

中国矿业大学新世纪教材建设工程资助教材

矿山岩体力学

Kuangshan Yanti Lixue

王作棠 周华强 谢耀社 编著



地下开挖体

中国矿业大学出版社

China University of Mining and Technology Press

内 容 简 介

本书结合采矿岩体工程的特点,首先讲述了矿山岩石力学的特点、研究对象、研究范围和研究方法,然后阐述了应力和应变、弹性力学基本理论与方法、岩石的物理力学性质、岩体的力学性质、矿山岩体内应力的重新分布等内容,最后介绍了地应力测量原理与技术方法。本书的编写注重理论与实践相结合,反映了国内外的最新动态,叙述简明扼要。

本书是采矿工程专业本科生的基础课教材,也可作为高职高专院校采矿工程、矿山建设等专业的教材,同时也可供与矿山有关的广大工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

矿山岩体力学/王作棠,周华强,谢耀社编著. —徐州:

中国矿业大学出版社,2007.12(2008.10重印)

ISBN 978 - 7 - 81107 - 766 - 7

I. 矿… II. ①王…②周…③谢… III. 矿山—岩体力学
IV. TD31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 163022 号

书 名 矿山岩体力学

编 著 王作棠 周华强 谢耀社

责任编辑 潘俊成 郭 玉

出版发行 中国矿业大学出版社

(江苏省徐州市中国矿业大学内 邮编 221008)

网 址 <http://www.cumtp.com> E-mail cumtpvip@cumtp.com

排 版 中国矿业大学出版社排版中心

印 刷 徐州中矿大印发科技有限公司

经 销 新华书店

开 本 787×1092 1/16 印张 12.25 字数 306 千字

版次印次 2007 年 12 月第 1 版 2008 年 10 月第 2 次印刷

定 价 27.00 元

(图书出现印装质量问题,本社负责调换)



了千余(2102)日取点重究形学核研育建味供会建学大业国中,号路附家寺关研室建实及
 。新澳的心京示兼井一故书,我普的普学,家寺书内国参书了限臣中书。但资源出
 。五讲野讲普着新烈,伏之只不味疑能书书受教中书,期视平水普非干由

前 言

矿山岩体力学是岩体力学的一个分支,众多的专家和学者投入到岩体力学的研究工作中。国内外的岩体力学教材、专著甚多,但是结合矿山井巷工程设计与施工、矿山压力与岩层控制的基础理论——矿山岩体力学的教材和专著较少,并且其深度、层次和适应面也各不相同。

本教材基于作者多年讲授矿山压力及其控制和矿山岩体力学的体会,在经过多年试用的原有讲义的基础上,结合矿山岩体力学近年来的科研成果编写而成。其基本思路和内容有如下:

1. 矿山岩石力学是采矿工程的基础理论之一。本书首先讲述了矿山岩石力学的特点、研究对象、研究范围和研究方法。
2. 矿山岩体力学的基础理论是弹性力学。本书根据采矿工程本科教学不设弹性力学课程的特点,分两章讲述了岩体力学中应力、应变和位移的基本概念,以及弹性力学的基本理论与方法。
3. 矿山工程面对的是煤系地层的岩石和岩体。本书重点讲述沉积岩石的物理性质、强度理论、破坏准则和变形特性。
4. 从岩石学的角度考虑,岩石与岩体没有区别,而从岩体力学考虑,岩石与岩体是不可分的,又是有区别的,其主要区别在于岩石与岩体的结构构造。处于不同岩石类型和不同结构的岩体中的矿山岩体工程,又具有不同的力学特征。因此,本书讲述了岩体的基本概念、结构性质、变形特性、强度特性以及岩体质量评价与分类。
5. 结合采矿岩体工程特点,重点讲述了矿山岩体内应力的重新分布规律和新成果,包括水平圆形、椭圆形和矩形硐室围岩应力分布计算,多孔时的围岩应力分布,回采空间周围应力重新分布和支承压力在底板岩层中的传播。
6. 最后,重点讲述采矿岩体工程中地应力测量的原理与技术,包括地应力的基本概念、基本分布规律,地应力的直接测量法和间接测量法。

