

线性代数及其应用

刘华珂 主编



科学出版社

线性代数及其应用

刘华珂 主编

徐琛梅 李 嫻 副主编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是根据普通高等学校非数学专业本科线性代数课程教学大纲的基本要求,结合作者多年的教学实践编写而成。内容包括:行列式、矩阵、线性方程组、方阵的特征值与特征向量、数值计算初步、应用举例。在保证课程体系和数学逻辑完整性的基础上,本书更加重视体现出线性代数核心内容是如何在实际问题中出现的,其理论是如何在解决实际问题中发挥作用的,从而反映数学与其他应用学科的内在联系,培养学生高水平的创新创业能力。

本书可作为普通高等院校非数学专业理工类、经管类、农林类等专业的线性代数课程教材或参考书,也可供自学者阅读以及有关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用 / 刘华珂主编. —北京:科学出版社, 2018.8

ISBN 978-7-03-058391-8

I. ①线… II. ①刘… III. ①线性代数-高等学校-教材

IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 171171 号

责任编辑:胡海霞/责任校对:张凤琴

责任印制:吴兆东/封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 8 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2018 年 8 月第一次印刷 印张:14 3/4

字数:300 000

定价:39.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

在大学本科相关专业人才培养方案中,线性代数课程是课程体系和知识体系的重要组成部分,是后续专业课程学习的知识基础和思想基础.

编者在高等院校讲授非数学专业线性代数课程已有多年,根据教学实践和体会,结合大众化高等教育背景和学生需求,编者认为,作为一本要为非数学专业学生提供更好选择的线性代数教材,应该着重凸显其服务应用的方法特性和锻造素质的思想品格.因此,在编写过程中,突出问题牵引,紧扣方法提供,注重思想展示,锁定问题解决,便是贯穿本书并希望读者认真体会和掌握的核心精神.

线性代数思想方法和基本理论的主要载体是线性方程组的理论及其应用.线性代数的主要工具是矩阵及其基本理论.线性方程组理论的实质可以理解为矩阵的初等变换等基本理论.不管是线性方程组还是矩阵,它们都来源于生产和生活实践,是生产和生活实践中共性问题的总结和提升.因此,本书从思想、内容、方法等方面,体现出线性代数来源于实际问题,反过来又解决实际问题的特质,这正是线性代数的本质属性和应有之义.本书在编写上力求体现以上基本要求和基本思路.

在取材上,本书力争做到实用和精简.一方面,以行列式、矩阵、线性方程组等经典题材为内容,呈现线性代数的核心思想和主要脉络;另一方面,以线性代数数值计算和有关应用等题材为驱动,呈现线性代数与其他应用问题的有机联系和应用方法.同时,本书几乎每章都给出了可供学生自身延伸阅读的一些材料,希望以此进一步展现线性代数与其他知识体系的广泛联系,开阔读者视野.但对那些可能冲淡甚至干扰到主要思想和方法表达的细节,或舍去,或只谈大意.

除了一些最基本的数学素质,比如中学时同学们学习的解二元一次方程组的高斯消元法,本书基本上不需要其他预备知识.个别用到其他知识的内容,一般只是例子.跳过它们,不会影响任何学习.在习题安排上,附加题 A 是用来巩固基础知识的,附加题 B 会有体现应用和拓展的考虑.

本书第 1—4 章由刘华珂和李娴执笔,第 5, 6 章由徐琛梅执笔.全书统稿和定稿由刘华珂完成.限于水平,不当和疏漏之处在所难免,欢迎读者批评指正.

