GONGKE SHUXUE FENXI LIANXI YU TIGAO

# 工科数学分析练习与提高（一）

毛明志　胡　鹏
刘汉兵　李超群　主编

CUGP 中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

# 工科数学分析练习与提高

GONGKE SHUXUE FENXI LIANXI YU TIGAO

（一）

毛明志　胡　鹏　刘汉兵　李超群　主编

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

**图书在版编目(CIP)数据**

工科数学分析练习与提高.一、二/毛明志等主编.—武汉:中国地质大学出版社,2018.7
ISBN 978-7-5625-4371-8

Ⅰ.①工…
Ⅱ.①毛…
Ⅲ.①数学分析-高等学校-习题集
Ⅳ.①O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第166297号

**工科数学分析练习与提高(一)(二)**　　毛明志　胡　鹏　刘汉兵　李超群　**主编**

责任编辑:谌福兴　郑济飞　　责任校对:张咏梅

出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路388号)　　邮政编码:430074
电　话:(027)67883511　　传真:(027)67883580　　E-mail:cbb@cug.edu.cn
经　销:全国新华书店　　http://cugp.cug.edu.cn

开本:787毫米×1 092毫米 1/16　　字数:260千字　　印张:10
版次:2018年7月第1版　　印次:2018年7月第1次印刷
印刷:武汉市籍缘印刷厂　　印数:1—4000册

ISBN 978-7-5625-4371-8　　定价:30.00元(全2册)

# 目　录

# 第一章　函数、极限、连续性

## 第一节　集合与实数系

理解集合的基本概念和集合的运算，熟悉区间与邻域的概念及表示方法，熟悉常用的逻辑符号，理解数集上确界和下确界的概念.

### 知识要点

1. 区间与邻域的概念及表示方法；

2. 常用逻辑符号的含义及表示方法；

3. 数集的确界定义与确界存在定理.

### 典型例题

**例**　举例：(1)有上确界无下确界的数集；(2)含有上确界但不含有下确界的数集；(3)既含有上确界又含有下确界的数集.

**分析**　要熟悉确界的定义，分清数集有确界和含有确界两个概念的区别.

**解**　(1)集合 $A=\{0,-1,-2,\cdots,-n,\cdots\}$，这个集合有上确界 0，无下确界.

(2)集合 $B=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$，这个集合有上确界 1，且 1 包含在集合 $B$ 中；有下确界 0，但 0 不包含在集合 $B$ 中.

(3)集合 $C=\{1,2,3,4\}$，这个集合有上确界 4，下确界 1，1 和 4 都包含在集合 $C$ 中.

**A 类题**

1. 上确界和下确界是怎样定义的？它们的等价说法分别是什么？

2. 选择题

(1)已知$\{1,2\}\subset M\subset\{1,2,3,4,5\}$,那么这样的集合 $M$ 有(　　).

(A) 6 个　　(B) 7 个　　(C) 8 个　　(D) 9 个

(2)若集合 $A=\{x\mid f(x)=0\}$,$B=\{x\mid g(x)=0\}$,$C=\{x\mid \varphi(x)=0\}$,则方程组 $\begin{cases} f(x)g(x)=0 \\ \varphi(x)=0 \end{cases}$ 的解集是(　　).

(A) $A\cap B\cap C$　　(B) $(A\cup B)\cap C$

(C) $(A\cap B)\cup C$　　(D) $A\cup B\cup C$

3. (1)用集合表示邻域 $O_{\circ}(1,2)$ 和区间$[2,+\infty)$;

(2)用邻域表示区间$(-2,4)$和集合$\{x\mid 0<|x-0.2|<0.05\}$.

4. 设 $A=\{1,2\}$,$B=\{a,b,c\}$,$C=\varnothing$,求 $A\times B$,$B\times C$.

5. 求下列数集的上确界和下确界:

(1)$A=\{0,1,2,3,4,5\}$;　　(2)$B=\{x\mid x^2<4\}$.

## B 类题

1. 设 $A=\{x,xy,\lg xy\}$,$B=\{0,|x|,y\}$,且 $A=B$. 求 $x,y$ 的值.

2. 求数集 $A=\{x \mid |x+1|+|x-1|<6\}$ 的上确界和下确界.

## C类题

设 $A$ 是非空有界数集,证明:

(1)$\alpha=\inf A$ 的充分必要条件是:$\alpha$ 为 $A$ 的下界,且 $\forall \varepsilon>0$,$\exists x_0 \in A$,使得 $x_0<\alpha+\varepsilon$;

(2)若 $A$ 包含了它的一个上界 $\beta$,则 $\beta=\sup A$.

# 第二节　映射与函数

理解映射与函数的概念,掌握函数的各种性态.

### 知识要点

1. 映射、函数、初等函数、反函数、复合函数、分段函数等概念;

2. 基本初等函数的性质:单调性、奇偶性、周期性和有界性.