岩石力学是一门实验科学。本书在教学期间安排了6个学时的岩石力学实验课,并以附录的形式给出四个岩石力学实验报告和实验记录表。

本教材力图对矿山岩体力学的基本概念、基本理论和基本方法进行系统全面的总结,力求做到内容新颖并具有一定的专业深度,同时也具有较强的实用性。全书共分7章,第1、4、5章由王作棠编写,第2、3章由谢耀社编写,第6、7章由周华强编写,全书由王作棠统稿并定稿。

本教材的编写得到了中国矿业大学能源与安全工程学院、煤炭资源与安全开采国家重点

点实验室有关专家的指导,中国矿业大学教务处和教育部科学研究重点项目(02019)给予了出版资助。书中引用了许多国内外专家、学者的著述,在此一并表示衷心的感谢。

由于作者水平所限,书中难免存在错误和不足之处,恳请读者批评指正。

王作棠

2007年5月

111	岩体物理力学	4.2
151	类代其又份平量测科岩	2.2
151	非代稀置的代强内科岩山下	章 6 第
158	第 1 章 结 论	1.0
161	算代代强岩固室研研固研平木中科岩封靴	2.0
161	第 1 章 结 论	1
161	1.1	矿山岩石力学的研究对象	1
161	1.2	岩石力学的发展	2
162	1.3	矿山岩石力学的特点及其研究范围	3
162	1.4	矿山岩石力学的研究目的和方法	4
162	对岩石对周围物理环境中力学的反应。该定义是由美国岩石力学委员会在 1964 年提出	
162	第 2 章 应力和应变		6
162	2.1	概述	6
163	2.2	体力和面力	6
163	2.3	应力变换	9
167	2.4	主应力和应力不变量	11
167	2.5	平面问题和双轴应力	13
168	2.6	位移和应变	15
168	2.7	主应变、应变变换、体应变和偏斜应变	19
168	2.8	岩土力学中关于位移、应变和应力的规定	20
168	岩体是矿山岩石力学的主要研究对象。学习岩体力学的主要目的是为了掌握岩体工程建设的	
168	第 3 章 弹性力学基本理论与方法		22
168	3.1	概述	22
168	3.2	基本方程	24
168	3.3	边界条件与圣维南原理	29
168	3.4	按位移求解平面问题	33
168	3.5	按应力求解平面问题	35
168	(1) 岩体是非均质各向异性体。一定范围内的岩体由许多不同种类的岩石构成。每种	
168	第 4 章 岩石的物理力学性质		50
168	4.1	岩石的物理性质	51
168	4.2	岩石的强度	56
168	4.3	岩石的破坏准则及测试方法	67
168	4.4	岩石的变形	78
168	构造应力和重力是岩体产生力学现象的驱动力。	
168	第 5 章 岩体的力学性质		96
168	5.1	岩体的基本概念	96
168	5.2	岩体结构	97
168	5.3	岩体的变形特性	111

由于作者水平有限,书中难免存在错误和不足之处,恳请读者批评指正。

5.4	岩体的强度特性	114
5.5	岩体质量评价及其分类	121
第6章	矿山岩体内应力的重新分布	127
6.1	弹性岩体中水平圆形洞室围岩应力计算	128
6.2	弹性岩体中水平椭圆形洞室围岩应力计算	144
6.3	弹性岩体中水平矩形洞室围岩应力分布	147
6.4	存在多个孔时的周围应力分布	149
6.5	回采空间周围应力重新分布	151
6.6	围岩的极限平衡与支承压力分布	152
6.7	支承压力在底板岩层中的传播	155
第7章	地应力测量原理与技术	158
7.1	岩体中的自重应力与构造应力	158
7.2	地应力分布的一些基本规律	162
7.3	地应力的直接测量法	169
7.4	地应力的间接测量法	176
附录		181
实验一	测定岩石的静力变形参数	181
实验二	岩石的单轴抗压强度试验	183
实验三	岩石的抗拉强度试验(劈裂法)	184
实验四	测定岩石的抗剪断强度试验	186
参考文献		189

