

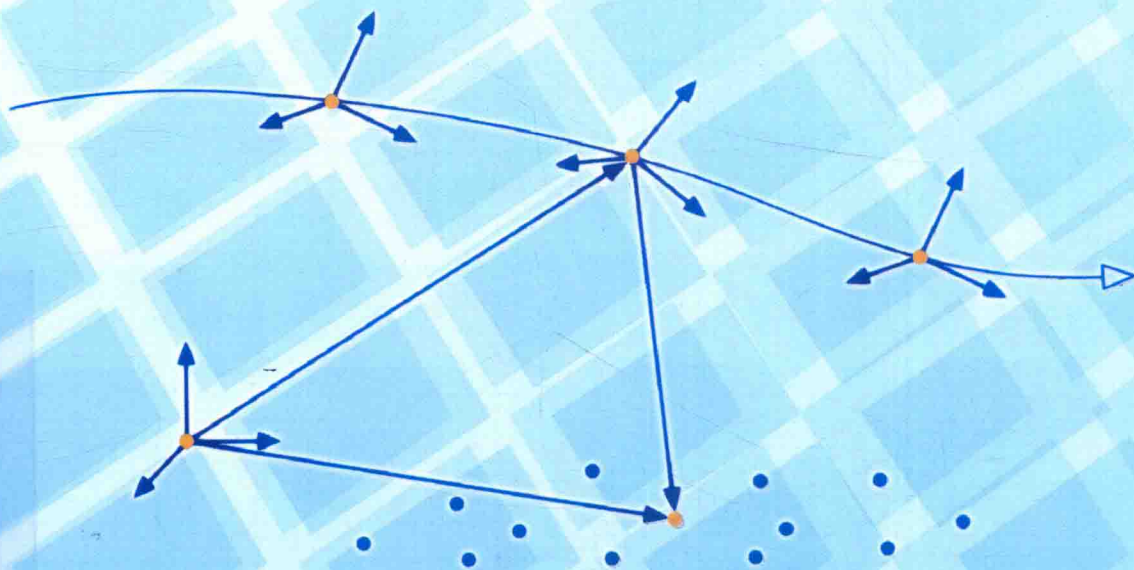
人工智能与机器人系列

# 机器人学中的状态估计

State Estimation for Robotics

(加) 蒂莫西·D. 巴富特 著  
Timothy D. Barfoot

高翔 谢晓佳 等译



CAMBRIDGE

西安交通大学出版社  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

非外借

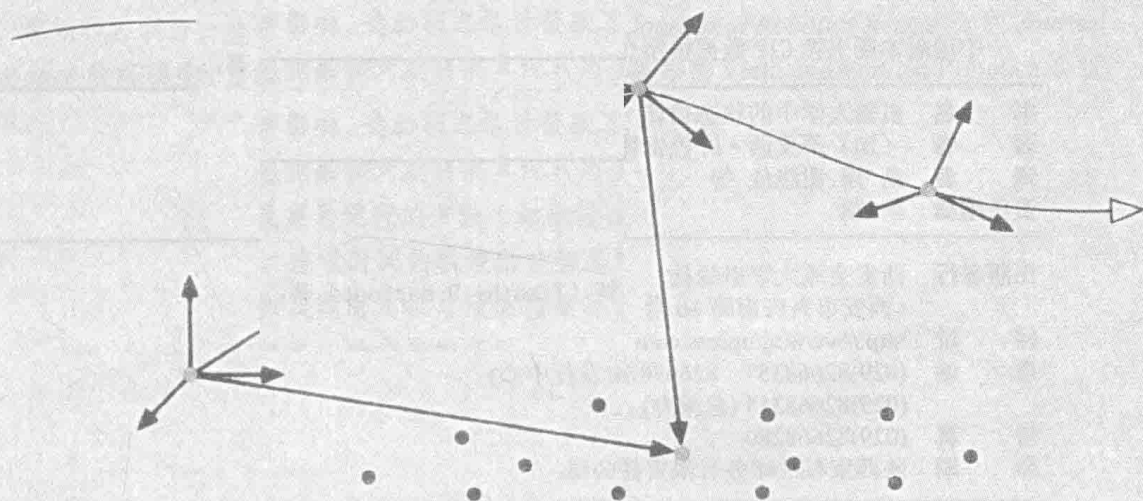
人工智能与机器人系列

# 机器人学中的状态估计

State Estimation for Robotics

(加) 蒂莫西·D. 巴富特 著  
Timothy D. Barfoot

高翔 谢晓佳 等译



CAMBRIDGE



西安交通大学出版社  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

This is a Simplified Chinese translation of the following title published by Cambridge University Press:  
State Estimation for Robotics, ISBN 9781107159396

©Timothy D. Barfoot 2017

This Simplified Chinese translation for the People's Republic of China (excluding Hong Kong, Macau and Taiwan) is published by arrangement with the Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom.

