普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等院校创新思维训练教材
普通高等院校少数民族预科教材

高等数学基础同步训练

刘满 奉黎静 曾伟 等编

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等院校创新思维训练教材
普通高等院校少数民族预科教材

高等数学基础同步训练

刘　满　奉黎静　曾　伟
丁可伟　刘基良　曾纯一　编
林屏峰　冀小明　赵　青
刘延涛　蒋永红　周晓阳

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是为普通高等教育“十三五”规划教材、普通高等院校创新思维训练教材和普通高等院校少数民族预科教材《高等数学基础》编写的教材配套辅导书. 按照教材的章节, 给出了每章的基本要求、知识框架、典型例题、课后习题全解、拓展训练和自测题. 本书旨在帮助学生熟悉教材, 提高解题能力, 形成创新思维, 为今后的学习和工作奠定坚实的数学基础.

本书主要供普通高等院校民族预科班和高职高专院校的学生学习使用, 也可供相关学生自学使用和教师教学参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础同步训练/刘满等编. 一北京：科学出版社，2018.9
普通高等教育“十三五”规划教材·普通高等院校创新思维训练教材·普通高等院校少数民族预科教材

ISBN 978-7-03-058602-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-习题集 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 195596 号

责任编辑：张中兴 梁 清 孙翠勤 / 责任校对：彭珍珍
责任印制：师艳茹 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

石家庄继文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 9 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2018 年 9 月第一次印刷 印张：14
字数：277 000

定价：39.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

为落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要》中提出的“要进一步办好高校民族预科班”精神，规范少数民族预科教育教学，进一步提高少数民族预科数学课程的教学质量，我们组织力量，依照教育部民族教育司和教育部少数民族预科教育教学管理指导委员会组织制定的一年制本科预科数学教学大纲(2016 版)，编写了针对民族预科特点，融创新思维培养和知识讲授为一体的普通高等教育“十三五”规划教材《高等数学基础教程》. 两年多的教学实践证明，这一教材的编写还是相当成功的. 但教学实践中我们注意到，由于预科学生基础参差不齐，很多学生面对概念抽象、运算繁杂的高等数学，往往感到力不从心. 为此我们进行改版修订，出版了《高等数学基础》，又编写了《高等数学基础同步训练》，宗旨是帮助学生熟悉教材、做好习题、形成创新思维，为今后的学习和工作奠定坚实的数学基础.

本书有下述三方面的特点.

(1) 指导引领性. 本书每章第一节列出了 2016 版一年制预科数学教学大纲对该部分内容的基本要求. 第二节以结构图的形式对该章节知识及其内在联系进行梳理，便于学生预习、复习和总结. 第三节编写了该部分的典型例题，更便于学生把握基本内容，把握重点. 最后给出了自测题目，为学生自我检验学习效果提供了抓手.

(2) 全面详尽性. 教材中所有的习题，包括所有带*部分的习题，均有解答，解题过程详尽. 这主要是考虑到预科学生的基础差异太大，各种问题可能都会遇到，给出全解和详尽解题过程，可以使学生对解题过程有一个全面清晰的了解，以加强对概念的理解和方法掌握，更能满足不同基础的学生的需求.

(3) 层次兼顾性. 编写教材时，在习题的安排、选择上，就兼顾了各层次民族预科学生的学习状况，编排了多种程度的习题供不同层次学生选择练习，兼顾了初等数学知识复习、高等数学基础夯实和创新思维培养. 本书更进一步地体现了这种层次兼顾性，在前述的全面详尽的基础上，又在每章第五节编入了拓展训练的题目，为学有余力和有进一步追求的学生追求更高理想启蒙.

同时，应该指出，虽然本书可以说是学习《高等数学基础》的工具书，但要合理使用. 我们不赞成学生自己不动脑筋，依赖于本书的解答. 我们的忠告是，所有习题，学生首先应靠自己的力量去做. 能独立完成的习题，做题后再与本解答对照，并检查解题步骤是否繁复、方法是否最简等；对于做不上来的习题，认真思考后再看解答，弄懂做会. 这样做必有更大的收获.

