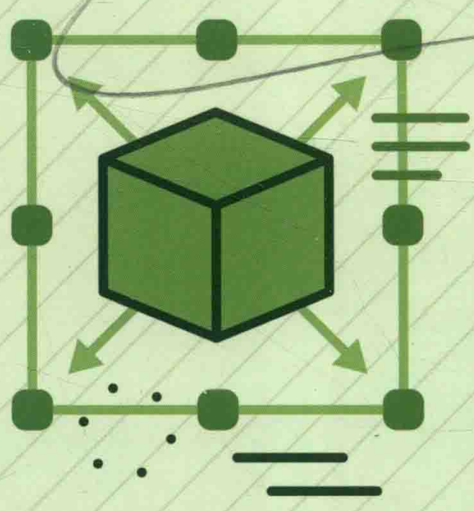
普通高等教育"十三五"规划教材

离散数学（第2版）

LiSan Shu Xue

主 编 刘爱民



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育“十三五”规划教材

离散数学

(第2版)

主　编　刘爱民

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是作者参照国内外多种同类教材，结合多年的教学实践经验，在自编讲义的基础上整理而成的。全书覆盖了计算机专业和电子信息专业最需要的基本内容，它包括四大部分共 14 章。介绍了数理逻辑、集合论、代数系统和图论的基础知识以及这四个部分之间的内在联系，叙述详细、推演严密，注重基础，深入浅出，便于理解。

本书可作为高等院校计算机类、电子信息类等相关专业的教材，也可供计算机专业的自考人员、从事计算机研究的工作人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/刘爱民主编. —2 版. -- 北京:北京邮电大学出版社，2018.8
ISBN 978-7-5635-5548-2

Ⅰ.离… Ⅱ.刘… Ⅲ.离散数学 Ⅳ.O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 172981 号

书　　名	离散数学(第 2 版)
主　　编	刘爱民
责任编辑	张保林
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址	www.buptpress3.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京泽宇印刷有限公司
开　　本	787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张	20
字　　数	509 千字
版　　次	2018 年 8 月第 2 版　2018 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5548-2　　　定价：49.00 元

再版前言

随着计算机科学技术的迅猛发展，离散数学作为计算机专业的一门核心课程，已不再仅仅是计算机专业所必学的基础课程。离散数学的教学不仅仅要为学生奠定专业的基础，而且也可以为开发软硬件技术、研究和应用提供有力工具。这是一门基础课程，是一门培养缜密思维、严格推理，具有综合分析归纳能力的课程。读者需要理解离散数学本身的体系结构，理解和领会离散数学研究事物的过程和方法，由此提升综合分析归纳的能力。

本版离散数学是在前一版基础之上改编而成。首先我们在开始增加一个准备知识的章节，在这里读者可以了解离散数学这门课程的由来、作用，也能够了解离散数学的学习方法。同时介绍了本书最基本的一个准备知识——集合的概念，这是现代数据的基础，也是集合论的基本组成部分。

然后依次介绍数理逻辑、集合论、代数系统和图论四大传统的知识模块。每部分都是先研究基本的对象，给出研究对象的精确定义，讨论研究对象之间的相互作用，最后是该种对象相互作用的具体应用。这就是离散数学的基本研究方法，但由于涉及的四个部分的基本对象相互独立，尽管方法相同，但各自的规律又有所差别，所以各部分都是新知识、新内容。

在教学内容上，我们增加了一些内容，如在逻辑推理的应用方面增加了机器证明的理论，从这里我们可以理解人工智能和人类自身智能的差别，简单说就是人工智能的思维过程离不开既定的规则、既定的程序，即使未来的发展使得人工智能能够不断增加既定规则，依然如此。同时，对所有内容进行了选学标识，以适用、方便不同的程度教学。

本书力求对各概念的描述做到细致入微，如果对某个概念的相关描述仔细通读，完全可以加深对相关概念的理解。

本书由北京大学信息科学技术学院刘爱民主编，李淑静担任副主编，参加编写的人员还有陈薛、皮进修、申芳芳。本书由刘爱民负责统稿和定稿。

本教材基本课时数为 72 学时，而教师可根据学时数、专业和学生的实际情况选学标有 * 或 * * 的内容，但总学时最多不超过 108 学时。因为作者水平有限，书中难免存在错误，恳请读者赐教指正。