© Cambridge University Press and Xi'an Jiaotong University Press 2018

This Simplified Chinese translation is authorized for sale in the People's Republic of China (excluding Hong Kong, Macau and Taiwan) only. Unauthorised export of this Simplified Chinese translation is a violation of the Copyright Act. No part of this publication may be reproduced or distributed by any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of Cambridge University Press and Xi'an Jiaotong University Press.

Copies of this book sold without a Cambridge University Press sticker on the cover are unauthorized and illegal.

陕西省版权局著作权合同登记号: 25-2018-021

## 图书在版编目 (CIP) 数据

机器人学中的状态估计 / (加) 蒂莫西·D. 巴富特 (Timothy D. Barfoot) 著;  
高翔等译. —西安: 西安交通大学出版社, 2018.9

书名原文: State Estimation for Robotics  
ISBN 978-7-5693-0791-7

I. ①机… II. ①蒂… ②高… III. ①机器人—运动  
控制—研究 IV. ①TP242

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 176826 号

书 名 机器人学中的状态估计  
著 者 (加) 蒂莫西·D. 巴富特  
译 者 高翔 谢晓佳 等  
责任编辑 李颖

出版发行 西安交通大学出版社  
(西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)

网 址 <http://www.xjtpress.com>  
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)  
(029)82668315(总编办)

传 真 (029)82668280  
印 刷 陕西宝石兰印务有限责任公司

开 本 787 mm×1092 mm 1/16 印张 22.25 字数 560 千字  
版次印次 2018 年 11 月第 1 版 2018 年 11 月第 1 次印刷  
书 号 ISBN 978-7-5693-0791-7  
定 价 92.00 元



读者购书、书店添货如发现印装质量问题, 请与本社发行中心联系、调换。

订购热线: (029) 82665248 (029) 82665249

投稿热线: (029) 82665397

读者信箱: [banquan1809@126.com](mailto:banquan1809@126.com)

版权所有 侵权必究

# 简介

如何估计机器人在空间中移动时的状态（如位置、方向）是机器人研究中一个重要的问题。大多数机器人、自动驾驶汽车都需要导航信息。导航的数据来自于相机、激光测距仪等各种传感器，而它们往往受噪声影响，这给状态估计带来了挑战。本书将介绍常用的传感器模型，以及如何在现实世界中利用传感器数据对旋转或其他状态变量进行估计。本书涵盖了经典的状态估计方法（如卡尔曼滤波）以及更为现代的方法（如批量估计、贝叶斯滤波、sigmapoint 滤波和粒子滤波、剔除外点的鲁棒估计、连续时间的轨迹估计和高斯过程回归）。这些方法在诸如点云对齐、位姿图松弛、光束平差法以及同时定位与地图构建等重要应用中得以验证。对机器人领域的学生和相关从业者来说，本书将是一份宝贵的资料。

Timothy Barfoot 博士（多伦多大学航空航天研究所 UTIAS 教授）在工业和学术界的移动机器人导航中已有逾十五年的研究历史。他的研究领域涉及空间探索、采矿、军事和运输等，并在定位、建图、规划和控制方面作出了贡献。他是 *International Journal of Robotics Research* 和 *Journal of Field Robotics* 的编辑委员会成员，并且在 2015 年多伦多举办的 Field and Service Robotics 会议中担任主席。

## 译者序

Timothy Barfoot 教授的《机器人学中的状态估计》一书，前后花费了两年时间写成。初稿甫成，就将草稿公开于互联网，供世界各地读者阅读、纠错。当时，我们就觉得这本书理论之深刻、叙述之严谨、应用之广泛，实在是一本机器人方向不可多得的好书。倘若中国读者，或为语言之碍，或为地域所隔，无法了解此书的奥秘，实乃遗憾之事。2017 年春，机缘巧合，西安交大出版社获得了本书的中文版权，而我们亦有幸参与此书的翻译工作。希望这本中译本能够让中国的学生、研究人员更好地理解状态估计的内容，将理论知识运用到实践中去。

