考研数学复习指导系列丛书

# 考研

# 数学分析总复习——精选名校真题

陈守信 编著

第5版

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

考研数学复习指导系列丛书

# 考研数学分析总复习
## ——精选名校真题

**第 5 版**

陈守信　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是数学类专业考研复习指导书. 本书通过精选的名校真题,讲解典型问题的方法和技巧. 全书共分八讲,包括极限、一元函数的连续性、一元函数的微分学、一元函数的积分学、级数、多元函数的微分学、多元函数的积分学、不等式.

本次修订增补了从北大、南开、中科院、华东师大、大连理工、华南理工等院校最近两年真题中精选出来的六十多道题目,并删去或新增了一批例题后的类题.

本书适合作为自学材料,也可作为相关课程的教材.


**图书在版编目(CIP)数据**

考研数学分析总复习:精选名校真题/陈守信编著. —5 版. —北京:机械工业出版社,2018. 2

(考研数学复习指导系列丛书)

ISBN 978-7-111-58991-4

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 014441 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑:韩效杰 责任编辑:韩效杰 汤 嘉
责任校对:张晓蓉 封面设计:路恩中
责任印制:张 博
三河市宏达印刷有限公司印刷
2018 年 4 月第 5 版第 1 次印刷
184mm × 260mm · 23. 25 印张 · 568 千字
标准书号:ISBN 978-7-111-58991-4
定价:49. 80 元

# 前　言

“数学分析”是数学系最重要的基础课之一,也是数学系各专业考研的必考科目.由于它的内容多、技巧强、方法灵活,很多考生在备考过程中遇到诸多疑难和困惑,甚至产生了畏难、厌学情绪.针对这种情况,我想以一个朋友的身份和大家聊聊,也许对你会有帮助.二十多年前,我作为一名考生,也遇到了大家今天所遇到的问题(有过之而无不及!),也曾有过放弃的念头,但在老师和同学们的鼓励下,我咬咬牙挺过来了!因此,我首先想和大家说的是:要相信自己,不要轻言放弃,顶一顶过了这一关,前面也许就一马平川了!

我从事数学分析的教学工作已有二十余年,积累了一些教学经验和教学心得,能够体会到同学们在学习数学分析中的酸甜苦辣!因此,有了想写一本帮助同学们备考用书的冲动.

在写书之初,我曾多次和考生座谈并发放问卷,倾听他们的想法,了解他们的困惑.许多同学真诚地提出了自己的问题,这让我非常感动!于是,我暗下决心:要尽我最大能力写好这本书,以求能给大家点滴帮助.同学们的问题归纳起来有如下几个方面:1.数学分析概念多、定理多,各章节的内容串联不起来.比如,求极限有许多方法和技巧,拿到题目不知道如何下手.2.微分中值定理证明题中辅助函数的构造.3.定积分的可积性理论、求不出原函数的定积分的计算等问题.4.广义积分尤其是含参变量广义积分,证明其收敛性或一致收敛性是难点.5.对于函数项级数,当要讨论和函数的分析性质(连续性、可积性和可导性),而又不满足定理的条件时,常常感到束手无策.6.第二型曲面积分计算时的补面、以及区域内部有奇性等如何处理.当然,同学们还提出了许多其他问题,比如:一元函数的一致连续和非一致连续的证明;二重极限的计算;常考的不等式题型及其证明等.从同学们所提的问题看,的确切中了数学分析的重点和难点,当然也是目前各类院校考研的重点.

同学们的问题就是我写这本书的指导思想,因此我在编写本书的过程中始终本着如下原则:不受知识体系的约束,坚持体系由解题方法所决定;不去罗列各种教材中的基本内容,仅对一些重要的、容易混淆的概念和定理进行深入、透彻的讲解.并恰如其分地阐述它们之间的区别与联系,以及使用时应该注意的事项;不追求大而全、艰而难,注重解题思路的分析和解题技巧的提炼.

在整个写作的过程中,同学们的问题始终在我脑海萦绕.我常常问自己:我回答了学生的问题吗?能给学生帮助吗?唯恐自己的闪失或能力所限辜负了同学们的期望!下面我想通过几个例子来说明,我是如何针对同学们的问题来安排书中内容的.

* 求极限的方法与技巧

在第一讲中我归纳总结了十余种求极限的方法,并通过典型例子阐明了它们的应用.在此,我通过一个例子来说明如何去思考问题?