第 1 章 绪 论

1.1 矿山岩石力学的研究对象

岩石力学是研究岩石的力学性状的一门理论和应用科学,它是力学的一个分支,是探讨岩石对周围物理环境中力场的反应。该定义是由美国岩石力学委员会在 1964 年提出后在 1974 年修改而成的,其英语表达为“Rock mechanics is the theoretical and applied science of the mechanical behavior of rock and rock masses; it is that branch of mechanics concerned with the response of rock and rock masses to the force fields of their physical environment”,该定义在国际岩石力学界得到了广泛的认同。

本门课程所谓的矿山岩石力学是岩石力学的重要组成部分。矿山岩石力学是研究采矿工程所影响的那一部分地壳内岩体的力学现象以及这些力学现象规律的科学。具体探讨矿山岩体在力场作用下所发生的变形、破坏和移动的规律,据此对井巷和采场的稳定性进行分析,为采矿工程设计和维护安全生产提供理论依据,以便有效地开采矿产资源。

岩体是矿山岩石力学的主要研究对象,学习矿山岩石力学,首先必须对岩体有一个明确的认识,这样才便于研究它。

岩体是地质体,它的形成延续了漫长的地质年代。在岩体形成和存在的整个地质历史中,由于受各种地质作用的影响和各种构造力的作用,使岩体遭到不同程度的地质破坏。因此,它不同于其他力学所研究的材料。岩体具有多种多样复杂的特性,即使是由相同物质组成的岩体,也会存在很大的差异,这就是岩体性质非常复杂的根本原因。

从岩石力学观点上看,其所研究的对象具有如下特点:

(1) 岩体是非均质各向异性体。一定范围内的岩体由许多不同种类的岩石构成,每种岩石所包含的矿物成分又各不相同,矿物颗粒的形状与大小及其空间排列方式也有很大的差异,所以其物理力学性质相差甚远。于是构成了岩体组成的非均质和物理力学性质的各向异性。

(2) 岩体内存在着初始应力场(原岩应力场)。岩体在形成过程中及形成以后由于受各种地质构造作用的影响,在岩体内存在着构造应力。又因岩体本身受地心吸引而形成重力,构造应力和重力是岩体产生力学现象的原动力。

构造应力场以水平应力为主。地球自转角速度的变化产生地壳水平方向的运动是造成构造应力以水平应力为主的重要原因。重力应力场以铅垂应力为主,这是由于岩体受地心吸引的结果。因而,原岩应力场的存在直接影响岩体的应力状态和地压显现的规律。

(3) 岩体内存在着裂隙系统。由于岩体在形成过程中及形成以后受各种构造应力的作

用,在岩体中产生了一系列层理节理、裂隙和断层,这些弱面将岩体切割成岩块,使岩体的完整性和均匀性遭到破坏。同时,由于弱面本身的种类和成因不同,其力学性质也不一样,因此岩体是非常复杂的非均质各向异性体。所以,岩体既是断裂的,又是连续的,是断裂与连续的统一体,可称为裂隙介质或准连续介质。

从上述特点可知,岩体既不是理想的弹性体,也不是典型的塑性体;既不是连续介质,也不是松散介质,而是一种特殊的、复杂的地质体,这就造成了研究它的困难性和复杂性。因此,若只用一般的固体力学理论尚不能完善地解决岩体工程中的所有问题。

1.2 岩石力学的发展

岩石力学最早起源于采矿工程,是为了满足采矿工程的需要而产生的。天然岩体(原岩)本来处于自然平衡状态,由于开采矿床必须在岩体中开挖各式各样的空间(如巷道、采场),这就破坏了岩体的自然平衡状态。未受开挖和采动影响的岩体,在原岩应力场作用下处于相对稳定状态,即自然平衡状态。当岩体被开挖和采动后,由于采掘空间对岩体应力场的扰动,改变了岩体初始应力场的分布状态。岩体受到扰动后,新出现的应力场称为次生应力场。岩体在此新出现的不平衡应力场的作用下,就要发生变形、破坏和移动,直到达到新的平衡状态为止。

通常把次生应力场所引起的岩体变形、破坏和移动的全过程称为矿山压力(简称地压)的显现,把地压显现中某一阶段的具体表现称为地压显现。地压显现从采矿工程开始开挖就出现并贯穿于开采工程的全过程。随着采矿工业的发展,人们对地压的认识逐步深化并寻找到其显现的一些规律,用这些规律指导生产实践就出现了岩石力学的雏型。作为一门科学,岩石力学的发展大致可分为以下几个阶段。