书籍内容在前文已有简述。在此，我们需要向读者说明中译本中对原书进行斟酌修改的部分内容。

1. 对于外文人名，若此人有经典的中译名，就使用中译名，比如贝叶斯、卡尔曼；如果中译名不明确，或容易与他人混淆，就保留原名，比如 Isserlis, Sherman-Morrison-Woodbury 等。至于是否“经典”，是根据我们自身的经验来判断的。
2. 原书的旁注，由于排版原因，在中译本中都放入正文中。旁注有小图的，亦放入正文，多个小图时合并成一个图。
3. 原书的术语和重点词句（以斜体注明），在本书以黑体注明，重要的用语已加上英文原文，书末附有索引表，方便读者查询。
4. 原书的部分数学公式字体，按照中文图书的标准进行了调整。例如原书使用黑正体表示矩阵和向量，中译本则使用黑斜体；原书矩阵转置使用斜体<sup>T</sup>，中译本使用正体<sup>T</sup>。尽管稍有不同，但我们觉得不影响原意，并且保证整个中译本使用一致的字体设定。唯一的例外是：原书仅在表示时不变（time invariant）的向量和矩阵使用黑斜体变量，而由于中译本统一使用黑斜体，因此时不变的向量与矩阵和普通向量、矩阵相比没有字体上的区别，但这仍然不影响意义的表达。
5. 原书在第 6、7 章大量使用带下箭头的数学符号表示向量，这与标准向量格式有较大差异，但由于不影响理解，我们不作修改。
6. 标点部分亦参考中文习惯作了调整。由于本书不是数学类书，所以使用中文的逗号和句号，而非像数学书籍那样使用半角的句点。
7. 为了符合中文行文习惯，在不影响意思的前提下，我们对部分句子的表达方式作了省略、调整或补充。比如，把“ $x$  服从高斯概率密度分布”简化为“ $x$  是高斯的”，“估计  $y$  的后验概率密度函数”简化为“估计  $y$  的后验”，把“最大化状态的似然函数”简化为“最大化状态的似然”，等等。请读者不要在这些表达方式上产生混淆。
8. 加入了一部分译者的脚注，以便读者理解文中内容。

本书的中译本是许多同学、老师协作的成果。每一章节基本由一到两位同学负责翻译，分工

如下：第 1、2 章由范帝楷、郭玉峰负责；第 3 章由高翔负责；第 4 章由谢晓佳负责；第 5 章由左星星负责；第 6 章由秦超负责；第 7 章由吴博、颜沁睿和张明明负责；第 8 章由郑帆、刘富强负责；第 9 章由张明负责；第 10 章由范帝楷负责。最后由谢晓佳和高翔做了整体的校订工作。审稿期间，浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室计算机视觉组的章国锋教授团队（含学生李津羽、王儒、黄昭阳、杨镑镑、叶智超、唐庆、曹健、钱权浩），湘潭大学的黄山老师，扬州大学的莫小雨同学，UCL 的李天威同学，中国科学院电子所的肖麟慧同学，刘施菲博士，以及许多互联网上的老师、同学均参与了本书的审稿工作，进一步保证了译文的质量。翻译过程中，最大的工作量在于把原书上千条数学公式用  $\text{\LaTeX}$  重新进行输入和整理，在此特别向各位参与翻译和审稿工作的同学致以谢意。

鉴于译者的知识水平所限，译文中疏误之处在所难免，恳请读者不吝指正。“细推物理须行乐，何须浮名绊此身”，我们也希望读者能在阅读过程中，学到知识，产生兴趣。

高翔 (gao.xiang.thu@gmail.com), 谢晓佳 (zerosmemories@gmail.com)

德国慕尼黑

2018 年 8 月



# 序言

我的研究方向是移动机器人学，特别是用于空间探索的那一类机器人。在研究过程中，我对状态估计问题产生了浓厚的兴趣。在这个领域中，有一个广为人知、倍受青睐的研究方向：概率机器人（**probabilistic robotics**）。随着近年来计算资源的日渐廉价，数码相机、激光测距仪等大量新型传感器技术不断涌现，机器人学作为一个前沿研究方向，已经在状态估计领域中催生了大量激动人心的新思想、新动态。

机器人学也是最先将贝叶斯滤波器应用于实际场合的领域。所谓贝叶斯滤波器，事实上是著名的卡尔曼滤波器更为一般的形式。在短短的几年中，移动机器人的研究方法已经从贝叶斯滤波器走向了批量的非线性优化方法，并取得了丰硕的成果。就我而言，我的研究方向主要是室外机器人导航，所以经常会遇到一些三维空间中运动车辆的问题。于是，我们将在本书中，详细地谈论三维空间中的状态估计问题。特别地，对于三维的旋转和姿态，我们将介绍简单实用的矩阵李群方法来处理它们。为了读懂本书，读者需要具备本科生水平的线性代数和微积分知识，不过即使没有，本书也自成一个体系。我希望这部分介绍对读者有所帮助，同时，教学相长，我亦在写作过程中受益匪浅。