设数列 $\{x_n\}$ 由递推关系 $x_{n+1}=f(x_n)$ 所给出,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

拿到这个题目,大家会首先想单调有界定理.如果单调有界定理失效,可能有的同学就“望题兴叹”了!可是大家不要忘记:数列收敛的本质是:充分靠后的任意两项之间的距离可以任意小.这样我们就可以尝试使用压缩性条件或柯西收敛原理;如果还不行,可以考虑使用上、下极限法.

另外,如果数列 $\{x_n\}$ 由线性递推关系 $x_{n+1} = px_n + qx_{n-1}, n = 2,3,\cdots$ 所给出,其中 $p,q$ 为常数,$x_1,x_2$ 为已知.对这种由线性递推关系所定义的数列,我们可以将其视为差分方程,通过求其特征方程的根(即特征根),写出 $x_n$ 的通项公式,从而可求出 $x_n$ 的极限.

*与微分中值定理或泰勒公式有关的证明题中辅助函数的构造

在第三讲中,我通过对一些典型例题(这其中也包括与积分有关的题目)的分析、讲评,向大家介绍了:如何从题目的结论出发构造辅助函数.由于构造辅助函数有一定的灵活性,通过区区几个例题大家可能仍然无法掌握其中的技巧和奥秘!为了克服这一困难,我又介绍了在多年教学实践中总结出来的“辅助多项式法”.这种方法把充满技巧的辅助函数构造变成了机械的例行公事了.

*定积分的计算

谈起定积分的计算问题,许多同学可能对此不以为然,会简单地认为:只要求出原函数问题就解决了!但是对那些原函数求不出来或不易求出来的怎么办?通常的想法是,作自变量的变换,这种变换充满了智慧和技巧.在第四讲中,我给出了简单易行的“定积分计算技巧”,解决了一大类定积分计算问题.

如此等等,不再一一赘述.

关于本书我想再啰嗦几句.书中的例题和类题大都来源于考研真题和近年来的全国大学生数学竞赛试题.有些题目从年份上看,是早了一些,但是好的题目就像美妙的音乐,永远是不会过时的!在题目的取舍上既要照顾到介绍思想、方法和技巧的需要,又要保证有一定的难度;在讲解上由浅入深,娓娓道来,尽量做到“平易近人”.多数例题的后面都配有类题,并给出了详略不同的提示,这有利于同学们掌握和巩固例题中所学的方法和技巧.许多理论上的讲解和题后的注记,都体现了笔者二十多年的教学经验和教学心得,凝聚了笔者的心血!同学们在阅读过程中要认真琢磨,细细品味,切不可蜻蜓点水一带而过.

如何进行考研总复习呢?许多同学向我提出这个问题.我认为,首先把课本上的基本内容搞熟、搞透、掌握了,然后根据自己的情况选择一本适合复习的参考书,对所学的知识进行全面、系统的串联、归纳、总结、巩固和提高.最后找你所报考院校近几年的考题试做一下,把握一下出题的深浅、侧重点以及出题人的偏好,以期做到对症下药,有的放矢.

如果本书能为你考研助一臂之力,那将是我最欣慰的事情.

天道酬勤,我坚信有耕耘就会有收获.同学们,努力吧!成功属于你们!