编 者

2016 年 10 月

目 录

前言

第 1 章 行列式	1
1.1 二阶和三阶行列式	2
1.2 排列	4
1.3 n 阶行列式的定义和性质	6
1.4 n 阶行列式的展开和计算	14
附加题 A	24
附加题 B	25
延伸阅读 行列式发展简述	26
第 2 章 矩阵	28
2.1 矩阵的概念	29
2.2 矩阵的运算	34
2.3 矩阵的初等变换	44
2.4 可逆矩阵	51
2.5 矩阵的分块运算	58
2.6 矩阵的秩	64
2.7 MATLAB 软件应用	66
附加题 A	70
附加题 B	71
延伸阅读 正 n 边形的对称变换	73
第 3 章 线性方程组	75
3.1 线性方程组的解法	76
3.2 向量间的线性关系	89
3.3 向量组的秩	96
3.4 线性方程组解的结构	100
3.5 n 维向量空间初步	107
3.6 MATLAB 软件应用	110
附加题 A	112
附加题 B	113

延伸阅读 复杂化学反应系统中的计量问题	117
第 4 章 方阵的特征值与特征向量、二次型	119
4.1 向量的内积	120
4.2 方阵的特征值和特征向量	126
4.3 矩阵的对角化	131
4.4 二次型	140
4.5 MATLAB 软件应用	150
附加题 A	153
附加题 B	154
延伸阅读 线性代数发展概述	156
第 5 章 数值计算初步	160
5.1 矩阵级数	161
5.2 求解线性方程组的迭代法	166
5.3 矩阵特征值和特征向量的近似算法	169
5.4 MATLAB 软件应用	175
延伸阅读 循环比赛的名次问题	176
第 6 章 应用举例	180
6.1 投入产出模型简介	181
6.2 线性规划模型简介	188
6.3 层次分析模型简介	197
6.4 MATLAB 软件应用	206
延伸阅读 大学生数学建模竞赛简介	208
参考文献	210
习题参考答案选解	211

第1章 行列式

数学家 西尔维斯特

西尔维斯特(Sylvester, 1814—1897)是英国著名数学家,曾就读于剑桥大学约翰学院,1838年任伦敦大学教授,1859年成为伦敦皇家学会会员,1868年当选伦敦数学会主席,1876年任美国霍普金斯大学数学教授,1883年返回英国,任牛津大学几何学教授.

西尔维斯特的数学贡献主要在代数学方面.他同凯莱一起,发展了行列式理论,共同奠定了代数不变量的理论基础.在数论方面也有突出贡献,特别是在整数分拆和丢番图分析方面.发表了几百篇论文,著有《椭圆函数论》一书.创造了许多数学名词,当代数学中常用的术语,如不变式、判别式、雅可比行列式等都是他引入的.

西尔维斯特是《美国数学杂志》的创始人,为发展美国的数学研究作出了贡献,霍普金斯大学有一座学生宿舍是以西尔维斯特的名字命名的.1880年英国皇家学会授予他科普利奖章,1901年英国为纪念他设立了西尔维斯特奖章,用于奖励数学上取得成就的研究者.

行列式是数学中的一个基本概念,在自然科学和工程技术等领域有广泛应用.在线性代数中,行列式是矩阵理论和线性方程组理论的重要基础和组成部分.本章主要介绍行列式的基本概念、性质及其计算.

基本概念 行列式,排列,余子式,代数余子式.

基本运算 行列式的行列运算.

基本要求 牢记行列式的定义和性质,熟练掌握行列式的计算.

1.1 二阶和三阶行列式

1.1.1 二阶行列式

熟知,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,以 $x_i (i=1,2)$ 为未知数的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.1)$$

虽然该公式中两个分式的表达式不算复杂,但要准确记忆并不容易.因此,人们便要寻找比较容易记忆的方法.很明显,只要记住式(1.1)中两个分式的分子和分母,便记住了式(1.1),其中关键就是记忆式(1.1)中的分子和分母.作为这些分子和分母的共同特征,它们均是4个数字两两相乘所组成的代数和!经验表明,这种形式的代数和不仅在记忆线性方程组的解时重要,而且在数学及其应用中都经常出现并十分重要.所以对其赋予适当记号并冠以适当名称就很有必要.以式(1.1)中的分母为例,按照习惯,把它记为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,即定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.2)$$

由于式(1.2)左边的记号是由两行两列数字按照一定次序组成的一个表达式,所以被称为二阶行列式.