我在书页旁边加上了一些有趣的历史小知识。它们大部分是著名研究者的生平介绍，你会看到有许多概念、公式、技术以他们命名。这些资料主要来源于维基百科。另外，第6章第一部分（到“其他旋转表示形式”为止）介绍的三维几何知识，大部分基于多伦多大学航空学院 Chris Damaren 教授的笔记。

本书的问世离不开众多优秀学生的通力协作。Paul Furgales 的博士论文向我展示了如何用矩阵李群方法描述位姿，极大地扩展了我对它们的理解。由于他的工作，我们能够详细介绍变换矩阵以及相关估计问题的有趣细节。Paul 后来的工作让我对连续时间下的状态估计产生了兴趣。Chi Hay Tong 的博士论文向我介绍了将高斯过程应用于估计理论的方法，并推导了许多连续时间情况下的结果。在牛津大学学术休假期间，通过与阿尔托大学的 Simo Särkkä 合作，我进一步学到这方面更多的知识。另外，在与 Sean Anderson, Patrick Carle, Hang Dong, Andrew Lambert, Keith Leung, Colin McManus 和 Braden Stenning 等人的共事过程中，我亦学到许多知识。特别是 Colin，他曾多次鼓励我，建议我将课程笔记写成这本状态估计的书。

感谢 Gabriele D'Eleuterio，他引领我进入动力学中旋转和参考帧问题的研究。他也提供了很多高效的状态估计工具，还教我使用统一的、无歧义的符号系统。

最后，感谢那些在本书草稿期间进行阅读和指出错误的人们，尤其是 Marc Gallant 和 Shu-Hua Tsao，他们指出了很多笔误；James Forbes 志愿阅读了本书，并给出了一些评论。



彼得鲁斯·阿皮亚努斯 (Petrus Apianus, 1495—1552) 的 *Introductio Geographica*。他是德国数学家、天文学家和地图制图师。大部分三维状态估计需要三角测量法 (triangulation) 和/或三边测量法 (trilateration)。我们只需测量一部分角度和长度，就可以通过三角几何学推导出其余的部分



## 缩略语

BA	bundle adjustment	光束平差法
BCH	Baker-Campbell-Hausdorff	贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式
BLUE	best linear unbiased estimate	最优线性无偏估计
CRLB	Cramér-Rao lower bound	克拉美罗下限
DARCES	data-aligned rigidity-constrained exhaustive search	刚体约束下的数据配准穷举搜索
EKF	extended Kalman filter	扩展卡尔曼滤波
GP	Gaussian process	高斯过程
GPS	Global Positioning System	全球定位系统
ICP	iterative closest point	迭代最近点算法
IEKF	iterated extended Kalman filter	迭代扩展卡尔曼滤波
IMU	inertial measurement unit	惯性测量单元
IRLS	iteratively reweighted least squares	迭代重加权最小二乘法
ISPKF	iterated sigmapoint Kalman filter	迭代 sigmapoint 卡尔曼滤波
KF	Kalman filter	卡尔曼滤波
LDU	lower-diagonal-upper	下三角-对角-上三角形式
LG	linear-Gaussian	线性高斯系统
LTI	linear time-invariant	线性时不变系统
LTV	linear time-varying	线性时变系统
MAP	maximum a posteriori	最大后验估计
ML	maximum likelihood	最大似然估计
NASA	National Aeronautics and Space Administration	美国国家航空航天局
NLNG	nonlinear, non-Gaussian	非线性非高斯系统
PDF	probability density function	概率密度函数
RAE	range-azimuth-elevation	距离-方位角-俯仰角
RANSAC	random sample consensus	随机采样一致性
RTS	Rauch-Tung-Striebel	RTS 平滑算法
SDE	stochastic differential equation	随机微分方程
SLAM	simultaneous localization and mapping	同时定位与地图构建
SMW	Sherman-Morrison-Woodbury	SMW 恒等式
SP	sigmapoint	sigma 点
SPKF	sigmapoint Kalman filter	sigmapoint 卡尔曼滤波
STEAM	simultaneous trajectory estimation and mapping	同时轨迹估计与地图构建
SWF	sliding-window filter	滑动窗口滤波
UDL	upper-diagonal-lower	上三角-对角-下三角形式
UKF	unscented Kalman filter (also called SPKF)	无迹卡尔曼滤波