你的朋友:陈守信

# 目　录


前　言

第一讲　极限……1

一、用极限的定义验证极限……1

二、用单调有界定理证明极限的存在性……3

三、用迫敛性定理求极限……8

四、用柯西收敛准则证明极限的存在性……10

五、用施图兹定理求极限……12

六、用泰勒展开求极限……14

七、用中值定理求极限……17

八、两个重要极限·洛必达法则……18

九、用定积分的定义求极限……23

十、其他……25

第二讲　一元函数的连续性……36

一、函数的连续性及其应用……36

二、一致连续性……47

第三讲　一元函数的微分学……57

一、导数与微分……57

二、高阶导数……62

三、微分中值定理及其应用……67

四、泰勒公式……82

五、函数零点个数的讨论……93

第四讲　一元函数的积分学……96

一、不定积分的计算……96

二、定积分的计算……106

三、函数的可积性理论……112

四、定积分的性质及其应用……118

五、广义积分……127

第五讲　级数……142

一、数项级数 …… 142
二、函数项级数 …… 159
三、幂级数 …… 179
四、傅里叶级数 …… 193
**第六讲 多元函数的微分学** …… 205
一、多元函数的极限与连续 …… 205
二、多元函数的偏导数与全微分 …… 214
三、隐函数(组)存在定理及隐函数求偏导 …… 227
四、偏导数的应用 …… 233
**第七讲 多元函数的积分学** …… 255
一、含参变量积分 …… 255
二、重积分 …… 279
三、曲线积分 …… 301
四、曲面积分 …… 314
**第八讲 不等式** …… 331
一、几个著名的不等式 …… 331
二、利用凸函数的性质证明不等式 …… 337
三、利用函数的单调性与极值证明不等式 …… 343
四、积分不等式 …… 351
**参考文献** …… 364

# 第一讲 极 限

在这一讲中,我们将涉及数列极限和函数极限.用于论证极限存在性的概念和定理很多,像极限的定义、单调有界定理、柯西收敛准则、迫敛性定理、施图兹定理、泰勒展开、中值定理(包括微分中值定理和积分中值定理)、两个重要极限以及洛必达法则等.

## 一、用极限的定义验证极限

**例 1.1** 用定义证明:(1)若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;

(2)若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n = b$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab.$$

**证明** (1)由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$ 知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_0>0$,当 $n\geqslant N_0$ 时,有

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

固定 $N_0$,当 $n\geqslant N_0$ 时,有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_0-1}+a_{N_0}+\cdots+a_n}{n}-a\right|\\ \leqslant&\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_0-1}-a|}{n}+\frac{|a_{N_0}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\\ <&\frac{M}{n}+\frac{n-N_0+1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

其中,$M=|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_0-1}-a|$,对固定的 $N_0$ 而言,它是一个确定的常数.故对上述 $\varepsilon>0$, $\exists N\geqslant N_0$, 当 $n\geqslant N$ 时,有 $\dfrac{M}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 从而

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_0+1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(2)令 $a_n=a+\alpha_n$,$b_n=b+\beta_n$, 则当 $n\to\infty$ 时, $\alpha_n,\beta_n\to0$. 于是

$$\begin{aligned}&\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}\\ =&\frac{(a+\alpha_1)(b+\beta_n)+(a+\alpha_2)(b+\beta_{n-1})+\cdots+(a+\alpha_n)(b+\beta_1)}{n}\\ =&ab+a\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n}+b\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}+\\ &\frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}.\end{aligned}$$

由(1)知,上式的第二、三项趋向于零.下证第四项极限也是零.

事实上,由 $\alpha_n \to 0(n\to\infty)$ 知, $\alpha_n$ 有界,即存在 $M>0$, 使 $|\alpha_n|\leqslant M$. 故

$$0<\left|\frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}\right|\leqslant M\frac{|\beta_n|+|\beta_{n-1}|+\cdots+|\beta_1|}{n}\to 0,$$

从而(2)的极限是 $ab$.

**注 1.1** (2)的极限亦可用(1)的方法来证明. 此时需要将所考察的差式分三段来估计,请同学们试一下.

(1)的结果是十分有用的,利用它可迅速求出一些极限.

例如:1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{n}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\cdots+\dfrac{n}{n+1}}{n}$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

**类题 1** 用定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

**提示** (1) $\left|\dfrac{n!}{n^n}-0\right|=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n}{n}\leqslant\dfrac{1}{n}$;

(2)对固定 $a$, 存在 $N_0>0$, 当 $n>N_0$ 时, 有 $n>|a|$, 即 $\dfrac{|a|}{n}<1$. 考察

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{|a|^n}{n!}=\frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\cdot\frac{|a|}{N_0+1}\cdot\cdots\cdot\frac{|a|}{n}<\frac{|a|^{N_0+1}}{N_0!}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\frac{M}{n}\quad\left(\text{其中 } M=\frac{|a|^{N_0+1}}{N_0!}\right);$$

(3) $\forall\varepsilon>0$, 取 $a=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$ 知, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, 有 $0<\dfrac{a^n}{n!}<1$, 即 $0<\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon$.

**类题 2** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq 0$, 用定义证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$$ (清华大学,2001).

**类题 3** 设 $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{y\to+\infty}f(y)=\infty$, 用定义证明: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(g(x))=\infty$ (南京航空航天大学).