这种记号和定义的好处是,它既能够清楚显示式(1.2)中代数和的形成规律,又能够使行列式概念可以顾名思义.

在二阶行列式(1.2)中,横排称作行,纵排称作列. a_{ij} 称为行列式的元素或元,元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表示它位于第 i 行,第二个下标 j 称为列标,表示它位于第 j 列. 位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式的 (i, j) 元. 二阶行列式(1.2)可以用下图所示的对角线法则来记忆,其中从 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线,从 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线,二阶行列式就等于其主对角线上元素的乘积减去副对角线上元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

使用二阶行列式的概念,公式(1.1)就可以表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

其中 x_1 和 x_2 的分子是分别把分母行列式中的第一列和第二列换为 b_1 和 b_2 得到的,这明显降低了记忆的难度.

1.1.2 三阶行列式

与二元线性方程组类似,三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

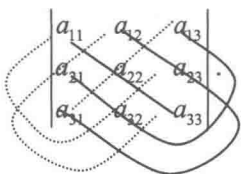
的解的表达式中会出现 9 个数三三相乘的代数和. 所以我们给出如下定义.

定义 1.1 把任意 9 个实数 a_{ij} ($1 \leq i, j \leq 3$) 排成下述由三行三列数字组成的数表,并按照

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (1.3)$$

赋予其数值意义,则称为三阶行列式.

该定义中的代数和由 6 项组成,每一项均为处于式(1.3)左边不同行不同列三个元素的乘积,其规律可以用下图所示的对角线法则来记忆.



图中三条实线看作平行于主对角线的连线, 其上三个元素的乘积冠以正号; 三条虚线看作平行于副对角线的连线, 其上三个元素的乘积冠以负号. 使用三阶行列式的概念, 当式(1.3)不为0时, 不难写出三元线性方程组用三阶行列式表示的解.

一般地, 给定正整数 $n \geq 1$, 给出 n^2 个实数 $a_{ij} (1 \leq i, j \leq n)$, 可作成下述 n 行 n 列的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (1.4)$$

并按照与式(1.2)和式(1.3)类似的办法赋予其数值意义, 称为 n 阶行列式. 可以想见, 定义中会出现许多 n 个数相乘的代数和中. 在二阶和三阶行列式的情形中, 代数和中每个乘积的符号是用对角线法则给出的, 但这种法则很难扩展到 $n \geq 4$ 的情形. 为了克服这种困难, 进而给出 n 阶行列式的定义, 我们先来介绍全排列的一些基本知识.

习 题 1.1

1. 利用对角线法则计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

2. 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$.

1.2 排 列

1.2.1 全排列及其逆序数

定义 1.2 由 n 个自然数 $1, 2, \dots, n$ 所组成的一个有序数组称为一个 n 级全排列,

简称 n 级排列, 或排列. 一个排列中的数也称为该排列的**元素**. n 级排列的一个特殊情形是 $1, 2, \dots, n$ 按从小到大的自然顺序排起来的排列, 称为**自然排列**.

例如, 由自然数 $1, 2, 3$ 可以组成 6 个 3 级排列, 它们是 $123, 132, 213, 231, 312$ 和 321 . 一般地, 容易看到 n 级排列的总数为

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

很明显, 除了自然排列之外, 其他 n 级排列必然会破坏自然顺序. 为了显示一个排列破坏自然顺序的程度, 同时为了以后应用, 我们给出如下定义.

定义 1.3 在一个排列中, 如果一个较大的数排在一个较小的数的前边, 则称这两个数构成该排列的一个**逆序**. 一个排列中, 所有逆序的总数称为这个排列的**逆序数**. 逆序数是奇数的排列称为**奇排列**, 逆序数是偶数的排列称为**偶排列**.