# 符号对照表

## 一般符号

$a$	标量
$\mathbf{a}$	向量
$\mathbf{A}$	矩阵
$p(\mathbf{a})$	$\mathbf{a}$ 的概率密度函数
$p(\mathbf{a} \mathbf{b})$	在条件 $\mathbf{b}$ 下 $\mathbf{a}$ 的概率密度函数
$\mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{B})$	均值为 $\mathbf{a}$ , 协方差为 $\mathbf{B}$ 的高斯概率密度函数
$\mathcal{GP}(\boldsymbol{\mu}(t), \mathcal{K}(t, t'))$	均值函数为 $\boldsymbol{\mu}(t)$ , 协方差函数为 $\mathcal{K}(t, t')$ 的高斯过程
$\mathcal{O}$	能观性矩阵
$(\cdot)_k$	$k$ 时刻的值
$(\cdot)_{k_1:k_2}$	由 $k_1$ 时刻到 $k_2$ 时刻的值的集合
$\mathcal{F}_a$	三维空间中的参考系
$\underline{\mathbf{a}}$	三维空间中的向量
$(\cdot)^\times$	叉积运算符, 可将 $3 \times 1$ 的向量生成反对称矩阵
$\mathbf{1}$	单位矩阵
$\mathbf{0}$	零矩阵
$\mathbb{R}^{M \times N}$	$M \times N$ 的矩阵
$(\hat{\cdot})$	后验
$(\cdot)$	先验

## 矩阵李群符号

$SO(3)$	特殊正交群，表示旋转
$\mathfrak{so}(3)$	$SO(3)$ 对应的李代数
$SE(3)$	特殊欧几里得群，表示位姿
$\mathfrak{se}(3)$	$SE(3)$ 对应的李代数
$(\cdot)^\wedge$	与李代数相关的运算符
$(\cdot)^\vee$	与李代数的伴随相关的运算符
$Ad(\cdot)$	生成李群的伴随的运算符
$ad(\cdot)$	生成李代数的伴随的运算符
$C_{ba}$	$3 \times 3$ 的旋转矩阵，可以计算在 $\vec{\mathcal{F}}_a$ 中的点在 $\vec{\mathcal{F}}_b$ 下的表示
$T_{ba}$	$4 \times 4$ 的变换矩阵，可以计算在 $\vec{\mathcal{F}}_a$ 中的点在 $\vec{\mathcal{F}}_b$ 下的表示
$\mathcal{T}_{ba}$	变换矩阵的 $6 \times 6$ 伴随矩阵

# 目 录

简介	I	2.2.5 高斯分布随机变量的线性变换	20
译者序	III	2.2.6 高斯概率密度函数的归一化积	21
序言	V	2.2.7 Sherman-Morrison-Woodbury 等式	22
缩略语	VII	2.2.8 高斯分布随机变量的非线性变换	23
符号对照表	IX	2.2.9 高斯分布的香农信息	27
第 1 章 引言	1	2.2.10 联合高斯概率密度函数的互信息	28
1.1 状态估计简史	1	2.2.11 高斯概率密度函数的克拉美罗下界	29
1.2 传感器、测量和问题定义	3	2.3 高斯过程	30
1.3 本书组织结构	4	2.4 总结	31
1.4 与其他教程的关系	5	2.5 习题	32
第一部分 状态估计机理	7	第 3 章 线性高斯系统的状态估计	33
第 2 章 概率论基础	9	3.1 离散时间的批量估计问题	33
2.1 概率密度函数	9	3.1.1 问题定义	33
2.1.1 定义	9	3.1.2 最大后验估计	34
2.1.2 贝叶斯公式及推断	10	3.1.3 贝叶斯推断	38
2.1.3 矩	11	3.1.4 存在性、唯一性与能观性	41
2.1.4 样本均值和样本方差	12	3.1.5 MAP 的协方差	44
2.1.5 统计独立性与不相关性	12	3.2 离散时间的递归平滑算法	45
2.1.6 归一化积	13	3.2.1 利用批量优化结论中的稀疏结构	45
2.1.7 香农信息和互信息	13	3.2.2 Cholesky 平滑算法	46
2.1.8 克拉美罗下界和费歇尔信息量	14	3.2.3 Rauch-Tung-Striebel 平滑算法	49
2.2 高斯概率密度函数	15	3.3 离散时间的递归滤波算法	52
2.2.1 定义	15	3.3.1 批量优化结论的分解	52
2.2.2 Isserlis 定理	16	3.3.2 通过 MAP 推导卡尔曼滤波	56
2.2.3 联合高斯概率密度函数, 分解与推断	18	3.3.3 通过贝叶斯推断推导卡尔曼滤波	60
2.2.4 统计独立性、不相关性	19		