第 1 版前言

离散数学是计算机专业的一门核心课程,为计算机科学和技术的发展奠定了重要的数学基础,其基本思想、概念和方法广泛渗透到计算机科学和技术的各个领域,如谓词演算成为程序理论的一种重要研究工具;布尔代数为开关电路的研究提供了重要的分析工具,并导致数字逻辑理论的建立;代数结构中的群环域理论,为编码理论提供了新的途径。后两者也是电子和信息专业的基础理论。数字逻辑理论是数字电路的基本理论,数字信号作为现代通信最主要的手段,其相应处理必须利用数字电路,而在数字信号的传送过程中,编码是不可缺少的;有限状态机理论不仅贯穿于时序逻辑设计的分析和设计过程,同时为通信系统的仿真方法提供了有力的工具;图论理论则广泛应用到信号系统的分析、电网络及通信网络之中。因此完全可以说离散数学的基本理论和研究成果也广泛应用到电子和信息领域,离散数学的这些重要成果和作用,使得它成为一个计算机科学工作者和工程师所必备的基础理论知识,同时也是一个从事电子和信息处理的人员不可或缺的基础知识。

离散数学在纯粹数学和应用数学中都占有重要的地位,它的内容极其丰富,其中许多重要问题源于数学游戏或者一些看似简单的趣味数学问题的解决。从其发展历史来看,尽管 300 多年前离散数学有关问题就出现了,而且经过这几百年的研究发展,许多问题已成为一个一个的体系,但正是由于电子计算机的问世,计算技术的发展,人们才对这些离散量进行分析,研究其结构、特点及它们之间的联系,从而形成一门较为完整的离散数学理论。反过来,离散数学理论的发展也促进了计算技术的飞跃发展。

本书覆盖了离散数学的基本内容,包括计算机专业和电子信息专业最需要的部分,共分为四大部分 14 章,它们是数理逻辑、集合论、代数系统、图论。尽管作为应用数学的离散数学应用非常广泛,但许多读者了解了离散数学的基本概念,却不知怎样应用。为此本书特别阐述了一些电子和信息方面的应用,如数字逻辑电路初步就介绍了怎样运用逻辑等值演算理论设计数字逻辑电路,这些章节均已标出。

一般来说,本书所涉及的四大部分内容都各成一体,但它们有着内在的联系,如利用数理逻辑这种应用形式化语言研究推理的方式,可以充分地描述集合论的各种运算,而有了集合和运算之后,才可以定义代数系统,图论作为关系的形象化表示,又提供了特殊的方法分析集合元素之间的关系。考虑到这种内在的逻辑联系,本书编排以数理逻辑作为基础首先介绍,掌握好它对后续内容可以起到事半功倍的效果,所以这里着墨较重较细。然后应用数理逻辑充分地介绍另一个基础——集合论,这不仅可以加强新知识的理解,还可以巩固数理逻辑的知识。并不是每位读者都了解离散数学所需要的数学基础,本书给出了部分用到的数学工具,这些内容实际上也是离散数学的有机组成部分。

学习离散数学的目的在于培养一个人的抽象思维能力、逻辑思维能力以及综合归纳分析的能力,因此本书力求理论上叙述严谨、推演严密,同时注重基础知识完整,概念与实例密切结合,深入浅出,便于理解。

本书是编者近年来在北京大学信息科学技术学院讲述离散数学自编讲义的基础上整理而成的，在编写过程中，参考了国内外多种离散数学文献，并总结了编者的教学经验。它可作为高等理工科院校计算机类、工程类专业本、专科离散数学课程的教材，而其中的基础理论部分对计算机专业自考人员理解基本概念很有帮助。

本书内容经过多届同学们的使用，他们提出了许多宝贵意见，特别是孙琰同学为讲义成书做了许多工作，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，加之成书时间仓促，缺点、错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2004年1月

目 录

第零部分 准备知识

第一部分 数理逻辑

第二部分 集 合 论

第三部分 代数系统

第四部分 图 论

第零部分

准 备 知 识

首先我们了解一下数学是什么。数学是研究数量、结构、变化、空间及信息的概念的一门学科。在人类历史发展和社会生活中，数学发挥着不可替代的作用，数学也是学习和研究现代科学技术必不可少的基本工具。