排列的逆序数可以用下面直接计数的方法来计算. 设

$$p_1 p_2 \cdots p_n$$

为 $1, 2, \dots, n$ 的任意一个排列, 对任一 $p_i (i=1, 2, \dots, n)$, 设排在 p_i 前面且大于 p_i 的数的个数为 t_i , 则该排列的逆序数为

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^n t_i.$$

例 1.2.1 求排列 635214 的逆序数, 并说明其奇偶性.

解 这是一个 6 级排列, 直接计数易知 $t_1=0, t_2=1, t_3=1, t_4=3, t_5=4, t_6=2$, 故按照上述计算方法, 该排列的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 1 + 3 + 4 + 2 = 11.$$

所以此排列为奇排列.

1.2.2 对换

把一个排列中某两个元素对调, 其余元素不动, 得到一个新的排列, 这样一个改变称为一个**对换**, 相邻两个元素的对换, 称为**相邻对换**.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

证 先证相邻对换的情形. 设

$$a_1 \cdots a_i a b b_1 \cdots b_m \tag{1.5}$$

为任一排列, 对换 a 与 b , 得到排列

$$a_1 \cdots a_i b a b_1 \cdots b_m. \quad (1.6)$$

由排列逆序数的计算方法可以看到, 若 $a > b$, 则对换之后排列式 (1.6) 的逆序数比式 (1.5) 的逆序数减少 1; 若 $a < b$, 则式 (1.6) 的逆序数比式 (1.5) 的逆序数增加 1. 因而相邻对换改变排列的奇偶性.

再证明一般对换的情形. 设排列为 $a_1 \cdots a_i a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$. 先把 a 依次与 $b_1, \cdots, b_m, b$ 作相邻对换, 得到排列 $a_1 \cdots a_i b_1 \cdots b_m b a c_1 \cdots c_n$; 然后再把 b 依次与 $b_m, \cdots, b_1$ 作相邻对换, 得到排列 $a_1 \cdots a_i b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$. 这样, 经过共 $2m+1$ 次相邻对换, 排列 $a_1 \cdots a_i a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$ 就变为 $a_1 \cdots a_i b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$. 注意到一次相邻对换改变一次排列的奇偶性, 故 $2m+1$ 次相邻对换最终仍改变一次排列的奇偶性. 所以, 对换改变排列的奇偶性.

注意到自然排列的逆序数为 0, 它是偶排列. 所以有如下结论.

推论 1.2.1 奇排列变成自然排列的对换次数为奇数, 偶排列变成自然排列的对换次数为偶数.

习 题 1.2

1. 计算下面排列的逆序数.

(1) 45321;

(2) 627983145;

(3) $135 \cdots (2n-1)24 \cdots 24(2n)$;

(4) $135 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2) \cdots 42$.

2. 选择 i 和 j , 使

(1) $137i624j8$ 成为偶排列;

(2) $24i5839j6$ 成为奇排列.

3. 设 $t(p_1 p_2 \cdots p_n) = k$, 求 $t(p_n \cdots p_2 p_1)$.

1.3 n 阶行列式的定义和性质

1.3.1 n 阶行列式的定义

我们现在来给出 n 阶行列式的定义. 为此, 先来回顾分析一下三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

可以看出, 该定义有以下两个方面的特征.

一方面, 式(1.3)右边是一些乘积的代数和, 每一乘积项都由其左边表达式中处于不同行不同列的三个元素相乘而得, 并且式(1.3)右边的代数和恰好就是由所有可能的这些乘积组成的. 应用 1.2 节中所讲的知识, 除正负号外, 我们可以把每一乘积都写成 $a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$ 的形式, 其中它们的第一个下标(即行标)已排成自然顺序, 第二个下标(即列标)排成了 $p_1 p_2 p_3$, 它是 1, 2, 3 的某一排列.