3.3.4	从增益最优化的角度来看 卡尔曼滤波 . . . . .	62	4.4.2	观测模型 . . . . .	126
3.3.5	关于卡尔曼滤波的讨论 . . . . .	62	4.4.3	贝叶斯推断 . . . . .	126
3.3.6	误差动态过程 . . . . .	63	4.4.4	算法总结 . . . . .	127
3.3.7	存在性、唯一性以及能观性	64	4.5	总结 . . . . .	128
3.4	连续时间的批量估计问题 . . . . .	65	4.6	习题 . . . . .	128
3.4.1	高斯过程回归 . . . . .	65	<b>第 5 章 偏差、匹配和外点</b>		<b>131</b>
3.4.2	一种稀疏的高斯过程先验 方法 . . . . .	68	5.1	处理输入和测量的偏差 . . . . .	131
3.4.3	线性时不变情况 . . . . .	73	5.1.1	偏差对于卡尔曼滤波器的 影响 . . . . .	131
3.4.4	与批量离散时间情况的关系	77	5.1.2	未知的输入偏差 . . . . .	134
3.5	总结 . . . . .	77	5.1.3	未知的测量偏差 . . . . .	136
3.6	习题 . . . . .	78	5.2	数据关联 . . . . .	137
<b>第 4 章 非线性非高斯系统的状态估计</b>		<b>81</b>	5.2.1	外部数据关联 . . . . .	138
4.1	引言 . . . . .	81	5.2.2	内部数据关联 . . . . .	138
4.1.1	全贝叶斯估计 . . . . .	82	5.3	处理外点 . . . . .	139
4.1.2	最大后验估计 . . . . .	83	5.3.1	随机采样一致性 . . . . .	140
4.2	离散时间的递归估计问题 . . . . .	85	5.3.2	M 估计 . . . . .	141
4.2.1	问题定义 . . . . .	85	5.3.3	协方差估计 . . . . .	143
4.2.2	贝叶斯滤波 . . . . .	86	5.4	总结 . . . . .	145
4.2.3	扩展卡尔曼滤波 . . . . .	88	5.5	习题 . . . . .	145
4.2.4	广义高斯滤波 . . . . .	91	<b>第二部分 三维空间运动机理</b>		<b>147</b>
4.2.5	迭代扩展卡尔曼滤波 . . . . .	92	<b>第 6 章 三维几何学基础</b>		<b>149</b>
4.2.6	从 MAP 角度看 IEKF . . . . .	93	6.1	向量和参考系 . . . . .	149
4.2.7	其他将 PDF 传入非线性 函数的方法 . . . . .	94	6.1.1	参考系 . . . . .	150
4.2.8	粒子滤波 . . . . .	100	6.1.2	点积 . . . . .	151
4.2.9	sigmapoint 卡尔曼滤波 . . . . .	103	6.1.3	叉积 . . . . .	151
4.2.10	迭代 sigmapoint 卡尔曼滤波	107	6.2	旋转 . . . . .	152
4.2.11	ISPKF 与后验均值 . . . . .	108	6.2.1	旋转矩阵 . . . . .	152
4.2.12	滤波器分类 . . . . .	110	6.2.2	基本旋转矩阵 . . . . .	153
4.3	离散时间的批量估计问题 . . . . .	110	6.2.3	其他的旋转表示形式 . . . . .	154
4.3.1	最大后验估计 . . . . .	110	6.2.4	旋转运动学 . . . . .	160
4.3.2	贝叶斯推断 . . . . .	116	6.2.5	加上扰动的旋转 . . . . .	164
4.3.3	最大似然估计 . . . . .	118	6.3	姿态 . . . . .	167
4.3.4	讨论 . . . . .	122	6.3.1	变换矩阵 . . . . .	168
4.4	连续时间的批量估计问题 . . . . .	123	6.3.2	机器人学的符号惯例 . . . . .	169
4.4.1	运动模型 . . . . .	124	6.3.3	弗莱纳参考系 . . . . .	170