实际上，在平常生活中，即使一个没上过学的人，也需要知道计数，需要知道怎么数钱，买卖交易时需要知道计算钱的多少，这就是数学的范围。我们从幼儿园开始学习数数，1、2、3、4、……，慢慢地我们学习数的加减法，然后是数的乘除法，将数的范围扩大至实数，然后有指数对数、积分微分，甚至将数的范围扩大到虚数。这些都是初等数学和高等数学的范围。归根结底，初等数学和高等数学所有这些演算都是研究数与数之间作用过程、方法及产生结果。

离散数学自然是数学的一个分支，与初等数学和高等数学不同，其并不局限于连续的实数，而更专注于离散的整数甚至由各种对象构成的离散结构。简单说离散数学是研究离散数量关系和离散结构数学模型的一个集成学科。离散和连续是相对的概念。连续是事物或数量的一种属性，如时间、空间必然是连续的，但这种属性又容易被分割，如时间分割成年月日等离散量，空间也可以分成一段一段的，各个物体占据了不同的离散的空间。离散是对连续事物的分割，同时事物也不丧失其原有属性。

初高等数学专注于数字，研究数字之间的各种关系作用（加、减、乘、除、指数、对数等等）及作用的结果，其他多种学科则是充分利用这种作用过程和结果。离散数学则专注于离散量，但又不局限于离散量。它不仅仅关注离散的数字如整数，更关注其他的离散量，如自然语言。区分不同的离散对象，根据研究对象的不同特性属性，研究其相互作用及相互作用的结果，采用数学表达式表示这种相互作用，最终可以应用于相应的离散对象的处理。

传统上，物理学的发展使得高等数学得以快速发展，而离散数学之所以得以发展却是因为计算机科学的发展。计算机的实现和发展表明其所能处理的对象只能是离散数据。在计算机中处理任何的连续量，如图像处理，都需要将连续量离散化后再行处理。所以离散对象的处理是计算机科学的核心，而以离散量为对象的离散数学自然就成了计算机科学的最核心的专业基础课程。

§0.1 离散数学的作用和学习

§0.1.1 离散数学的作用

人类发明计算机的目的就是代替人工计算，计算机是人类用来进行各种各样科学计算如文档处理、图像处理、软硬件设计、大数据分析等等的工具。人们希望计算机系统能解决众多

不同领域的各种问题,为了达到这一目的,必须采用某种符号化的语言构成一个能概括不同领域的通用模型。离散数学正是提供这种构成通用模型的思维方法。离散数学告诉我们如何从简单的对象出发,研究对象的相互作用,采用不同的语言(符号化语言、图形化语言)描述这种相互作用,以便表达出通用模型。

计算机进行科学计算是在有限时间内自动进行,需要按部就班,一步一步地对问题进行构造性的解决,这正适合计算机的离散本质特征。在解决问题计算过程中构造的是离散结构,而离散数学正提供了基于构造离散结构解决问题的思维方法。

因此,作为基础课程,离散数学提供的是思维方式方法的培养。一个通用的利用计算机解决领域性问题的过程应该是:(1)分析领域性问题,构造出计算机能解决的模型;(2)根据计算机软硬件资源完成模型的算法设计;(3)最后实现对算法过程的有效控制。一旦完成这三部工作,剩下的事就交由计算机自行处理,处理结束后我们获取结果,完成问题的解决。

构造领域性模型的思维方法正是由离散数学所提供,离散数学的大部分内容就是讨论从基本对象出发,根据对象之间的相互联系、相互作用,用通用语言(如代数语言、符号逻辑语言、图形语言)构造出对象相互作用模型,也即对象之间相互运算的模型。这是构造或生成问题模型的基本方法。

算法设计则是计算机应用和技术的基本能力。一旦模型构造完成,并能为计算机所接受,那么接下来就是需要规划设计一个运算步骤,告诉计算机要做什么、怎么做,计算机根据这个步骤按部就班,一步一步地自动处理。这个规划步骤就是算法,一个算法必须可行、有限,并且确定。

算法过程控制是根据模型的离散结构对算法进行控制,这是算法设计的关键。离散数学中讨论的各种离散结构在算法控制设计的过程中有着重要的作用。

§0.1.2 离散数学的学习

如何学习离散数学?