20世纪以前,岩石力学处于萌芽阶段。在这个阶段,由于生产规模较小,开采深度近于地表,开采空间不大,岩石力学主要研究的问题是巷道顶板冒落和地下开采所引起的岩石移动。我国明末科学家宋应星在1637年编著的《天工开物》(我国古代科学技术名著)中记载了大量矿山开采问题。1864年英国工程师古德思维提出地表移动范围主要取决于采矿方法、岩石性质、矿床倾角和开采深度,这一论断在岩石移动的研究中至今仍起着重要的作用。此外,在西欧最主要的煤层开采中,开始使用仪器观测地表变形,并提出保安煤柱和地表移动范围的实用规范。在这个时期内,研究人员注意的问题基本上是岩体外部的力学现象,所提出的关系在很大程度上具有经验性,没有反映地压与岩体力学性质参数之间的关系。

20世纪初到20世纪50年代为岩石力学发展的第二阶段。在这个阶段,松散介质学派占主导地位,他们借助力学理论解决岩石力学问题,提出巷道地压计算原理和采场地压假说。如M. M. 普洛托基雅可诺夫提出了计算巷道地压的自然平衡拱理论和K. 太沙基提出了由于地层应力传递所引起的巷道地压的计算方法。在地压研究方法方面,开始采用模拟法研究巷道和采场围岩的应力分布、变形和破坏过程。光弹模拟和相似材料模拟相继出现,开始利用模型研究所得的结果推断现场可能出现的地压现象。在研究设备上,20世纪初试制成功的卡曼型三轴(假三轴)试验机,为研究岩石力学性质提供了良好的条件。在矿柱设计方面,已应用面积承压理论来计算矿柱的尺寸。“三下”(水体下、铁路及公路下、建筑物下)开采取得了较大的进展。

总之,这个阶段人们更加深入地研究了岩石破坏的机理,将岩体作为松散介质或弹性介质,用连续介质力学或弹性理论研究岩体的应力、变形和位移。应当指出,在这个时期无论哪种地压计算方法均只考虑岩体重力,并未计入构造应力的影响。

从20世纪50年代到现在是岩石力学发展的第三阶段,即岩石力学发展的现代阶段。20世纪50年代初期,岩石力学以弹塑性理论为基础,将岩体视为弹塑性介质,应用弹塑性力学方法来研究岩体的应力、变形和位移。目前又在弹塑性分析的基础上引入了流变理论,将某些岩体视为黏性介质,从而考虑了时间因素对岩体应力、变形及位移的影响。

随着电子计算技术的发展,用有限元解算岩石力学问题得以实现。目前,这种计算方法既能解算线性问题,又能解算非线性问题。单元的划分可计入岩体结构特征和节理的影响,但因矿山压力的影响因素复杂,有限元法仍不能从定量的角度解决工程实际问题。它往往只能作为解析法的参考,对岩体应力状态作定性分析。近年来出现的边界元法、离散元法是建立在严密的数学基础上的,对单一介质简单边界问题的处理比有限元法速度快、误差小。

岩石力学从20世纪70年代起发展比较迅速,有关国际岩石力学会议相继召开,先后发表了大量论文。此后,岩体力学测试技术也逐渐完善,应力解除法及水压致裂法均可测出较深处的岩体应力。刚性试验机的出现,岩石应力—应变全过程曲线的测得,不仅更深刻地揭示了岩石的力学特性,同时对工程实践具有更大的指导作用和更重要的理论意义。在新奥法施工中,岩体位移测量技术取得了新的成就。

综上所述,岩石力学发展到现阶段,已逐渐形成了完整的科学体系,作为力学的一个分支,成为一门独立的力学学科,服务于各种矿山工程。

1.3 矿山岩石力学的特点及其研究范围

随着矿压研究的广泛开展和不断深入,人们越来越多地认识了岩石的力学性质和开采过程中岩体内所发生的自然力学现象和规律,在此基础上逐渐形成了一个新的学科分支——矿山岩石力学。它既可看作是力学的一个应用学科,又可看作是采矿科学的一个组成部分。目前,采矿工业(或从某种程度上来说是能源开发)中许多重要问题的解决都离不开矿山岩石力学。