6.4	传感器模型 . . . . .	173	第三部分 应用	257
6.4.1	透视相机 . . . . .	174		
6.4.2	立体相机 . . . . .	180		
6.4.3	距离-方位角-俯仰角模型	182		
6.4.4	惯性测量单元 . . . . .	183		
6.5	总结 . . . . .	185		
6.6	习题 . . . . .	186		
<b>第 7 章</b>	<b>矩阵李群</b>	<b>187</b>	<b>第 8 章</b>	<b>位姿估计问题</b>
7.1	几何学 . . . . .	187	8.1	点云对准 . . . . .
7.1.1	特殊正交群和特殊欧几里得群 . . . . .	187	8.1.1	问题描述 . . . . .
7.1.2	李代数 . . . . .	189	8.1.2	单位四元数解法 . . . . .
7.1.3	指数映射 . . . . .	191	8.1.3	旋转矩阵解法 . . . . .
7.1.4	伴随 . . . . .	197	8.1.4	变换矩阵解法 . . . . .
7.1.5	Baker-Campbell-Hausdorff . . . . .	200	8.2	点云跟踪 . . . . .
7.1.6	距离、体积与积分 . . . . .	207	8.2.1	问题描述 . . . . .
7.1.7	插值 . . . . .	209	8.2.2	运动先验 . . . . .
7.1.8	齐次坐标点 . . . . .	214	8.2.3	测量模型 . . . . .
7.1.9	微积分和优化 . . . . .	215	8.2.4	EKF 解法 . . . . .
7.1.10	公式摘要 . . . . .	222	8.2.5	批量式最大后验解法 . . . . .
7.2	运动学 . . . . .	222	8.3	位姿图松弛化 . . . . .
7.2.1	旋转 . . . . .	222	8.3.1	问题定义 . . . . .
7.2.2	姿态 . . . . .	224	8.3.2	批量式最大似然解法 . . . . .
7.2.3	旋转线性化 . . . . .	227	8.3.3	初始化 . . . . .
7.2.4	线性化姿态 . . . . .	230	8.3.4	利用稀疏性 . . . . .
7.3	概率与统计 . . . . .	232	8.3.5	边的例子 . . . . .
7.3.1	高斯随机变量和概率分布函数 . . . . .	232	<b>第 9 章</b>	<b>位姿和点的估计问题</b>
7.3.2	旋转向量的不确定性 . . . . .	236	9.1	光束平差法 . . . . .
7.3.3	姿态组合 . . . . .	238	9.1.1	问题描述 . . . . .
7.3.4	姿态融合 . . . . .	243	9.1.2	测量模型 . . . . .
7.3.5	非线性相机模型中的不确定性传播 . . . . .	246	9.1.3	最大似然解 . . . . .
7.4	总结 . . . . .	253	9.1.4	利用稀疏性 . . . . .
7.5	习题 . . . . .	254	9.1.5	插值的例子 . . . . .
			9.2	同时定位与地图构建 . . . . .
			9.2.1	问题描述 . . . . .
			9.2.2	批量式最大后验的解 . . . . .
			9.2.3	利用稀疏性 . . . . .
			9.2.4	例子 . . . . .
			<b>第 10 章</b>	<b>连续时间的估计</b>
			10.1	运动先验 . . . . .
			10.1.1	原问题 . . . . .
			10.1.2	对问题的简化 . . . . .
			10.2	同时轨迹估计与地图构建 . . . . .



10.2.1	问题建模 . . . . .	318	A.1.1	$SE(3)$ 上的导数 . . . . .	325
10.2.2	观测模型 . . . . .	318	A.2	运动学 . . . . .	326
10.2.3	批量式最大后验解 . . . . .	319	A.2.1	$SO(3)$ 上的雅可比恒等式 . . . . .	326
10.2.4	稀疏性分析 . . . . .	320	A.2.2	$SE(3)$ 的雅可比恒等式 . . . . .	326
10.2.5	插值 . . . . .	321	参考文献		329
10.2.6	后记 . . . . .	322	索引		335
附录 A	补充材料	325			
A.1	李群的工具 . . . . .	325			

# 第1章 引言

机器人学，本质上研究的是世界上运动物体的问题。机器人的时代已经来临：火星车正在太空探索，无人机正在地表巡航，很快，自动驾驶汽车亦将闯入眼帘。尽管每种机器人的功能各异，然而在实际应用中，它们往往会面对一些共同的问题——**状态估计**（state estimation）和**控制**（control）。

机器人的**状态**，是指一组完整描述它随时间运动的物理量，比如位置、角度和速度。本书重点关注机器人的状态估计，控制的问题则不在讨论之列。控制的确非常重要——我们希望机器人按照给定的要求工作，但首要的一步乃是确定它的状态。人们往往低估了真实世界中状态估计问题的难度，而我们要指出，至少应该把状态估计与控制放在同等重要的地位。