离散数学是一门基础数学课,而且是由几个看似分离的分支综合在一起的;其内容繁多,非常抽象,难以建立它与现实客观事物的联系。离散数学的学习的根本要点就是需要把握其特点。

离散数学的每个分支都是从相应领域出发,获取领域内的基本对象,研究对象的相互作用即运算,讨论运算的规则、方法、性质,最后就是应用,所以每个分支涉及的每一项都是新的概念、新的内容。离散数学正是建立在大量概念上的逻辑推理学科,所以学习离散数学核心理念是对每个涉及的概念的正确理解把握,做到“准确、全面、完整”,这是重中之重。

离散数学在定义各个概念之后,就是有关概念之间关联的定理、性质,理解、掌握和运用这些定理性质则是学好离散数学的关键,在不断学习这些概念、定理的过程中,能大大提高我们的逻辑推理、抽象思维和形式化思维方面的能力。

课后习题是加强理解、掌握各个概念、定理的有效途径,作为逻辑推理学科的离散数学,配置大量证明类习题是必然的。解答各种题型,方法是最重要的,特别是证明题,方法性更强,如果知道一类题型用什么方法可以证明,将会很容易证明,否则可能无法沾边。正因为方法性强,所以需要充分理解各种不同证明方法,不同题型适合的证明方法,甚至多探讨几种证明方法来证明同一个问题。由于离散数学相对较为“呆板”,题型就只有那么多,许多题之间实际只是稍作变化,所以理解例题、练习、习题答案,善于总结归纳,体会各种题型的解答套路,是学好

离散数学的有效途径。

§0.2 集合的概念及表示

集合作为数学中的基本概念，如同几何中的点、线、面等概念一样，是不能用其他概念精确定义的原始概念，是现代数据的基础型概念，自然也是离散数据的一个基础型概念。

集合是什么呢？**集合**(set)就是由人们直观上或思想上能够明确区分的一些对象所构成的一个整体。这是由康托尔首先给出的经典定义。集合里含有的对象或客体称为集合的**元素**(elements)或**成员**(members)，集合是指总体，而元素是指组成总体的个体。在日常生活和科学实践中经常遇到各种集合，如逻辑联结词的全功能集、一阶谓词逻辑中的个体域等等。如下例中所列对象都可构成集合。

例 0.1 下面是一些集合的例子。

(1)全体中国人；

(2)一班学生；

(3)一个书店的书；

(4)一组运算符；

(5)英语的全部字母；

(6)汉字所有的偏旁；

(7)一个程序的全部语句；

(8)坐标平面上所有的点；

(9)一个人的思想观点；

(10)一本书的所有概念。

可以看到，集合元素所表示的事物可以是具体的，如人、书等，也可以是抽象的，如概念、观点等等。集合的元素是任意的，如一匹马、一张桌子、一个字母、一双鞋子及一个人可以组成一个集合，尽管这样的集合可能没有人关心，但是的确符合集合的概念，是可以接受的。

集合的元素又必须是确定的和可区分的。而“植物园中漂亮的花”这样的客体就不能组成集合，这是因为“漂亮”是一个界定不清的概念，花到底是什么样子才算漂亮呢？这个概念并不能明确界定集合的元素，所以不能构成集合。

一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素。

一个集合，若组成它的元素个数是有限的，则称为**有限集**；否则称为**无限集**。表示一个集合的方法有四种：枚举法、构造法、递归定义法、特定字母表示法。

1)**枚举法**：列出集合的全体元素，元素之间用逗号隔开，并把它们用花括号括起来。如：

$$A=\{1,2,3,4\},\quad B=\{3,2,1,4\};$$

$$C=\{a,b,c\},\quad D=\{a,b,b,b,c,c,c,c\}。$$

一般来说，各元素出现的先后次序并不重要，所以 A 和 B 相同。当元素有重复即多次出现时，通常可以忽略重复的元素，这时 C 和 D 也是相同的。但有时特意强调元素的重复性，这种集合称为**多重集**，元素的重复次数称为**元素的重复度**，这时通常将第四个集合表示为

$$\{a,3\cdot b,4\cdot c\}。$$

一般,如果没有特别说明,集合总是忽略元素的重复。

当集合的元素少时,可以将所有的元素都列举出来;但是当元素的个数很多甚至集合是无限集时,不可能一一列举出来,这时可以只列出部分元素,而没有列出的则由已有的元素及前后关系确定。