**提示** 由 $\lim\limits_{y\to+\infty}f(y)=\infty$, $\forall G>0$ 充分大, 存在充分大的 $Y_0>0$, 当 $y>Y_0$ 时, 有 $|f(y)|>G$.

又由 $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$, 对上述 $Y_0>0$, 存在充分大 $X_0>0$, 当 $x<-X_0$ 时, 有 $g(x)>Y_0$.

综上知, $\forall G>0,\exists X_0>0$,当 $x<-X_0$ 时,有 $|f(g(x))|>G$.

**类题 4**　判断题:数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,使得当 $n>N$ 时,恒有 $|a_{2n}-a_n|<\varepsilon$.(正确的说明理由,错误的举出反例)(华东师大).

**提示**　该论断不正确. 考察数列: $a_n=\begin{cases}1,\text{若 } n \text{ 不能被 3 整除},\\2,\text{若 } n \text{ 能被 3 整除}.\end{cases}$ 不难发现, $\{a_n\}$ 满足: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$,当 $n>N$ 时,恒有 $|a_{2n}-a_n|<\varepsilon$,但数列 $\{a_n\}$ 不收敛.

**例 1.2**　证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在(武汉大学).

**证明**　用反证法. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+2)=a$,有

$$\lim_{n\to\infty}[\sin(n+2)-\sin n]=2\lim_{n\to\infty}\sin 1\cdot\cos(n+1)=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\cos(n+1)=\lim_{n\to\infty}\cos n=0.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sin 2n=2\lim_{n\to\infty}(\sin n\cdot\cos n)=0,$$

即 $a=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0$, 但是 $1=\lim\limits_{n\to\infty}(\cos^2 n+\sin^2 n)=0$, 矛盾. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

**类题**　设 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$,证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$　　(上海大学).

**提示**　$\{x_n\}$ 显然单调递增,只需证明 $\{x_n\}$ 没有上界即可. $\forall n\in\mathbf{N}_+$,有

$$x_{2n}-x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\geqslant\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

由此,用数学归纳法可证: $x_{2^k}\geqslant 1+\dfrac{k}{2}\quad(k=0,1,2,\cdots)$, 因此 $\{x_n\}$ 没有上界.

**例 1.3**　设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$(四川大学).

**证明**　当 $n>N_0\geqslant 2$ 时,有

$$\begin{aligned}x_n-x_{n-1}=&[(x_n-x_{n-2})+(x_{n-2}-x_{n-4})+\cdots+x_{N_0-2}\text{ 或 }x_{N_0-1}]-\\&[(x_{n-1}-x_{n-3})+(x_{n-3}-x_{n-5})+\cdots+x_{N_0-2}\text{ 或 }x_{N_0-1}],\end{aligned}$$

共有 $n-N_0+1$ 项 $(x_k-x_{k-2})$ 及 $\pm(x_{N_0-1}-x_{N_0-2})$.

由题设, $\forall\varepsilon>0,\exists N_0>0$, 当 $n\geqslant N_0$ 时,有 $|x_n-x_{n-2}|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,于是有

$$\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{n}\right|<\frac{n-N_0+1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\frac{|x_{N_0-1}|+|x_{N_0-2}|}{n},$$

取 $n$ 适当大,可使 $\dfrac{|x_{N_0-1}|+|x_{N_0-2}|}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 从而,当 $n$ 适当大时,就有 $\left|\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}\right|<\varepsilon$.

## 二、用单调有界定理证明极限的存在性

**例 1.4**　证明数列 $a_1=\sqrt{c}>0,a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$ 的极限存在,并求其值.

**证明**　显然 $\{a_n\}\uparrow$,下证 $\{a_n\}$ 有上界.

$$a_1 = \sqrt{c} < \sqrt{c} + 1,$$

设 $a_n < \sqrt{c} + 1$,则

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c} + 1,$$

即 $\{a_n\}$ 有上界 $\sqrt{c} + 1$.

由单调有界定理, $\{a_n\}$ 的极限存在,设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 在 $a_{n+1}^2 = c + a_n$ 中,令 $n \to \infty$ 得 $a^2 = c + a$, 解之,得

$$a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c}).$$

**类题** 设 $\Phi_n$ 满足:$\Phi_n^3 + 2\Phi_n + \frac{1}{n} = 0(n = 1,2,\cdots)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n$(解放军信息工程大学).