参加本书编写的有大连民族大学刘满老师、刘延涛老师、周晓阳老师；西南民族大学曾伟老师、刘基良老师、林屏峰老师、曾纯一老师、丁可伟老师、冀小明老师、赵青老师；中南民族大学奉黎静老师、蒋永红老师. 本书的出版得到了大连民族大学、西南民族大学、中

南民族大学的大力支持，借此机会，深表感谢！

由于时间仓促以及对民族预科教育的特殊性把握不足，编写中难免有疏漏和不妥，还望同仁和读者不吝赐教. 如果本书能在节省学生宝贵时间、提高学习效率、培养创新思维等方面有一点作用的话，我们将深感欣慰！

编　者

2018 年 6 月

目　　录

第一章　函　　数

一、基本要求

1. 理解集合、映射、函数的概念、反函数的概念、复合函数的概念；会求函数的定义域和值域；掌握函数的复合运算；会求一些简单函数的反函数.

2. 掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念、性质和图像.

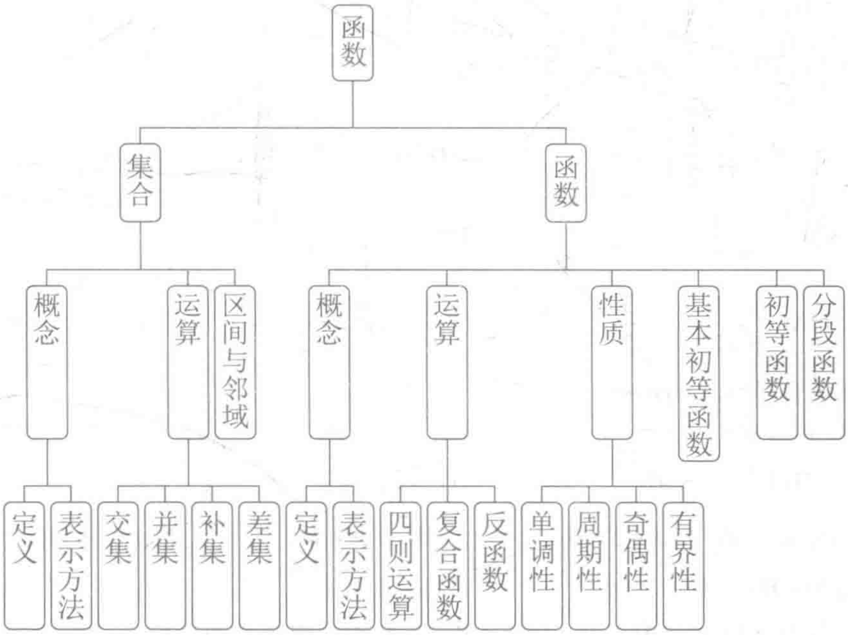
3. 掌握三角函数(正弦、余弦、正切、余切、正割、余割)的概念、性质和图像；掌握三角函数的常用变换公式.

4. 掌握反三角函数(反正弦、反余弦、反正切、反余切)的概念、性质和图像.

5. 理解初等函数的概念.

6. 了解函数的极坐标和参数方程的表示.

二、知识框架



三、典型例题

例 1　已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x\geqslant 0,\\ x^2-1, & x<0,\end{cases}$ 求 $f(-x)$.

解　$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2+(-x)+1, & -x\geqslant 0,\\ (-x)^2-1, & -x<0\end{cases}=\begin{cases}x^2-x+1, & x\leqslant 0,\\ x^2-1, & x>0.\end{cases}$

例 2 已知 $f(x)=e^{3x}$，$f[\varphi(x)]=2-x$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解 由 $f[\varphi(x)]=e^{3\varphi(x)}=2-x$，解得 $\varphi(x)=\frac{1}{3}\ln(2-x)$. 由对数函数的定义域可知，$2-x>0$，即 $x<2$，所以 $\varphi(x)$ 的定义域是 $(-\infty,2)$.