### 典型例题

**例 1**　问 $y=\sin\sqrt{1-u^2}$, $u=e^x+e^{-x}$ 能否构成复合函数?

**分析**　$y=f(u)$, $u=g(x)$ 构成复合函数的条件是函数 $g$ 的值域必须包含于函数 $f$ 的定义域.

**解**　因 $u=e^x+e^{-x}>1$,而 $y=\sin\sqrt{1-u^2}$ 的定义域为 $|u|\leqslant 1$,所以不能构成复合函数.

**例 2** 函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上是否有界？

**分析** 证明 $y=f(x)$，$x\in D$ 有界，则要证明 $\exists M>0$，使得 $\forall x\in D$，$|f(x)|\leqslant M$. 要证明无界，则要证明 $\forall M>0$，$\exists x_0\in D$，使得 $|f(x_0)|>M$.

**解** $\forall M>0$，取 $k=[M]+1$，$x_0=\dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\in(0,1)$，

则 $|y(x_0)|=\left|\frac{1}{x_0}\sin\frac{1}{x_0}\right|=2k\pi+\frac{\pi}{2}>M$，所以函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上无界.

## A 类题

1. 判断正误

(1) 设 $f(x)=\frac{1}{x}$，则 $f(f(x))=x$. ( )

(2) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 是定义域上的有界函数. ( )

(3) 对任何函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$，必有复合函数 $f\circ g(x)=f[g(x)]$. ( )

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}+\arccos 2^{-x}$；

(2) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<0,\\ \dfrac{1}{x}, & 0<x<1,\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

3. 若 $f(x)=\begin{cases}4x+1, & x\geqslant 0,\\ x^2+2, & x<0,\end{cases}$ 试求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(x+1)$.

4.求下列函数的表达式：

(1) 设 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$，$f(\sin x)$；

(2) 已知函数 $f(x)=e^x$，$f(g(x))=1-x$，且 $g(x)\geqslant 0$，求 $g(x)$；

(3) 设 $f(x)=\frac{x}{1-x}$，求 $f\circ f(x)$ 和 $\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f(x)}_{n个f}$.

5.设 $\varphi(x)$ 是以 $T$ 为周期的函数，$\lambda$ 是任意正实数，证明函数 $\varphi(\lambda x+k)$ 是以 $\frac{T}{\lambda}$ 为周期的函数(其中 $k$ 是任意常数).

6.某市某种出租车票价规定如下：起价 8.90 元，行驶 8 千米时开始按里程计费，不足 16 千米时，每千米收费 1.20 元；超过 16 千米时，每千米收费 1.80 元. 试将票价(元)表示成路程(km)的函数，并作图.

### B 类题

1. 证明函数 $f(x)=\sin\sqrt{x}$ 不是周期函数.

2. 证明函数 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界函数.

3. 证明函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

## 第三节　数列的极限

了解数列极限的定义,掌握数列极限的四则运算和收敛数列的性质.

### 知识要点

1. 数列极限的定义;

2. 收敛数列的性质.

### 典型例题

**例 1**　证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=B$,$A>B$,则存在正整数 $N$,当 $n>N$ 时,不等式 $u_n>v_n$ 恒成立.

**分析**　利用数列极限的保号性.

**证明**　$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n)=A-B>0$. 因数列 $\{u_n-v_n\}$ 的极限大于 0,由数列极限的保号性,则存在正整数 $N$. 当 $n>N$ 时, $u_n-v_n>0$,即 $u_n>v_n$.

**例 2**　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{2}{2^n}+\cdots+\frac{n}{2^n})$.

**分析**　利用二项式定理进行缩放，再利用数列极限的四则运算.

**解**　$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{2}{2^n}+\cdots+\frac{n}{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\cdot 2^n}$，

又　$2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n>C_n^3,\frac{2^n}{C_n^3}>1$，令$\frac{2^n}{C_n^3}=A_n>1$，

则原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\cdot A_nC_n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{A_n(n-1)(n-2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(1+\frac{1}{n})}{A_n(1-\frac{1}{n})(n-2)}=0$.

## A 类题

1. 判断正误

(1)若数列$\{x_n\}$的子列$\{x_{2n}\}$，$\{x_{2n+1}\}$都收敛，则$\{x_n\}$收敛；　(　　)

(2)若数列$\{x_n\}$的任一个子列均存在收敛的子列，则$\{x_n\}$必收敛；　(　　)

(3)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则两个数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$中至少有一个收敛到 0.　(　　)

2. 数列$\{x_n\}$有界是数列$\{x_n\}$收敛的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_条件；数列$\{x_n\}$收敛是数列$\{x_n\}$有界的__________条件.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$.

## B类题

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{4^n}}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}(a\geqslant 0)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

2. 证明：数列 $\{x_n\}$ 以 0 为极限，其充分必要条件为子数列 $\{x_{2k}\}$ 和 $\{x_{2k-1}\}$ 均以 0 为极限.