另一方面, 每一乘积 $a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$ 都带有正号或负号, 当列标排列 $p_1 p_2 p_3$ 是偶排列时带正号, 当列标排列 $p_1 p_2 p_3$ 是奇排列时带负号. 若记列标排列 $p_1 p_2 p_3$ 的逆序数为 t , 则乘积 $a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$ 的符号可以用 $(-1)^t$ 来表示. 这样三阶行列式的定义(1.3)就可以写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}, \quad (1.7)$$

其中 t 为排列 $p_1 p_2 p_3$ 的逆序数, $\sum$ 表示对 1, 2, 3 三个数的所有排列 $p_1 p_2 p_3$ 求和. 容易验证, 二阶行列式的定义满足类似规律. 仿此, 我们就可给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.4 由 n^2 个数 a_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) 排成的 n 行 n 列表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

所形成的 n 阶行列式定义为处于式(1.8)中不同行不同列的 n 个元素的所有可能乘积

$$a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (1.9)$$

的代数和, 其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数 1, 2, $\dots$, n 的一个排列, 乘积项(1.9)前面的符号为 $(-1)^t$, t 为排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数, 即定义 n 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}, \quad (1.10)$$

其中 $\sum$ 表示对 1, 2, $\dots$, n 的所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 求和. n 阶行列式(1.10)简记为

$$D = \det(a_{ij}).$$

数 a_{ij} 称为行列式 (1.10) 的元素, 也称为 (i, j) 元. 从 a_{11} 到 a_{nn} 的斜线称为行列式的主对角线, 主对角线以下元素均为零的行列式称为上三角行列式, 主对角线以上元素均为零的行列式称为下三角行列式, 既为上三角又为下三角的行列式称为对角行列式. 由于 $1, 2, \dots, n$ 的排列 $p_1 p_2 \dots p_n$ 共有 $n!$ 个, 所以式 (1.10) 右边的代数和总共有 $n!$ 项.

对于 $n=2$ 和 $n=3$ 的情形, 容易验证上述定义与二阶和三阶行列式对角线法则的一致性. 同时, 为了逻辑上的完整性, 当 $n=1$ 时, 一阶行列式定义为 $|a| = a$. 注意, 请不要将该记号与绝对值符号相混淆.

在 n 阶行列式的讨论和应用中, 经常会出现很多元素都为 0 的情况, 为了简化书写, 习惯上我们常用一片空白或用一个 0 来表示对应位置的元素全为 0. 这样, 上三角行列式和对角行列式就经常写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

的形式.

例 1.3.1 证明

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \quad \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

证 由行列式的定义, 第一式是显然的. 下证第二式. 记 $\lambda_i = a_{i, n-i+1}$, 则由定义,

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2, n-1} & \\ & \ddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^t a_{1n} a_{2, n-1} \cdots a_{n1} = (-1)^t \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

其中 $t = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ 为排列 $n(n-1) \cdots 321$ 的逆序数, 所以

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

例 1.3.2 对上三角行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}$, 证明 $D = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

证 因为当 $j < i$ 时在 D 中有 $a_{ij} = 0$, 故 D 中可能不为零的元素 a_{ip_i} 的下标必满足 $p_i \geq i$, 即

$$p_1 \geq 1, \quad p_2 \geq 2, \quad \cdots, \quad p_n \geq n.$$

由定义, 当 $a_{1p_1}a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 为 D 的代数和中某一项时, $p_1p_2 \cdots p_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列.

故依次考察 $p_n, p_{n-1}, \cdots, p_1$ 可知

$$p_n = n, \quad p_{n-1} = n-1, \quad \cdots, \quad p_1 = 1.$$

所以由定义可得 $D = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

用同样的方法读者可以验证, 对于下三角行列式也有类似结论. 因而上述例子说明, 上(下)三角行列式和对角行列式等于其主对角线上元素的乘积.