例 3 已知 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=x^2+x+1$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

解 因为 $g(x)=x^2+x+1>0$，所以 $f[g(x)]=1$，

$$g[f(x)]=[f(x)]^2+f(x)+1=\begin{cases}x^2+x+1, & x<0,\\ 3, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

四、课后习题全解

习 题 一

1. 设集合 $A=\{a,b,c\}$，下列式子中正确的是（　　）.

(A) $\varnothing\in A$　　(B) $A\subseteq A$　　(C) $b\subset A$　　(D) $\{a\}<A$

分析 选 B. (A) $\varnothing\subseteq A$；(C) $b\in A$；(D) $\{a\}\subset A$.

2. 数集 $\left\{x\left|\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2},x\neq 1\right.\right\}$ 还可表示为（　　）.

(A) 去心邻域 $\mathring{U}\left(1,\frac{1}{2}\right)$　　(B) 邻域 $U\left(1,\frac{1}{2}\right)$

(C) 开区间 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　(D) 开区间 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

分析 选 A. $\left\{x\left|\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2},x\neq 1\right.\right\}=\left\{x\left|1-\frac{1}{2}<x<1+\frac{1}{2},x\neq 1\right.\right\}=\mathring{U}\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

3. 下列集合是空集的是（　　）.

(A) $\{x|x+5=0\}$　　(B) $\{x|x\in\mathbf{R}$, 且 $x^2+y^2=0\}$

(C) $\{x|x>0$ 且 $x^2+5=0\}$　　(D) $\{x|x^2+y^2=0$, 且 $x,y\in\mathbf{R}\}$

分析 选 C. (A) $\{x|x+5=0\}=\{-5\}$；(B) $\{x|x\in\mathbf{R}$，且 $x^2+y^2=0\}=\{0\}$；(D) $\{x|x^2+y^2=0$, 且 $x,y\in\mathbf{R}\}=\{0\}$.

4. 设集合 $M=\{x|x^2>4\}$，$N=\{x|x<3\}$，下列式子中正确的是（　　）.

(A) $M\cup N=N$　　(B) $M-N=\varnothing$

(C) $M\cap N=\{x|2<x<3\}$　　(D) $N-M=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$

分析 选 D. $M=\{x|x^2>4\}=\{x|x>2$ 或 $x<-2\}$，$N=\{x|x<3\}$，则 (A) $M\cup N=\mathbf{R}$；(B) $M-N=\{x|x\geqslant 3\}$；(C) $M\cap N=\{x|\ 2<x<3$ 或 $x<-2\}$.

5. 用区间表示下列不等式的解:

(1) $x^2\leqslant 9$；　(2) $|x-1|>1$；　(3) $(x-1)(x+2)<0$；　(4) $0<|x+1|<0.01$.

解 (1) $x^2 \leqslant 9$ 表示为 $[-3,3]$.

(2) $|x-1|>1$ 表示为 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

(3) $(x-1)(x+2)<0$ 表示为 $(-2,1)$.

(4) $0<|x+1|<0.01$ 表示为 $(-1.01,-1)\cup(-1,-0.99)$.

习 题 二

1. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否为同一个函数？为什么？

(1) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt[4]{x^2}$;　　(2) $f(x)=(\sqrt{x})^2$, $g(x)=x$;

(3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}$;　　(4) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $g(x)=x+1$;

(5) $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=2\ln x$;　　(6) $f(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$, $g(x)=\cos x$.

解 (1) 不是同一函数, 因为 $f(x)$ 定义域为 $[0,+\infty)$, $g(x)$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 即定义域不同.

(2) 不是同一函数, 因为 $f(x)$ 定义域为 $[0,+\infty)$, $g(x)$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 即定义域不同.