在本书中我们先介绍受高斯噪声影响下的线性系统状态估计中的经典结论。然后，我们介绍如何将它们拓展到非线性非高斯系统下。与经典的估计理论教程不同，我们会详细讲解三维空间机器人的状态估计，并对旋转采用更具针对性的方法。

本章的其余部分将简单介绍一些估计理论的历史，讨论不同类型的传感器与测量手段，最后引出什么是状态估计问题。本章的内容可视作对全书的概述。本章末尾会介绍本书的结构，并推荐一些相关的阅读材料。

## 1.1 状态估计简史

早在 4000 年前，航海家们就面临着一个状态估计问题：如何判断船只在大海中的位置。早期的做法是制作一个简单的图表，不断地观测太阳方位，让船只沿着海岸线实现局部导航。直到 15 世纪，随着一些关键技术和工具的问世，在开阔海域的全局导航才变为可能。水手们能够通过一种早期的磁铁指南针——航海指南针，粗略地测量船只自身的方向，再配合粗略的航海图，就可以在两个目标点间直线前行（最简单的情况下，可以跟随指南针的方向）。随后，直角器、星盘、四分仪、六分仪、经纬仪等一系列发明的出现，让人们得以更精确地测量远距离点之间的角度。

这些工具能够准确地测量纬度，帮助人们进行天文导航。例如，在北半球测量北极星和地平线之间的夹角，就能得到自己的纬度。然而，测量经度却困难得多。人们在很早之前就已经认识到，经度测量问题的关键在于一台精确的计时器。在地球的不同位置上观察时，一些重要天体的运行方式看起来是不同的，只有知道了当地的时间，才能准确地推测经度。1764 年，英国钟表匠 John Harrison 制造了世界上第一台可携带的精确计时工具，成功地解决了经度测量问题。从那时起，人们就可以在 10 海里的误差范围内确定一艘船的经度了。



图 1-1 四分仪，测量角度的一种工具



图 1-2 Harrison 制造的 H4，第一个用于准确航海计时的手持式钟表，用于确定经度

状态估计理论的起源，亦可追溯至早期的天文学。高斯（Gauss）最早<sup>1</sup>提出了最小二乘法，并用于最小化观测误差对行星估计轨道的影响。据记载，在谷神星最后一次被观测到的九个月后，他用最小二乘法预测了谷神星出现在太阳背后的位置，误差仅在 0.5 度以内。那是 1801 年，高斯仅 23 岁。随后在 1809 年，他证明了在正态分布误差假设下，最小二乘解即最优估计。大部分沿用至今的经典估计方法，都可以追溯到高斯的最小二乘法。

卡尔·弗里德里希·高斯（Carl Friedrich Gauss, 1777—1855），德国数学家，在很多领域都有重大贡献，包括统计学和估计理论。

用测量数据拟合模型，最小化测量误差的想法应运而生，但直到 20 世纪中期，状态估计理论才真正起步。这可能与我们刚进入计算机时代有着密切联系。1960 年，卡尔曼发表了两篇里程碑式的文章，指明了随后状态估计研究的大部分内容。首先，他引入了能观性（observability）这一概念<sup>[1]</sup>，即动态系统的状态何时能够从该系统的一组观测值中推断出来。其次，对于受观测噪声影响的系统，他提出了一个估计系统状态的优化框架<sup>[2]</sup>。这种经典的、针对受高斯观测噪声影响下线性系统的状态估计方法，就是著名的卡尔曼滤波（Kalman filter），也是暨它诞生之后五十年内研究的基石。卡尔曼滤波的应用甚为广泛，最重要的是在航天领域。美国国家航空航天局（National Aeronautics and Space Administration, NASA）的研究者们最先采用卡尔曼滤波，估计徘徊者计划（Ranger），水手号计划（Mariner）和阿波罗计划（Apollo）中的飞船轨道。特别地，阿波罗 11 登月模块的星载计算机，作为第一个载人登月飞行器，在月面着陆过程中采用了卡尔曼滤波，在雷达受噪声干扰的情况下，估计自身在月球表面的位置。

鲁道夫·埃米尔·卡尔曼（Rudolf Emil Kálmán, 1930—2016），匈牙利裔美国人，电子工程师、数学家和发明家。

在这些早期的里程碑之后，状态估计理论的发展日新月异。更快、更廉价的计算机让许多带有复杂计算的技术也能用于实际的系统之中。将近 15 年前<sup>2</sup>，原本活跃的状态估计领域似乎逐渐

<sup>1</sup> 有一些争议认为勒让德（Adrien Marie Legendre）比高斯更早地提出了最小二乘法。

<sup>2</sup> 指 2000 年左右。——译者注