## 第四节　收敛数列的判别定理

掌握极限存在的两边夹准则和单调有界准则，了解区间套定理、致密性定理和 Cauchy 收敛准则.

## 知识要点

数列收敛的各种判别准则：两边夹准则；单调有界准则；Cauchy 收敛准则.

## 典型例题

**例 1**　设 $a_i \geqslant 0 (i=1,2,\cdots)$，证明下列数列有极限：

$$x_n = \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} \quad (n=1,2,\cdots).$$

**分析**　显然数列单调增加，利用拆项相消，证明数列有上界.

**证明**　显然 $x_n \leqslant x_{n+1}$，即 $\{x_n\}$ 单调增加，又

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+a_k)-1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} \\ &= 1 - \frac{1}{1+a_1} + \sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{k-1})} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)}\right] \\ &= 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} < 1 \end{aligned}$$

数列 $\{x_n\}$ 单调增加，且有上界，因此极限存在.

**例 2**　证明：若对于充分大的 $n$，有 $|x_n - a| \leqslant \rho |x_{n-1} - a|$，$0<\rho<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

**分析**　利用题设递推，可用两边夹准则.

**证明**　由题设，存在正整数 $N$，当 $n>N$ 时，有

$$0 \leqslant |x_n - a| \leqslant \rho |x_{n-1} - a| \leqslant \rho^2 |x_{n-2} - a| \leqslant \cdots \leqslant \rho^{n-N} |x_N - a|,$$

又　　$0 < \rho < 1$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} \rho^{n-N} |x_N - a| = 0$，

由两边夹准则，知 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

### A 类题

1. 数列单调有界是数列具有极限的(　　).

(A)必要条件　　(B) 充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分也非必要条件

2. 利用两边夹准则求极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(3^n+5^n+7^n)^{1/n}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

3. 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n$.

4. 利用单调有界准则证明下列数列的极限存在，并求其值：

(1) $x_0=1, x_{n+1}=\sqrt{2x_n}\quad(n=1,2,\cdots)$；

(2) $x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)\quad(a>0, n=1,2,\cdots)$；

(3) $x_1>3, x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}\quad(n=1,2,\cdots)$.

## B类题

1.求下列数列的极限：

(1) $x_n = \frac{1}{2^n} + \frac{2}{2^n} + \cdots \frac{n}{2^n} \quad (n = 1,2,\cdots)$；

(2) $x_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \quad (n = 1,2,\cdots)$；

(3) $x_n = \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n} \quad (n = 1,2,\cdots)$；

(4) $x_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \quad (n = 1,2,\cdots)$，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为非负数.

2.证明下列数列的极限存在，并求其值：

(1) $a > 0, 0 < x_1 < \frac{1}{a}, x_{n+1} = x_n(2 - ax_n) \quad (n = 1,2,\cdots)$；

(2) $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1+2x_n}{1+x_n} \quad (n = 1,2,\cdots)$.

## C类题

设数列$\{x_n\}$满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n \quad (n=1,2,\cdots)$，证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其值.

# 第五节　函数的极限

理解函数极限的概念，掌握函数极限的运算和性质.

### 知识要点

1. 自变量趋于无穷大时函数极限的定义；
2. 自变量趋于有限值时函数极限的定义；
3. 函数极限的四则运算，复合函数的极限运算；
4. 函数极限的性质.

### 典型例题

**例 1**　求下述函数的极限：(1) $\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}$.

**分析**　作变量代换，实质为复合函数的极限运算.

**解**　(1)令 $t=\dfrac{1}{x}$，$x\to 0^-$ 时，$t\to-\infty$，则原式 $=\lim\limits_{t\to-\infty}\arctan t=-\dfrac{\pi}{2}$；

(2) 令 $t=\dfrac{1}{x}$，$x\to 0^+$ 时，$t\to+\infty$，则原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty}\arctan t=\dfrac{\pi}{2}$.

**例 2**　若 $\varphi(x)\leqslant\psi(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=b$，证明 $a\leqslant b$.

**分析**　利用收敛数列的保号性.

**证明**　反证法. 假设 $a>b$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}(\varphi(x)-\psi(x))=a-b>0$. 由函数极限的局部保号性，则在 $x_0$ 的某一去心邻域内，必有 $\varphi(x)-\psi(x)>0$，与题设 $\varphi(x)\leqslant\psi(x)$ 矛盾.

## A 类题

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+25}-5}{4x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x+4}{16x^3-2x^2+9}$； (4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；

(5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{5}}$； (6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

2. 求下列函数在 $x=0$ 处的左、右极限，并说明它们在 $x\to 0$ 时极限是否存在.

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{1/x}$；

(2) $f[g(x)]=\operatorname{sing}(x),g(x)=\begin{cases}x-\dfrac{\pi}{2}, & x\leqslant 0,\\ x+\dfrac{\pi}{2}, & x>0.\end{cases}$