**提示** 由已知条件,有 $\Phi_n(\Phi_n^2 + 2) = -\frac{1}{n}, n = 1,2,\cdots$. 由此可知,$\Phi_n < 0$,即$\{\Phi_n\}$有上界.

再由已知条件,可得

$$(\Phi_{n+1} - \Phi_n)(\Phi_{n+1}^2 + \Phi_n\Phi_{n+1} + \Phi_n^2 + 2) = \frac{1}{n(n+1)}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

由此可知,$\{\Phi_n\}$单调递增,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n$ 存在,记为 $\varphi$,在所给的等式两边取极限可得:$\varphi^3 + 2\varphi = 0$. 由$\{\Phi_n\}$的递增性知 $\varphi = 0$.

**例 1.5** 若$\{a_n\}\uparrow$,$\{b_n\}\downarrow$,且$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$都存在,并且相等(南京航空航天大学).

**证明** 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ 知,$\exists N_0 > 0$,当 $n \geqslant N_0$ 时,有

$$-1 < a_n - b_n < 1.$$

由此知,$a_n < b_n + 1 \leqslant b_{n-1} + 1 \leqslant \cdots \leqslant b_{N_0} + 1$,即$\{a_n\}$有上界;

$b_n > a_n - 1 \geqslant a_{n-1} - 1 \geqslant \cdots \geqslant a_{N_0} - 1$,即$\{b_n\}$有下界.

由单调有界定理,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 都存在. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ 可得:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}b_n$,即两者极限相等.

**例 1.6** 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$均为正整数数列,$a_1 = b_1 = 1$,$a_n + \sqrt{3}b_n = (a_{n-1} + \sqrt{3}b_{n-1})^2$. 证明:数列$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$的极限存在,并求该极限值(南开大学).

**解** 当 $n \geqslant 2$ 时,由$\{a_n\}$,$\{b_n\}$均为正整数数列,利用已知的递推关系式可得

$$a_n = a_{n-1}^2 + 3b_{n-1}^2, \quad b_n = 2a_{n-1}b_{n-1},$$

进而有

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1}}{2b_{n-1}} + \frac{3b_{n-1}}{2a_{n-1}}, \quad n = 2,3,\cdots.$$

记 $\alpha_n = \frac{a_n}{b_n}$,则上式可化为 $\alpha_n = \frac{\alpha_{n-1}}{2} + \frac{3}{2\alpha_{n-1}}$. 由此易得 $\alpha_n \geqslant 2\sqrt{\frac{\alpha_{n-1}}{2} \cdot \frac{3}{2\alpha_{n-1}}} = \sqrt{3}$,这表明数列$\{\alpha_n\}$有下界.

另一方面,$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\alpha_{n-1}^2} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$,即 $\alpha_n \leqslant \alpha_{n-1}$,这表明数列$\{\alpha_n\}$单调递减. 由单调

有界定理, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ 存在,记为 $\alpha$. 在 $\alpha_n=\dfrac{\alpha_{n-1}}{2}+\dfrac{3}{2\alpha_{n-1}}$ 两边取极限,可得 $\alpha=\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{3}{2\alpha}$. 解之得 $\alpha=\sqrt{3}$.

**例 1.7** 设 $x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}(n=1,2,\cdots)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求其极限.

**证法 1** 假设 $\{x_n\}$ 的极限存在,并设为 $A$,则 $A=\dfrac{1}{2+A}$, 即 $A^2+2A-1=0, A=-1\pm\sqrt{2}$. 因为 $x_n>0$,故 $A=\sqrt{2}-1$.

若 $x_n<A$,则 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}>\dfrac{1}{2+A}=A$;

若 $x_n>A$,则 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}<\dfrac{1}{2+A}=A$.

由 $x_1=\sqrt{2}>A$ 知, $x_{2n+1}>A$,而 $x_{2n}<A$.

