln x}$. 复合运算也可生成新的函数. 由基本初等函数,经过有限次四则运算和有限次复合所得到的,能用一个式子表达的函数,称为初等函数.

初等函数包括的内容极其广泛. 此前所见到过的,凡是能够用一个解析式子表示的函数,都是初等函数. 必须分段表示的函数一般不是初等函数,如狄里克莱函数;但绝对值函数虽然是分段表示的,但因为 $|x| = \sqrt{x^2}$, 所以绝对值函数仍是初等函数. 高等数学的主要讨论对象是初等函数.

由指数函数可以构成工程技术上经常用到的一类重要的初等函数——双曲函数:

$$\text{双曲正弦函数} \quad \text{sh } x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x});$$

$$\text{双曲余弦函数} \quad \text{ch } x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x});$$

$$\text{双曲正切函数} \quad \text{th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

其反函数分别为:

$$\text{反双曲正弦函数} \quad \text{arsh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\text{反双曲余弦函数} \quad \text{arch } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1;$$

$$\text{反双曲正切函数} \quad \text{arth } x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, |x| < 1.$$

习题 1.1

1. 用集合表示适合下列不等式的变量 x 的变化范围:

(1) $x^2 \leq 4$; (2) $|x| > 3$;
 (3) $1 < |x-5| < 3$; (4) $\lg(2x) > 2$;

(5) $\sqrt{x-1} < 2$; (6) $\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1} > \frac{1}{2}$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x^2-1}$; (2) $y = -\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$;

(3) $y = \arccos(x-2)$; (4) $y = \ln(|x+1|-2)$;

(5) $y = \sqrt{5-x} - \arctan \frac{1-x}{x}$; (6) $y = \tan(x+2) + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.

3. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = (\sqrt{x})^2$, $g(x) = x$;

(2) $f(x) = (\sqrt{x^2})^2$, $g(x) = x^2$;

(3) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-1}}$, $g(x) = (x-2)\sqrt{x-1}$;

(4) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$, $g(x) = x\sqrt[3]{x}$;

(5) $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = 1 - \cos^2 x$;

(6) $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2 \ln x$;

(7) $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$, $g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$;

(8) $f(x) = 1$, $g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$.

4. 设函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2^x & \text{当 } -2 \leq x < -\frac{\pi}{3} \\ |\sin x| & \text{当 } |x| \leq \frac{\pi}{3} \\ x^2 - 2x - 1 & \text{当 } x > \frac{\pi}{3} \end{cases},$$

求 $\varphi(-2)$, $\varphi(-\frac{3}{2})$, $\varphi(-\frac{\pi}{6})$, $\varphi(\frac{\pi}{4})$, $\varphi(3)$.

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-l, l]$ 上是偶函数, 若 $f(x)$ 在 $[-l, 0]$ 上单调减少的, 证明: $f(x)$ 在 $[0, l]$ 上是单调增加的.

6. 试写出下列函数在指定区间内的单调性.

$$(1) y = \frac{1}{2-x} + 1 \quad (2, +\infty); \quad (2) y = \sin x - x \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

7. 判断下列函数哪些是奇函数, 哪些是偶函数, 哪些是非奇非偶函数.

$$(1) y = x(1-x)^2; \quad (2) y = x + \arctan x;$$

$$(3) y = x^2(x+1)(x-1); \quad (4) y = \frac{1}{1-x} + 1;$$

$$(5) y = \frac{a^x - a^{-x}}{2}; \quad (6) y = -x^4 + 3x^2 - 7.$$

8. 判断下列函数是不是周期函数, 若是周期函数, 写出它的周期.

$$(1) y = \sin 2x - \cos 2x; \quad (2) y = x \cos x;$$

$$(3) y = \sin^2 x; \quad (4) y = x - [x].$$

9. 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\ln x}$, 求出下列函数的解析式, 指出其定义域.

$$(1) f(x^2); \quad (2) f(\sin x);$$

$$(3) f(x-a) (a>0); \quad (4) f(x-a) + f(x+a) (a>0).$$

1.2 数列的极限

极限的概念是高等数学最基本的一个概念, 将要介绍的导数、定积分等重要的概念都是建立在极限概念之上的. 本节将介绍数列极限的概念.

1.2.1 数列的概念

定义 1.4 按一定的顺序排列的无穷多个数 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 称为数列, 简记为 $\{x_n\}$. 数列中的每个数称为数列的项, 第 n 项 x_n 称为数列的通项或一般项. 例如,

$$(1) \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots;$$

$$(2) \left\{ \frac{1}{n} \right\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$$

$$(3) \{(-1)^n\}: -1, 1, -1, 1, \dots;$$

$$(4) \{2^n\}: 2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots.$$

具体分析某一数列时有多个视角, 但数列一般项的变化趋势无疑是最值得重视的. 这类研究产生了数列极限的概念.