(3) 不是同一函数, 因为 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$, $g(x)$ 定义域为 $[2,+\infty)$, 即定义域不同.

(4) 不是同一函数, 因为 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, $g(x)$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 即定义域不同.

(5) 不是同一函数, 因为 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $g(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$, 即定义域不同.

(6) 不是同一函数, 虽然 $f(x)$ 和 $g(x)$ 定义域都为 $(0,+\infty)$, 但

$$f(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|\geqslant 0,\quad g(x)=\cos x,$$

显然对应法则不同.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$;　　(2) $y=\sqrt{1-|x|}$;　　(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

解 (1) 函数 $y=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$ 有意义, 必有 $\begin{cases}1-x>0,\\ x+2\geqslant 0,\end{cases}$ 解不等式组得 $-2\leqslant x<1$, 则函数定义域为 $[-2,1)$.

(2) 函数 $y=\sqrt{1-|x|}$ 有意义, 必有 $1-|x|\geqslant 0$, 解得 $-1\leqslant x\leqslant 1$, 则函数定义域为 $[-1,1]$.

(3) 显然函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 在 $(-\infty,0)$, $[0,1]$ 和 $(1,2]$ 上(内)有定义, 故定义域为 $(-\infty,2]$.

3. 求下列函数的值域:

(1) $f(x)=\lg x$, $x\in[10,+\infty)$;　　(2) $f(x)=\sqrt{x-x^2}$, $x\in[0,1]$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{1+\sin^2 x}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $x\in(0,1)$.

解 (1) 当 $x\geqslant 10$ 时, $f(x)=\lg x\geqslant \lg 10=1$, 因此函数的值域为 $[1,+\infty)$.

(2) 根据二次函数的性质知 $x-x^2$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处取得最大值 $\dfrac{1}{4}$, 因此当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$, 故函数值域为 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

(3) 由于 $0\leqslant\sin^2 x\leqslant 1$, 则 $\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)=\dfrac{1}{1+\sin^2 x}\leqslant 1$, 所以函数值域为 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

(4) 当 $0<x<1$ 时, $0<1-x<1$, 故 $\dfrac{1}{1-x}>1$, 于是函数值域是 $(1,+\infty)$.

4. 讨论下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=x^2,(-1,0)$;　　(2) $y=\dfrac{x}{1+x},(-1,+\infty)$;　　(3) $y=\sin x,\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解 (1) 任取 $x_1,x_2\in(-1,0)$, 且 $x_1<x_2$, 则有

$$y_1-y_2={x_1}^2-{x_2}^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0,$$

即 $y_1>y_2$, 因此 $y=x^2$ 在 $(-1,0)$ 内单调减少.

(2) 任取 $x_1,x_2\in(-1,+\infty)$, 且 $x_1<x_2$, 则有

$$y_1-y_2=\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}=\frac{x_1(1+x_2)-x_2(1+x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)}=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}<0,$$

即 $y_1<y_2$, 因此 $y=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-1,+\infty)$ 内单调增加.

(3) 任取 $x_1,x_2\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且 $x_1<x_2$, 则有 $-\pi<x_1-x_2<0$, $-\pi<x_1+x_2<\pi$, 且

$$y_1-y_2=\sin x_1-\sin x_2=2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}<0,$$

即 $y_1<y_2$, 因此 $y=\sin x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加.

5. 判定下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=(x^2+x)\sin x$;　　(2) $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$;

(3) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{\cos x}$;　　(4) $f(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^x-1, & x>0.\end{cases}$

解 (1) $f(x)=(x^2+x)\sin x$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 由于

$$f(-x)=[(-x)^2+(-x)]\sin(-x)=-(x^2-x)\sin x\neq\pm f(x),$$

故是非奇非偶函数.