下面给出 n 阶行列式定义的一些其他表示方法. 为此, 先来分析式 (1.10) 右边求和的一般项

$$(-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n}, \quad (1.11)$$

其中 $1 \cdots i \cdots j \cdots n$ 为自然排列, t 为排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的逆序数. 明显, 对换式 (1.11) 中任意两个元素 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 的位置, 其值不变, 而这些元素的行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换. 不断重复这种做法, 由推论 1.2.1 知, 若 t 为偶数(或奇数), 经过偶数次(或奇数次)对换后, 式 (1.11) 中列标排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 变为自然排列, 同时, 式 (1.11) 中的行标排列 $1 \cdots i \cdots j \cdots n$ 变为某个新的排列 $q_1q_2 \cdots q_n$, 若记其逆序数为 S , 则 S 也为偶数(或奇数). 所以有

$$(-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} = (-1)^S a_{q_11} \cdots a_{q_i i} \cdots a_{q_j j} \cdots a_{q_n n}.$$

又若 $p_i = j$, 则 $q_j = i$ (即 $a_{ip_i} = a_{ij} = a_{q_j j}$), 所以排列 $q_1q_2 \cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2 \cdots p_n$ 唯一确定, 于是当 $p_1p_2 \cdots p_n$ 经过 $1, 2, \cdots, n$ 的全部 $n!$ 个排列时, $q_1q_2 \cdots q_n$ 也经过这全部 $n!$ 个排列. 因此

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = \sum (-1)^S a_{q_11} \cdots a_{q_i i} \cdots a_{q_j j} \cdots a_{q_n n}.$$

这样就得到了 n 阶行列式定义的另外一种表示方法.

定义 1.4' n 阶行列式也可以定义为

$$D = \sum (-1)^t a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n},$$

其中 $\sum$ 表示对 $1, 2, \dots, n$ 的所有排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 求和, t 为排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 的逆序数.

一般地, 通过类似的讨论, 行列式的定义还可以写为

$$D = \sum (-1)^{t_1+t_2} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n},$$

其中行标排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与列标排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 中有一个是固定的, 另外一个在 $1, 2, \dots, n$ 的所有排列上求和, 而 t_1 为 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数, t_2 为 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数.

一般说来, 用定义计算高阶行列式是很困难的. 然而, 由例 1.3.1 和例 1.3.2 已经知道了关于上(下)三角行列式的计算结果, 因此, 在计算行列式时, 常常借助行列式的性质把它化为上(下)三角行列式进行计算. 下面来列举这些性质. 但考虑到读者对象, 本书不再对这些性质进行一一证明. 有兴趣的读者可以自行尝试完成这些性质的证明.

1.3.2 行列式的性质

性质 1.3.1 行列互换, 行列式不变. 即, 若令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D^T = D$. 行列式 D^T 称为 D 的转置行列式.

证 记 D^T 的 (i, j) 元为 b_{ij} , 则 $b_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 故由定义 1.4 得

$$D^T = \sum (-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n},$$

又由定义 1.4' 知 $D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$, 所以 $D^T = D$.

由此可知, 行列式中的行和列具有同等地位, 所以, 凡是对行成立的性质, 对列同样成立. 反之亦然. 所以, 以下性质只对行进行叙述.

性质 1.3.2 任意两行互换位置, 其余行保持不变, 行列式反号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

通常, 我们用 r_i 表示行列式的第 i 行, 用 c_i 表示行列式的第 i 列, 交换 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$, 交换 i, j 两列, 记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 1.3.1 有两行元素完全相同的行列式为 0.

性质 1.3.3 行列式中任一行元素的公因数可以提到行列式符号外面. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

通常, 第 i 行(或列)乘以数 k , 记作 $r_i \times k$ (或 $c_i \times k$).

推论 1.3.2 有两行元素对应成比例的行列式为 0.

性质 1.3.4 如果行列式中某一行元素都是两个数之和, 那么这个行列式可以按这一行分解为两个行列式之和, 分解时其余行不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注意, 该式两端的三个行列式中只有第 i 行元素不同.

性质 1.3.5 某一行的元素加上另一行对应元素的倍数, 行列式不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & a_{j2} + ka_{i2} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$