下面将证明: $\{x_{2n+1}\}\downarrow A, \{x_{2n}\}\uparrow A$. 事实上,

$$x_{n+2}-x_n=\frac{1}{2+x_{n+1}}-x_n=\frac{1}{2+\dfrac{1}{2+x_n}}-x_n$$

$$=\frac{2(1-2x_n-x_n^2)}{5+2x_n},$$

而 $1-2x-x^2=0$ 的根为 $x=-1\pm\sqrt{2}$, 故

$$x_{n+2}-x_n=\frac{2(1+\sqrt{2}+x_n)\cdot(\sqrt{2}-1-x_n)}{5+2x_n}\begin{cases}>0, & 若\ x_n<A,\\ <0, & 若\ x_n>A.\end{cases}$$

即 $\{x_{2n}\}\uparrow$ 以 $A$ 为上界, $\{x_{2n+1}\}\downarrow$ 以 $A$ 为下界,故它们的极限都存在,分别设为 $\alpha,\beta$. 由

$$x_{2n}=\frac{1}{2+x_{2n-1}}\ 及\ x_{2n+1}=\frac{1}{2+x_{2n}},$$

取极限可得

$$\alpha=\frac{1}{2+\beta}\qquad 及\ \beta=\frac{1}{2+\alpha},$$

故 $\alpha=\beta=A=\sqrt{2}-1$.

**类题** 设 $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$, 数列 $\{x_n\}$ 由如下递推公式定义: $x_0=1, x_{n+1}=f(x_n)(n=0,1,2,\cdots)$,求证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$ (浙江大学).

**注 1.2** 下面介绍一个有用的命题. 设数列 $\{x_n\}$ 满足压缩性条件:

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant k|x_n-x_{n-1}|(0<k<1;\quad n=2,3,\cdots),$$

则 $\{x_n\}$ 收敛.

这个命题的证明,用柯西收敛准则不难得到.

**证法 2** 注意到 $x_n>0$ ,我们有

$$|x_{n+1}-x_n|=\frac{|x_n-x_{n-1}|}{(2+x_n)(2+x_{n-1})}<\frac{1}{4}|x_n-x_{n-1}|.$$

由命题知, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 在已知的等式 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}$ 两边取极限, 舍去负值, 可得

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \sqrt{2}-1.$

**例 1.8** 设 $c>0, x_1=a>0, x_{n+1}=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

**证明** 由

$$x_{n+1}-x_n=\frac{c(c-1)(x_n-x_{n-1})}{(c+x_{n-1})(c+x_n)}=\frac{c(c-1)(x_n-x_{n-1})}{c(c+x_{n-1})+x_n(c+x_{n-1})},$$

利用已知的关系式 $x_n(c+x_{n-1})=c(1+x_{n-1})$ 可得

$$x_{n+1}-x_n=\frac{c(c-1)(x_n-x_{n-1})}{c(c+x_{n-1})+c(1+x_{n-1})}=\frac{(c-1)(x_n-x_{n-1})}{(c+x_{n-1})+(1+x_{n-1})}.$$

注意到 $x_n\geqslant 0$，由上式得

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant\frac{|1-c|}{1+c}|x_n-x_{n-1}|,\quad n\geqslant 2.$$

易见，$\dfrac{|1-c|}{1+c}<1$，由命题知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 在已知的关系式两边取极限可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

**简单推论** 设 $c>0, x_1=a>0, x_{n+1}=\dfrac{c+x_n}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

**证明** 令 $y_n=\dfrac{1}{x_n}$，则有

$$y_{n+1}=\frac{c^{-1}(1+y_n)}{c^{-1}+y_n},\quad n=1,2,\cdots.$$

由例 1.8 知，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\dfrac{1}{\sqrt{c}}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

**类题 1** 设 $x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ （$x_1>0$ 为已知），求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$（南京大学）.

**类题 2** 设 $a_1=0, a_n=\dfrac{a_{n-1}+3}{4}$ （$n\geqslant 2$），求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$（南京大学）.

**类题 3** （斐波那契(Fibonacci)数列）设 $a_0=a_1>0, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n=0,1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

**提示** 令 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，则有

$$b_0=1, b_n=1+\frac{1}{b_{n-1}}(n=1,2,\cdots),$$

由 $|b_{n+1}-b_n|=\dfrac{|b_n-b_{n-1}|}{b_nb_{n-1}}$，利用 $b_nb_{n-1}=b_{n-1}+1$ 可得

$$|b_{n+1}-b_n|=\frac{|b_n-b_{n-1}|}{b_{n-1}+1}.$$

又由 $b_n>1$ 可得

$$|b_{n+1}-b_n|<\frac{1}{2}|b_n-b_{n-1}|,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在.