例

例 0.2

(1)$\{1,3,5,7,\cdots\}$

(2)$\{2,4,6,8,\cdots,100\}$

(3)$\{a,a^2,a^3,\cdots\}$

(4)$\{a,A,b,B,\cdots,Z\}$

但是要注意列出的元素要足够多,否则会难以根据前后关系确定其他元素,如:$\{2,4,8,\cdots\}$可能表达为 2 的正整数指数的集合$\{2^1,2^2,2^3,2^4,\cdots\}$,也可能是表达成$\{x\mid x=2-n-n^2,n=1,2,3,\cdots\}$。

2)**构造法**:用语言或表达式概括元素的属性,又称为属性表示法,可表示为

$$A=\{x\mid P(x)\},$$

即集合 A 是由使得 $P(x)$为真的全体 x 组成的。如

$$\{x\mid 1<x<3\},\quad \{x\mid x\text{ 是自然数}\}。$$

注意,对于给定的表达式 P 和任意的元素 x,$P(x)$或者为真或者为假。如果存在元素 y,使得 $P(y)$的值既不为真也不为假,那么$\{x\mid P(x)\}$就不能表示集合,这就是前面所阐述的"集合元素必须是确定的和可区分的"。

构造法可以通过界定给定的对象或客体是否在该集合里来表示,而一个给定的对象或客体是否在某一集合里,这是集合论中的一个基本问题。元素与集合的关系是集合论的一类基本关系,只有一种,称为**属于关系**(**或成员关系**)。

定义 0.1 如果一个客体 a 是集合 A 的元素,记为 $a\in A$,读作"a **属于集合** A";如果一个客体 b 不是集合 A 的元素,记为 $b\notin A$,读作"b **不属于集合** A"。

例

例 0.3

(1)令 $A=\{1,3,5,7,\cdots\}$,$1\in A,5\in A,11\in A,2\notin A$。

(2)令 $B=\{a,a^2,a^3,\cdots\}$,$a^{100}\in B,a^{-1}\notin B$。

当讨论多个元素同时属于一个集合时,总简写,如(1)中,简写成 $1,5,11\in A$。

构造法用来表示具有共同本质特性的元素组成的集合。实际上,集合可以用来描述思维中的一个概念,符合某个概念 R 的元素组成的集合称为概念 R 的**外延**,而这些元素共有的特性 $P(x)$称为概念 R 的**内涵**。内涵决定外延,而外延反过来又限定内涵,这就是集合和相应谓词的关系。一方面,每给定一个性质 P,就确定了一个集合 A,即集合 A 是由满足性质 P 的客体(元素)组成的;另一方面,集合 A 中的每个元素都具有性质 P。

最初用构造法表示一个集合时,对谓词 $P(x)$没有限制,所以罗素在 1902 年曾构造出如下集合:

$$A=\{x \mid x \notin x\}。$$

针对这个集合，存在一个问题：集合 A 是否是它自己的元素？根据集合的性质，如果 A 是 A 的元素，则 A 应满足 $A \notin A$，即 A 不是 A 的元素；如果 A 不是 A 的元素，则 A 应满足 $A \in A$，即 A 是 A 的元素。由此得出相互矛盾的结果，这就是著名的**罗素**(Bertrand Russell)**悖论**(paradox)。为了避免这种悖论的出现，必须对集合加以限制，不能出现诸如 $P(x)=x \notin x$ 这样的谓词作为集合的性质条件，也就是前面所说的 $P(x)$ 或者为真或者为假，不能够存在元素 y，使得 $P(y)$ 的值既不为真也不为假。

3)**递归定义法**：利用递归定义的基础、归纳及限制的方式定义一个集合，其中限制在默认情况下常常省略。

例

例 0.4　整除 k 的自然数集合 A_k：

①$0 \in A_k$；(递归基础)

②如果 $n \in A_k$，则 $n+k \in A_k$；(递归归纳)

作为练习，请读者用递归定义表示偶自然数、奇自然数集合。

4)**特定字母表示法**：对于一些常用的特定的集合，一般我们约定用特定的字母表示：**N** 代表自然数集合，**Z** 代表整数集合，**Q** 代表有理数集合，**R** 代表实数集合，而 **C** 代表复数集合。