岩石力学萌芽于采矿工程,但是作为研究各种岩石的力学性质及其有关应用问题的一个学科来说,它并不是在采矿部门中独立形成的,而是伴随与岩石开挖有关的水利、工程地质、铁路交通、地下建筑、国防建设等许多工程部门的发展而逐渐形成的。所以,矿山岩石力学与这些部门中的同类学科有共同的理论基础和类似的研究方法。然而,矿山岩石力学与上述工程部门中的同类学科相比,又有自己的特点,这表现在以下几个方面。

(1) 采深大。其他工程部门在地下开挖的巷洞大都在离地表不深的地点,而采矿工程的作业地点常在地下几百米深处。目前我国煤矿最大开采深度已达千米,国外煤矿最深已达1450 m(德国),而金属矿山的采深有的达两三千米以上。

深部岩体动态与地表附近大不相同,地表附近岩体的破坏形式一般为脆性断裂,而较深处岩体则属黏塑性破坏,也就是说,地表附近岩体是由于丧失凝聚力而破坏,破坏形式往往是裂隙的扩张,是突发性的,而深部岩体的破坏则是某种程度的流动变形。其次,岩体的应力状态也不相同,浅部岩体垂直应力与水平应力之差一般很明显,而深部岩体却

相差不甚显著。上述情况使矿山岩石力学所采用的地压计算方法和测试技术与其他工程相比也有所不同。

由于深部岩石的应力状态和变形、破坏特性与浅部岩石往往有所不同,使矿山岩石力学遇到的问题更为复杂。

(2) 地下开采过程中安设的人工支护大多是服务年限不长或维护时间较短的临时结构物,只要求其在开采期间不致破坏或适时破坏,在开采后能维持平衡状态不危害地面安全即可,而且许多工程结构物还可以随采随废。所以,在计算精度、安全系数及岩体加固等方面的要求一般均低于水利水电、交通、建筑和国防等部门的标准。

(3) 由于采矿作业地点必须服从于有用矿物的自然埋藏地点,使得地下工程建筑物的位置选择往往受很大限制。

(4) 其他工程部门中研究的对象多是开挖后不再转移的地下硐室或隧道,而矿井的采掘工作面是不断移动的,这就要求矿山岩石力学必须考虑难以预见的复杂地质变化对工程结构带来的影响。由于大面积开采还会引起采空区上方大量岩层移动和破坏,研究这些岩层的移动、破坏和平衡规律及其控制方法,是矿山岩石力学的重要课题,这也是区别于其他应用性岩石力学学科的重要内容。

应当指出,对于煤矿开采来说,由于遇到的主要是层状岩体(岩层)的移动、破坏和平衡问题及其控制方法的研究,因此近年来在某些文献中也把与研究层状矿体开采有关的岩石力学称之为岩层力学(strata mechanics)和岩层控制(strata control)。

矿山岩石力学的研究内容很多,主要包括以下几个方面:

- ① 矿山岩石的物理性质;
- ② 矿山岩石的力学性质,包括在实验室或现场条件下测定岩石的基本力学参数等;
- ③ 岩石破坏机理和岩石强度理论;
- ④ 地下原岩体中应力状态和巷硐周围岩体中应力重新分布的规律;
- ⑤ 岩体中应力测试问题;
- ⑥ 开采后岩体变形、破坏和移动的规律;
- ⑦ 巷道和采煤工作面中的矿压显现规律;
- ⑧ 正常开采时和特殊情况下各种矿压控制手段和方法;
- ⑨ 矿山岩石力学实验室研究手段和方法;
- ⑩ 矿压假说和理论。

1.4 矿山岩石力学的研究目的和方法

矿山岩石力学的研究目的,主要是总结生产实践中矿山压力显现的客观规律和控制方法,提出防止和消除地压危害的措施,研究利用地压落矿的方法,并以矿山岩石力学的理论为指导进行矿山设计、施工和生产,以便在安全、经济、高强度、高指标的原则下最大限度地开采地下资源。