(2) $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 由于

$$f(-x)=\ln[\sqrt{1+(-x)^2}-(-x)]=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$$
$$=-\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(3) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{\cos x}$ 的定义域为 $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$. 由于

$$f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{\cos(-x)}=\frac{1-x^2}{\cos x}=f(x),$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(4) $f(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^x-1, & x>0\end{cases}$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 由于

$$f(-x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-(-x)}, & -x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-x}-1, & -x>0\end{cases}=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{x}, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-x}-1, & x<0\end{cases}=\begin{cases}-(1-\mathrm{e}^{-x}), & x\leqslant 0,\\ -(\mathrm{e}^{x}-1), & x>0\end{cases}=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

6. 证明: 若 $f(x)$ 为奇函数, 且在 $x=0$ 有定义, 则 $f(0)=0$.

证明　因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-x)=-f(x)$, 进而 $f(0)=-f(0)$, 即 $f(0)=0$.

7. 求函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 的最小正周期.

解　由于 $\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos x|$, $\left|\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=|\sin x|$, 故 $\dfrac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的最小正周期.

8. 证明函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的.

证明　取 $M=\dfrac{1}{2}$, 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$|y|=\left|\frac{x}{x^2+1}\right|=\frac{|x|}{x^2+1}\leqslant\frac{\frac{x^2+1}{2}}{x^2+1}=\frac{1}{2}=M,$$

故 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

9. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;　　(2) $y=3^{2x+5}$;　　(3) $y=1+\ln(x+2)$;

(4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;　　(5) $y=\begin{cases}2x-1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-(x-2)^2, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

解　(1) 由于 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$, 且单调增加, 故存在反函数. 由 $y=$

$\sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x=y^3-1$，即反函数为 $y=x^3-1$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) 由于 $y=3^{2x+5}$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，且单调增加，故存在反函数. 由 $y=3^{2x+5}$ 解得 $x=\dfrac{\log_3 y-5}{2}$，即反函数为 $y=\dfrac{\log_3 x-5}{2}$，$x\in(0,+\infty)$.

(3) 由于 $y=1+\ln(x+2)$ 的定义域是 $(-2,+\infty)$，且单调增加，故存在反函数. 由 $y=1+\ln(x+2)$ 解得 $x=\mathrm{e}^{y-1}-2$，即反函数为 $y=\mathrm{e}^{x-1}-2$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(4) 由于 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，且为奇函数. 显然当 $x\geqslant 0$ 时，函数单调增加，根据奇函数的性质知，当 $x<0$ 时，函数也单调增加，因此函数是单调增加函数，故存在反函数.

由 $\begin{cases} y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}), \\ -y=\ln(-x+\sqrt{1+x^2}) \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \mathrm{e}^y=x+\sqrt{1+x^2}, \\ \mathrm{e}^{-y}=-x+\sqrt{1+x^2}, \end{cases}$ 解得 $x=\dfrac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2}$，即反函数为 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(5) 显然函数 $y=\begin{cases} 2x-1, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-(x-2)^2, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$ 在 $[0,2]$ 上单调增加，故存在反函数. 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，由 $y=2x-1$ 解得 $x=\dfrac{y+1}{2}$（$y\in[-1,1]$）；当 $1<x\leqslant 2$ 时，由 $y=2-(x-2)^2$ 解得 $x=2-\sqrt{2-y}$（$y\in(1,2]$），综上反函数为 $y=\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-\sqrt{2-x}, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$

10. 在下列各题中，求由所给函数复合而成的函数，并求出这函数分别对应于所给自变量值的函数值:

(1) $y=u^2$，$u=\sec x$，$x_1=\dfrac{\pi}{6}$，$x_2=\dfrac{\pi}{3}$；

(2) $y=\ln u$，$u=1+x^2$，$x_1=0$，$x_2=2$.

解 (1) $y=\sec^2 x$，$y\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\sec^2\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{4}{3}$，$y\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=\sec^2\dfrac{\pi}{3}=4$.

(2) $y=\ln(1+x^2)$，$y\big|_{x=0}=\ln 1=0$，$y\big|_{x=2}=\ln 5$.