$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,4,\cdots\}$	自然数集合(包括 0)；
$\mathbf{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$	整数集合；
$\mathbf{Q}=\{b/a \mid a,b \in \mathbf{Z}, a \neq 0\}$	有理数集合；
$\mathbf{R}=\{x \mid -\infty < x < \infty\}$	实数集合；
$\mathbf{I}=\{r \mid r \in \mathbf{R}, r \neq b/a$，对任意的 $a,b \in \mathbf{Z}\}$	无理数集合；
$\mathbf{Z}_n=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$	所有模 n 的整数；
$\varnothing=\{\}$	空集(不含任何元素的集合)。

定义 0.2　元素是集合的集合称为**集类**或**聚集**。

显然，集类是一类特殊的集合，其元素是集。

第一部分

数 理 逻 辑

一切科学，不论是社会科学，还是自然科学，都离不开推理。正确的推理形式应当满足：从正确的前提出发，必然得出正确的结论。因此，要保证推出的结论正确，除了要有正确的推理过程，还要保证推理的前提正确，这就是推论规则。逻辑学的主要目的就是要探索出一套完整的规则，按照这些规则就可以确定任何特定的论证是否有效。

最初的研究采用的是自然语言研究推理，其创始人是公元前四世纪的希腊思想家亚里士多德(Aristotle)。自然语言丰富而生动，但具有二义性(即一个词可以表达多种不同的意义)，这就给精确地研究推理形式造成了困难。为了精确地表达思想，需要使用一种概括性很强的且独立于任何特定的论证或所涉及的学科的一种语言。这种语言是一种符号化的形式语言，它没有二义性。使用这种形式化语言，可以将推论理论公式化，并且依据推理规则就可以机械地确定论证的有效性。只有这样，才能把这些推论规则应用到各个学科和各个领域中去。十七世纪的德国哲学家莱布尼兹(Leibniz)和十九世纪中叶的英国数学家乔治·布尔(George Boole)为此做了开创始性的工作。

数理逻辑实际上是用数学方法研究推论理论的一个符号化的形式体系，即用数学方法研究推理过程的一门科学。由于数理逻辑使用了特定的表意符号，因此又称为**符号逻辑**。

近几十年来，数理逻辑发展迅速，研究范围不断扩大，应用领域日益广泛，概括起来，可以分为五大分支：逻辑演算、公理集合论、证明论、递归论和模型论，其中逻辑演算是数理逻辑中最基础的部分。经过二百多年的努力，逻辑学家在20世纪初建立起一套完备的命题逻辑和一阶逻辑的演算系统，我们称其为**经典逻辑**或**标准逻辑**。从20世纪40年代开始，逻辑学不仅与数学相互渗透、结合，还与社会科学、自然科学和技术相互渗透、结合。人们扩充、改造经典的一阶逻辑，用数学方法发展了形形色色的非标准逻辑，以适应各方面应用的需要，例如用于计算机科学和人工智能的程序逻辑、算法逻辑、直觉主义逻辑、时态逻辑、模糊逻辑、内涵逻辑、时态逻辑、模态逻辑、三值逻辑、非单调逻辑等等。在这些非标准逻辑中，有的已形成了较成熟的演绎系统和语义理论，有的尚处于初创阶段，还没有形成一个公认的科学体系。

命题逻辑和一阶谓词逻辑是数理逻辑中最成熟的部分，也是学习和研究各种非标准逻辑的基础，在计算机科学中的应用尤为广泛。因此，我们在本书中只研究命题逻辑和一阶谓词逻辑。首先介绍这套符号化形式体系的制定；然后介绍它在命题逻辑推论理论中的应用；最后把它扩展到谓词逻辑的推论理论中去。

第一章 命题逻辑基本概念

人类自然语言是用来交流的,除了情感交流、获取问题答案的交流之外,一类最为普通的交流就是陈述事实,陈述的可能是既定的事实,也可能是需要我们充分说明以便他人能够理解的事实。而一个既定的事实可能是他人已经充分说明过,也可能是现实的而无须充分说明的。所以陈述事实就是说明事实,实际就是一个逻辑推理的过程。陈述事实采用陈述句的方式,而名为命题的陈述句是自然语言推理的基本要素,所以研究推理需要研究命题。

数理逻辑研究的中心是推理,推理的基本要素是命题时,就称为**命题逻辑**。命题逻辑推理的基本单位是命题。所以要研究命题逻辑的符号化体系,需要从命题开始。

§1.1 命题及其符号化

§1.1.1 命题

自然语言将**命题**(statement,proposition)表述为具有确定真假意义的陈述句。若该语句意义为真,则称为**真命题**;若该语句意义为假,则称为**假命题**。命题总是具有一定的值,称为**真值**。真值只有真、假两种,分别记为 T(1)和 F(0),即真命题的真值为 T 或 1,假命题的真值为 F 或 0。

显然,判断一个语句是否为命题,有两个要点:

1)是陈述句,不能是疑问句、祈使句,更不能是一个不完整的句子;

2)或真或假,具有唯一真值,不能兼而有之。

例

例 1.1 判断下列语句是否为命题。

(1)你是谁?