1.2.2 数列的极限

1. 定义

观察上面的数列:数列(1)无限接近于1;数列(2)无限接近于0,即当 n 无限增大时,数列与某一常数无限接近;数列(3),(4)当 n 无限增大时数列无上述变化趋势.将数列的这一变化趋势用普通语言描述出来就是中学所介绍的极限的直观描述性定义:

对于数列 $\{x_n\}$,如果存在一个常数 a ,当 n 无限增大时(记为 $n \rightarrow \infty$), x_n 与常数 a 无限接近,就把常数 a 叫做数列 $\{x_n\}$ 的极限.记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,也可简记作 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

这个定义无疑是正确的.但缺乏数学形式精确的、量化的刻画,比如什么叫 n 无限增大时 x_n 与常数 a 无限接近?所谓“无限接近”即它们的距离可以任意的小,用数学语言说就是: $|x_n - a|$ 可以任意的小.以数列(2)为例,就是当 n 无限增大时, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 的项与0

的差的绝对值可以任意的小.比如 $|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right|$,要使 $|x_n - 0| < \frac{1}{100}$,即要 $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$,只要 $n > 100$;

要使 $|x_n - 0| < \frac{1}{10^{100}}$,即要 $\frac{1}{n} < \frac{1}{10^{100}}$,只要 $n > 10^{100}$.

容易看出:要使 $|x_n - a|$ 任意小,只要项数 n 充分大.

引入 ϵ 表示任意小的数(应为正数),上面的表述可以改述为“只要 $\frac{1}{n} < \epsilon$,即 $n > \frac{1}{\epsilon}$,就有 $|x_n - 0| < \epsilon$ ”.即在大于 $\frac{1}{\epsilon}$ 的这一项后面的所有项与0的差的绝对值都小于 ϵ ,可更简单地说明“只要项数 $n > \frac{1}{\epsilon}$ 就有 $|x_n - 0| < \epsilon$ ”,如果再把满足不等式 $|x_n - 0| < \epsilon$ 的项数 n 更明确化,找到正整数 $N \geq \frac{1}{\epsilon}$,再让 $n > N$,再用宽泛的“存在”取代“找到”,上面的表述就变为:存在正整数 N ,当 $n > N$ 时,就有 $|x_n - a| < \epsilon$.

从对以上实例的分析,抽象出一般数列极限的定量性质的定义.

定义 1.5 设 $\{x_n\}$ 为一个数列, a 为一常数.对于任意给定的正数 ϵ (无论它多么小),总存在正整数 N ,使得 $n > N$ 时,恒有

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

则称数列 $\{x_n\}$ 以常数 a 为极限,记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ (或 } x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)).$$

有极限的数列称为收敛数列;否则称为发散数列.

2. 数列极限的几何解释

把数列 $\{x_n\}$ 的项都摆在数轴上(见图 1-7),于是, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 都是数轴上的点.

设有一个动点在数轴上跳动,动点的第一个位置在点 x_1 ,第二个位置在点 x_2, \dots ,第 n 个位置在点 x_n, \dots

根据 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的定义,再由 $|x_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow x_n \in U(a, \epsilon)$,可得到与之等价的说法:“这个动点跳动到第 N 次以后,就跳进了邻域 $U(a, \epsilon)$ 之内,而且永远不跳出来了。”它可以开始时在邻域的外面跳,也可以跳进这邻域再跳出来,重要的是“它能够跳进去而永远不出来”。

更简捷的等价说法是“这个动点在邻域 $U(a, \epsilon)$ 之外跳动的次数 x 至多是有限 N 次”,就是“数列 $\{x_n\}$ 中至多有有限项不属于点 a 的邻域 $U(a, \epsilon)$ ”。

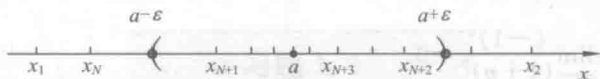


图 1-7

极限是一类运算,前面已经学过许多运算,如四则运算.各类函数也可以认为都是运算.以前学过的各类运算都是由有限个数产生一个数,数列极限则是由一系列无穷多个数产生一个数的运算.数列的一系列无穷多个数 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 逐步逼近、近而再近、无限逼近一个常数——它的极限数值,这是一个无穷的渐变过程.经过一系列无穷多次量的渐变,达到了质的突变,得到极限数值.

反过来,用极限这一个数,可以近似代替这一系列无穷多个数中除去有限个之后的所有的数,其近似程度可以达到任意精确的范围(即 $\forall \epsilon > 0$)之内.所以,可以说是用一个数——极限数值,把握住了一系列无限多个数中除去有限个之后的所有的数,高度实现了由简驭繁的功效.

【例 1】 用数列极限定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^n}{n} = 1$.

证明 因为 $|x_n - 1| = \left| \frac{n+(-1)^n}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}$,由以上分析知,对 $\forall \epsilon > 0$,要使 $|x_n - 1| < \epsilon$,只要 $\frac{1}{n} < \epsilon$,即 $n > \frac{1}{\epsilon}$,取自然数 N 为 $\frac{1}{\epsilon}$ 的整数部分,即取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$,则当 $n > N$ 时,都有

$$\left| \frac{n+(-1)^n}{n} - 1 \right| < \epsilon,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^n}{n} = 1.$$

用数列极限的定义来证明某个数列 $\{x_n\}$ 以某常数 a 为极限,或说用数列极限定义来验证已知数列和已知常数的极限关系时,关键是证明 N 的存在性,而证明 N 的存在性只需具体地将 N 找到.从要满足的不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 入手,找到 n 与 ϵ 的关系,再由此取定一个 N ,从而说明了 N 的存在性.即采用分析的方法进行的证明,极为严谨.