11. 求下列函数的定义域，并且指出由哪些函数复合而成:

(1) $y=(2x+1)^{10}$；　(2) $y=2^{\sin^2 x}$；　(3) $y=\sin^3(\ln x)$.

解 (1) $y=(2x+1)^{10}$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，由 $y=u^{10}$，$u=2x+1$ 复合而成.

(2) $y=2^{\sin^2 x}$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，由 $y=2^u$，$u=v^2$，$v=\sin x$ 复合而成.

(3) $y=\sin^3(\ln x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，由 $y=u^3$，$u=\sin v$，$v=\ln x$ 复合而成.

12. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求下列函数的定义域:

(1) $f(\ln x)$；　(2) $f(\cos x)$.

解 由于 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，所以

(1) $0\leqslant \ln x\leqslant 1$，即 $1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$，于是 $f(\ln x)$ 的定义域是 $[1,\mathrm{e}]$；

(2) $0\leqslant\cos x\leqslant 1$，即 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$），于是 $f(\cos x)$ 的定义域是

$$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right].$$

13. 求下列函数的表达式:

(1) 设 $\varphi(\sin x)=\cos^2 x+\sin x+5$，求 $\varphi\ (x)$；

(2) 设 $g(x-1)=x^2+x+1$，求 $g(x)$；

(3) 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解　(1) $\varphi(\sin x)=\cos^2 x+\sin x+5=1-\sin^2 x+\sin x+5=-\sin^2 x+\sin x+6$，所以 $\varphi(x)=-x^2+x+6$；

(2) $g(x-1)=x^2+x+1=(x-1)^2+3(x-1)+3$，所以 $g(x)=x^2+3x+3$；

(3) $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，所以 $f(x)=x^2-2$.

14. 设 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，$g(x)=x^2$，求 $g[f(x)]-f[g(x)]$.

解　$g[f(x)]-f[g(x)]=f^2(x)-\left[g(x)+\dfrac{1}{g(x)}\right]=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=2$.

15. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

解　当 $x<0$ 时，$f(x)=x<0$，所以 $f(f(x))=f(x)=x$；当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2\geqslant 0$，所以 $f[f(x)]=f^2(x)=(x^2)^2=x^4$. 因此 $f(f(x))=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^4, & x\geqslant 0.\end{cases}$

习　题　三

1. 若 $0<a<1$，试比较 $\ln a$，$\ln(a+1)$，$[\ln(a+1)]^2$ 的大小.

解　由于 $0<a<1$，所有 $\ln a<0$，$0<\ln(a+1)<1$，于是 $0<[\ln(a+1)]^2<\ln(a+1)$，因此 $\ln a<[\ln(a+1)]^2<\ln(a+1)$.

2. 试比较 $m_1=\log_2 5$，$m_2=2^{0.5}$，$m_3=\log_4 15$ 的大小.

解　由于

$$\begin{aligned}m_2=2^{0.5}=\sqrt{2}=\log_4 4^{\sqrt{2}}<\log_4 4^{\frac{3}{2}}=\log_4 8<m_3=\log_4 15\\=\frac{1}{2}\log_2 15=\log_2\sqrt{15}<\log_2 5=m_1,\end{aligned}$$

所以 $m_2<m_3<m_1$.

3. 若 a，b 满足 $0<a<b<1$，试比较 a^a，a^b，b^a 的大小.

解　显然 $f(x)=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，则当 $0<a<b<1$ 时，$f(a)<f(b)$，即 $a^a<b^a$.