**类题 4** 设 $x_0 = \sqrt{7}, x_1 = \sqrt{7-\sqrt{7}}$, 定义:

$$x_{n+2} = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x_n}}, n = 0,1,\cdots.$$

证明:数列 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

**提示** 设 $f(x) = \sqrt{7-\sqrt{7+x}}$,由拉格朗日中值定理,有

$$f(x) - 2 = f(x) - f(2) = f'(\xi)(x-2),$$

其中 $\xi$ 在 $x$ 与 2 之间.

由于 $0 < x_n \leqslant \sqrt{7}$,所以可限制 $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{7}$,此时 $\xi \in [0,\sqrt{7}]$. 于是,有

$$|f'(\xi)| = \left|\frac{-1}{4\sqrt{7-\sqrt{7+\xi}}\sqrt{7+\xi}}\right| \leqslant \frac{1}{4\sqrt{7}\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}} \triangleq \alpha < 1,$$

和
$$|x_{n+2} - 2| = |f(x_n) - 2| \leqslant \alpha |x_n - 2|,$$

故
$$|x_{2k} - 2| \leqslant \alpha^k |x_0 - 2|, |x_{2k+1} - 2| \leqslant \alpha^k |x_1 - 2| (k = 1,2,\cdots).$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

下面看一个与欧拉常数有关的数列.

**例 1.9** 设 $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$, 证明数列 $\{b_n\}$ 收敛(北师大).

**证明** 因为

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (\text{请同学们自证}),$$

所以
$$\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}.$$

于是 $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n} < 0$, 即 $\{b_n\}$ 单调递减.

又
$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \\ &> \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} - \ln n \\ &= \ln(n+1) - \ln n > 0, \text{即}\{b_n\}\text{有下界 } 0. \end{aligned}$$

由单调有界定理, $\{b_n\}$ 的极限存在,记为 $C$(通常称为欧拉常数).

**类题 1** 设 $s_1 = \ln a, a > 0, s_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \ln(a - s_k), n = 2,3,\cdots$.

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a - 1$.

**提示** 利用不等式 $\ln x \leqslant x - 1 \quad (x > 0)$, 证明 $\ln(a - s_k)$ 有意义.

当 $k = 1$ 时, $a - s_1 = a - \ln a > 0$.

设 $k \leqslant n$ 时,有 $a - s_k > 0$ 即 $\ln(a - s_k)$ 有意义,于是,

$$s_{n+1} - s_n = \ln(a - s_n) \leqslant a - s_n - 1,$$

所以 $s_{n+1} \leqslant a - 1$, 即 $\ln(a - s_{n+1})$ 有意义且 $\{s_n\}$ 有上界.

由 $s_{n+1} - s_n = \ln(a - s_n) \geqslant \ln(a - (a-1)) = 0$ 可知, $\{s_n\}\uparrow$. 由单调有界定理, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存

在. 易见 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n = a-1$.

**类题2** 设 $x_n = 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}, n=1,2,\cdots$. 证明: $\{x_n\}$ 收敛.

**提示** 由
$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\&=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\&<\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{2\sqrt{n+1}}=0,\end{aligned}$$
知 $\{x_n\}\downarrow$.

又由 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 可得
$$\begin{aligned}x_n &> 2[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]-2\sqrt{n}\\&=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-2>-2,\end{aligned}$$
这表明 $\{x_n\}$ 有下界.

## 三、用迫敛性定理求极限

**例1.10** 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

**证明**
$$\begin{aligned}n! &= 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)\cdot\cdots\cdot n\\&\geqslant\begin{cases}\left(\dfrac{n}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}=\left(\dfrac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n\text{ 为偶数},\\ \left(\dfrac{n}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\geqslant\left(\dfrac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n\text{ 为奇数},\end{cases}\end{aligned}$$
故
$$0\leqslant\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\leqslant\sqrt{\frac{2}{n}}\to 0\quad(n\to\infty).$$

**例1.11** 设 $a_n=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}$, (1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$; (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

**解** (1) 由于 $a_n=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n}{2n+1}$, 所以
$$0\leqslant a_n^2<\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2n+1},$$
故
$$0\leqslant a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to 0\quad(n\to\infty);$$

(2) 一方面, 由 $a_n=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n-2}\cdot\dfrac{1}{2n}>\dfrac{1}{2n}$, 可得 $\sqrt[n]{a_n}>\dfrac{1}{\sqrt[n]{2n}}$;