(2)雪是白的。

(3)明年的国庆日是晴天。

(4)95^2+95+1。

(5)$3-x=5$。

(6)北京交通真拥挤!

(7)火星表面的温度是 800 ℃。

(8)100 是个很大的数。

(9)我正在说谎。

(10)这是一朵美丽的花。

解:(1)是疑问句,不是陈述句,所以不是命题;(2)是真命题;(3)中虽然现在谁也不知道该语句是真是假,但是以说话时刻为准,到时候一定是清楚的,所以是命题;(4)不是一个完整的语句,所以不是命题;(5)虽然是陈述句,但其真值不唯一,随着 x 的取值而改变,所以不是命题;(6)是祈使句,不是陈述句,所以不是命题;(7)可能说不出其真假,但无论如何,它不是真就是假,真值是唯一的,所以是命题;(8)含义不确切,100 相对 1 而言较大,但相对 1 000 却较小,所以不是命题;(9)是悖论(即既可由真推出假又可由假推出真的命题),如果他确实是在说谎,那么"我正在说谎"就是真的,于是他是在讲真话,没有说谎,那么"我正在说谎"又是假的,显然这是自相矛盾的,也就是说,对于陈述句"我正在说谎",无法指定其真值,这正是所谓的"说谎者悖论",所以不是命题。又如"本语句是假的";(10)类似于(8),含义不确切,因为一些人认为其美丽,另一些人却不这样认为,所以不是命题。

由以上分析可知,判断一个陈述句是否为命题,关键在于判断其是否具有唯一真值,而与我们是否知道其真假无关。

上述所有是命题的陈述句,都是简单陈述句,不能再被分解为更简单的语句,这种由简单陈述句构成的命题称为**简单命题**,也称为**原子命题**或**本原命题**。命题逻辑不再进一步分析简单命题的内部结构,所以简单命题是构成命题逻辑的最基本的部分。

在自然语言中,用联结词可以将若干个简单陈述句相互作用来组合成复合陈述句。如"李兰聪明又好学"这句话,实际上是由联结词"又"将两个简单句"李兰聪明"和"李兰好学"复合而成的。这种由复合陈述句构成的命题称为**复合命题**(compound statements)。复合命题的真值由其简单命题的真值和联结词的意义共同决定。所以要想确定一个复合命题的真值,需要分析其支命题以及联结词。

§1.1.2 命题符号化

既然命题逻辑是一种符号化的逻辑演算,那么首先要作的是将有关的各种命题符号化,即用**命题标识符**表示命题。对于简单命题,一般用小写字母 $q,p,r,s,t,\cdots$ 表示,并将符号放在其表示的命题前,如:

p:今天下午有足球赛;

q:北京大学在海淀区。

简单命题的真值通常都是确定的,因此其相应的命题标识符称为**命题常项**。然而有时仅用命题标识符来表示简单命题的位置标志,如同在代数运算中不对任意的 x 给定确定的值一样,并没有指定其确定的真值,即其真值可能为真也可能为假,这样的命题标识符称为**命题变项**,通常也用小写字母 $q,p,r,s,t,\cdots$ 表示。一个标识符,例如 p,到底表示的是命题常项还是命题变项,一般可由上下文确定,不会发生混淆。

相对而言,复合命题的符号化要复杂些,涉及简单命题和联结词两个部分。符号化的联结词称为**逻辑联结词**(logical connective)或**逻辑运算符**,是命题演算中的运算符。在代数式 $x+y$ 中,x 和 y 称为运算对象,$+$ 称为运算符,$x+y$ 则表示运算结果。类似地,在命题演算中,联结词是运算符,命题常项和命题变项则是运算对象,运算结果则是产生新的复合命题。

下面将对几种常用的逻辑联结词及与之密切相关的复合命题作出明确定义。