又由于 $g(x)=a^x\,(0<a<1)$ 是单调减少函数，则当 $0<a<b<1$ 时，$g(a)>g(b)$，即 $a^b<a^a$．综上当 $0<a<b<1$ 时，$a^b<a^a<b^a$．

4. 已知 $\sin(\alpha+\beta)=1$，$\sin\beta=\dfrac{1}{5}$，求 $\sin(2\alpha+\beta)$．

解　由于 $\sin(\alpha+\beta)=1$，所以 $\cos(\alpha+\beta)=0$．所以

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha+\beta)&=\sin[2(\alpha+\beta)-\beta]=\sin2(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos2(\alpha+\beta)\sin\beta\\&=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\cos\beta-[1-2\sin^2(\alpha+\beta)]\sin\beta\\&=2\times0\times\cos\beta-(1-2)\sin\beta=\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

5. 设 $x\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，证明：$\tan\dfrac{x}{2}=\csc x-\cot x$．

证明　$\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{\cos x}{\sin x}=\csc x-\cot x.$

6. 设 $x\neq(2k-1)\pi$ 且 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，证明：$\dfrac{1+\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan\dfrac{x}{2}}=\sec x+\tan x$．

证明

$$\begin{aligned}\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}&=\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}\\&=\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1+\sin x}{\cos x}\\&=\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\sec x+\tan x.\end{aligned}$$

7. 求下列各式的值：

(1) $\sin\left[\arccos\left(-\dfrac{\sqrt2}{3}\right)\right]$；　　(2) $\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{5}\right)$；

(3) $\cos\left[\arccos\dfrac{4}{5}+\arccos\left(-\dfrac{5}{13}\right)\right]$；　　(4) $\sin(\arctan2\sqrt2)$．

解　(1) 设 $x=\arccos\left(-\dfrac{\sqrt2}{3}\right)$，则 $\cos x=-\dfrac{\sqrt2}{3}$ 且 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin x=\dfrac{\sqrt7}{3}$，即

$$\sin\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt2}{3}\right)\right]=\frac{\sqrt7}{3}.$$

(2) 设 $x=\arccos\dfrac{3}{5}$，则 $\cos x=\dfrac{3}{5}$ 且 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}=\dfrac{4}{5}$，即

$$\cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}.$$

(3) $\cos\left[\arccos\frac{4}{5}+\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$

$=\cos\arccos\frac{4}{5}\cos\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)-\sin\arccos\frac{4}{5}\sin\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)$

$=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{5}{13}\right)-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{4}{13}-\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}=-\frac{56}{65}.$

(4) $\sin(\arctan 2\sqrt{2})=\sqrt{1-\cos^2(\arctan 2\sqrt{2})}=\sqrt{1-\frac{1}{\sec^2(\arctan 2\sqrt{2})}}$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{\tan^2(\arctan 2\sqrt{2})+1}}=\sqrt{1-\frac{1}{(2\sqrt{2})^2+1}}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

8. 在下列各题中，求由所给函数复合而成的函数，并求出这函数分别对应于所给自变量值的函数值：

(1) $y=\mathrm{e}^u,\ u=v^2,\ v=\cot x,\ x_1=\frac{\pi}{4},\ x_2=\frac{\pi}{2}$;

(2) $y=u^2,\ u=\mathrm{e}^v,\ v=\cot x,\ x_1=\frac{\pi}{4},\ x_2=\frac{\pi}{2}$.

解 (1) $y=\mathrm{e}^{\cot^2 x}$, $y\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\mathrm{e}^{\cot^2\frac{\pi}{4}}=\mathrm{e}$, $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}^{\cot^2\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}^0=1.$

(2) $y=\mathrm{e}^{2\cot x}$, $y\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\mathrm{e}^{2\cot\frac{\pi}{4}}=\mathrm{e}^2$, $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}^{2\cot\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}^0=1.$

9. 求下列函数的定义域，并且指出由哪些函数复合而成：

(1) $y=\arccos\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$； (2) $y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^2$； (3) $y=\ln(\csc\mathrm{e}^{x+1})$.

解 (1) $y=\arccos\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$ 的定义域是$[-1,3]$，由 $y=\arccos u$，$u=\sqrt[3]{v}$，$v=\frac{x-1}{2}$ 复合而成.

(2) $y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^2$ 的定义域是$[-1,1]$，由 $y=u^2$，$u=\arcsin v$，$v=\sqrt{w}$，$w=1-x^2$ 复合而成.