另一方面,由式(1)可知,$\sqrt[n]{a_n}<\frac{1}{\sqrt[2n]{2n+1}}$. 联合以上两式,有$\frac{1}{\sqrt[n]{2n}}<\sqrt[n]{a_n}<\frac{1}{\sqrt[2n]{2n+1}}$. 由迫敛性定理,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

**例 1.12**　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$(数学Ⅲ).

**解**　记 $G=\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$, 则

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<G<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

即

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}<G<\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}.$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}G=\frac{1}{2}.$$

**类题 1**　求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5}{e^n}$;　　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha],(0<\alpha<1)$.

**提示**　(1)$0<\frac{n^5}{e^n}<\frac{n^5}{2^n}=\frac{n^5}{(1+1)^n}$

$$=\frac{n^5}{1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^6+\cdots+C_n^n}<\frac{n^5}{C_n^6}\to 0;$$

(2)因为 $n!<\sum\limits_{p=1}^{n}p!<(n-2)\cdot(n-2)!+(n-1)!+n!<2\cdot(n-1)!+n!$,

所以

$$1<\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}<\frac{2}{n}+1;$$

(3)因为 $\alpha-1<0$, 所以 $(1+n)^{\alpha-1}<n^{\alpha-1}$, 故 $(1+n)^\alpha<n^{\alpha-1}(1+n)=n^\alpha+n^{\alpha-1}$,即 $0<(1+n)^\alpha-n^\alpha<n^{\alpha-1}\to 0$.

**类题 2**　(1)若 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为 $m$ 个正数,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\};$$

(2)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n},(x\geqslant 0)$.

**提示**　(1)记 $G=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$, 则

$$G\leqslant\sqrt{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{mG^n}=\sqrt[n]{m}G,$$

由迫敛性定理可得结论;

(2)由(1),原极限 $=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ \max\left\{x,\frac{x^2}{2}\right\}, & x\geqslant 1\end{cases}$

$$= \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < 1, \\ x, & 1 \leqslant x < 2, \\ \dfrac{x^2}{2}, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

**类题 3** 已知 $f(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - a_i), a_i > 0$,且

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n + \cdots,$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_n}{C_{n-1}}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_n}$(中科院大学).

**提示** 由于

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i - x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i^{n+1}}\right)x^n,$$

所以 $C_n = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i^{n+1}$,其中 $b_i = \dfrac{1}{a_i}$. 记 $b = \max\{b_i\}$,则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{C_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} b_i^{n+1}}{\sum\limits_{i=1}^{k} b_i^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{b\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\dfrac{b_i}{b}\right)^{n+1}}{\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\dfrac{b_i}{b}\right)^{n}} = b = \min\{a_i\}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{k} b_i^{n+1}} = \max\{b_i\} = \min\{a_i\}.$$

**例 1.13** 设 $a_1 > b_1 > 0$, 且 $a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_n = \dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}$ $(n = 2,3,\cdots)$. 证明数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的极限存在且都等于 $\sqrt{a_1 b_1}$(北师大).

**证明** 显然, $a_n, b_n > 0$ 且

$$a_n \geqslant \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \geqslant b_n \quad (n = 1,2,\cdots).$$

由 $a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \leqslant \dfrac{a_{n-1} + a_{n-1}}{2} = a_{n-1}$ 知, $\{a_n\}\downarrow$; 由 $b_n = \dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} \geqslant \dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{2a_{n-1}} = b_{n-1}$ 知, $\{b_n\}\uparrow$.

又由 $a_n \geqslant b_n \geqslant b_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant b_1$ 知, $\{a_n\}$ 有下界,

$b_n \leqslant a_n \leqslant a_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant a_1$ 知, $\{b_n\}$ 有上界.

由单调有界定理, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ 都存在. 在 $a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ 两边取极限可得, $a = b$.

再由 $a_n b_n = a_{n-1}b_{n-1}$ 可推知 $a_n b_n = a_1 b_1$, 取极限可得 $a = b = \sqrt{a_1 b_1}$.

## 四、用柯西收敛准则证明极限的存在性

**例 1.14** 方程 $x = m + \varepsilon\sin x$ $(0 < \varepsilon < 1)$ 称为开普勒方程. 若 $x_0 = m, x_1 = m + \varepsilon\sin x_0$,