(3) $y=\ln(\csc\mathrm{e}^{x+1})$ 的定义域是 $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}(\ln 2k\pi-1,\ln(2k+1)\pi-1)$，由 $y=\ln u$，$u=\csc v$，$v=\mathrm{e}^w$，$w=x+1$ 复合而成.

10. 设 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$，求函数 $f(\arctan x)$ 的定义域.

解 由于 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$，所以

$$0\leqslant\arctan x\leqslant 1，即 0\leqslant x\leqslant\tan 1，$$

于是 $f(\arctan x)$ 的定义域是$[0,\tan 1]$.

复习题一

1. 选择题

(1) 函数 $y=3^{|x|}$ 的图形（　　）.

(A) 关于 y 轴对称　　(B) 关于 x 轴对称

(C) 关于原点对称　　(D) 关于原点和坐标轴都不对称

(2) 设 $[x]$ 是取整函数，则 $y=x-[x]$ 是（　　）.

(A) 无界函数　　(B) 单调函数　　(C) 偶函数　　(D) 周期函数

(3) 函数 $f(x)$ 为奇函数，则（　　）仍为奇函数.（注：此题为多选题）

(A) $f(x+a)-f(x-a)$　　(B) $f(x+a)+f(x-a)$

(C) $f(a+x)-f(a-x)$　　(D) $f(a+x)+f(a-x)$

(4) 若 $F(x)$ 为奇函数，则函数 $y=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$（其中 $a>0,a\neq 1$）为（　　）.

(A) 偶函数　　(B) 奇函数

(C) 既是奇函数又是偶函数　　(D) 非奇非偶函数

(5) 设 $M>0$，函数 $y=\lg(x+1)$ 在区间（　　）内有界.

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,+\infty)$　　(C) $(-1,M)$　　(D) $(0,M)$

(6) 若函数 $y=3+a^{x-1}$ $(a>0,a\neq 1)$ 的反函数图形恒过定点 P，则点 P 是（　　）.

(A) $(3,1)$　　(B) $(3+a,2)$　　(C) $(4,2)$　　(D) $(4,1)$

(7) 当（　　）时，函数 $f(x)=b^{-cx}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

(A) $b>1,c>0$　　(B) $b>1,c<0$　　(C) $0<b<1,c\geqslant 0$　　(D) $0<b<1,c<0$

(8) 下面函数中，不是初等函数的是（　　）.

(A) $y=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$　　(B) $y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$

(C) $y=\operatorname{sgn} x$　　(D) $y=\sin x$

(9) 函数 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域是（　　）.

(A) $[-1,1]$　　(B) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　(C) $[0,1]$　　(D) $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

分析　(1) 选 A. 因为 $y=3^{|x|}$ 是偶函数.

(2) 选 D. (A) 是有界函数，因为 $|y|=|x-[x]|<1$；(B) 不是单调函数，因为 $y|_{x=0}=0=y|_{x=1}$，$y|_{x=0.2}=0.2>0.1=y|_{x=1.1}$，$y|_{x=3.7}=0.7<0.9=y|_{x=1.9}$；(C) 不是偶函数，因为 $y|_{x=1.2}=1.2-[1.2]=0.2$，但 $y|_{x=-1.2}=-1.2-[-1.2]=0.8\neq y|_{x=1.2}$；(D) 是周期函数，因为 $(x+1)-[x+1]=x-[x]$，即1是周期.

(3) 选 BC. (A) $f(-x+a)-f(-x-a)=-f(x-a)+f(x+a)=f(x+a)-f(x-a)$；

(B) $f(-x+a)+f(-x-a)=-f(x-a)-f(x+a)=-[f(x+a)+f(x-a)]$；

(C) $f(a-x)-f(a+x)=-[f(a+x)-f(a-x)]$；

(D) $f(a-x)+f(a+x)=f(a+x)+f(a-x)$.