矿山岩石力学的研究方法是科学实践和理论分析相结合,二者互相联系,互相促进。科学实验是理论分析的基础,理论是指导实践的根据。例如,确定岩体的物理力学参数是岩石试验中大量而普遍的工作,这项工作的直接目的是为工程服务,同时,这些实验资料的积累

又是发展理论研究的基础。

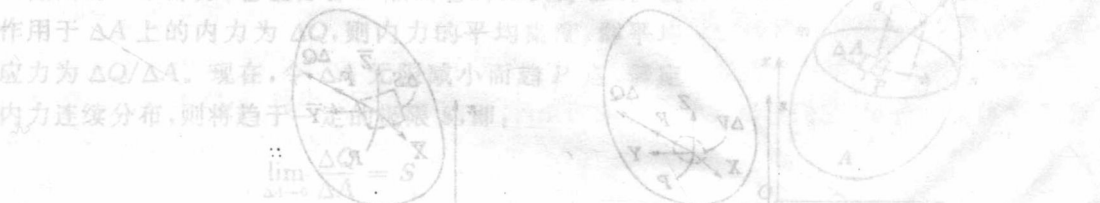
科学实验(包括实验室与现场实验、模拟实验与现场原位测量)是岩石力学理论形成和发展的坚实基础。一方面,岩石力学中概念和理论的产生以生产实践和科学实验为根据;另一方面,其概念与理论的发展需要科学实验和生产实践的检验和证实。

岩石力学是一门技术科学,它要求研究人员除掌握岩石力学的基础理论和有关知识外,还必须通晓其所服务部门的有关工程知识。只有这样才能取得理论与实践相结合的研究成果,解决工程实际问题。

所谓面力,是分布在物体表面上的力。典型的面力如风力、流体压力、重力等。面力的单位是 Pa。

物体表面上各点受面力的情况,通常是不均匀的。为了研究物体在面力作用下的平衡,常取物体的一小部分,即取一微元体,如图 2-1(b)所示。设作用于 ΔS 的面力为 ΔQ 。当 ΔS 无限小时,面力 ΔQ 与 ΔS 之比即为该点的面力,即应力。应力是面力在单位面积上的作用,其方向与面力的方向相同。应力的单位是 Pa。

为了研究物体在某一点 P 处的内力,假想用经过 P 点的一个截面 $m-m$ 将该物体分为 A 和 B 两部分,而将 B 部分撤开(图 2-2)。撤开的部分 B 将在截面 $m-m$ 上对留下的部分 A 作用一定的内力。取这一截面的一小部分,它包含着 P 点而它的面积为 ΔA 。



这个极限矢量 S 就是物体在截面 $m-m$ 上的、在 P 点的应力,称其为应力矢量,因为 (ΔQ) 是标量,所以应力矢量 S 的方向就是 ΔQ 的极限方向。

对于应力,除了在推导某些公式的过程中以外,通常不用它来描述物体的平衡。因为物体在应力作用下的平衡,是由物体内部各点的应力和材料强度决定的。应力是物体内部各点受力的度量,其方向与面力的方向相同。应力的单位是 Pa。

第2章 应力和应变

2.1 概述

岩石力学中经常用到外力、应力、应变和位移等基本概念,对于这些概念的理解是合理而有效地评价岩体对采矿活动反映的基础,虽然这些基本概念在相关学习的材料力学中已经用到过,但在这里仍有再加以详细说明的必要。

采矿活动中开挖巷道,采取煤炭或矿石的采场周围的岩石承受重力、构造力和其他力的作用,并经受采掘活动引起的应力的重新分布,在分析岩石受力的时候,考虑到任何地下矿山井巷工程的面积范围相对于地球表面面积总是很小的,一般情况下地球的球形可以不必考虑,采矿可看作是在具有确定的初始应力状态的无限或半无限空间内进行的。

为了便于参阅一般工程力学书籍,以下讨论应力、应变,均先遵守工程力学的一般规定,即:法向拉应力为正,由正法向应力方向确定任一表面上正剪应力方向。在树立起清晰、明确的相关概念以后,本章的最后再介绍正应力方向的岩土力学规定。

2.2 体力和面力

作用于物体的外力可以分为体力和面力两种类型。

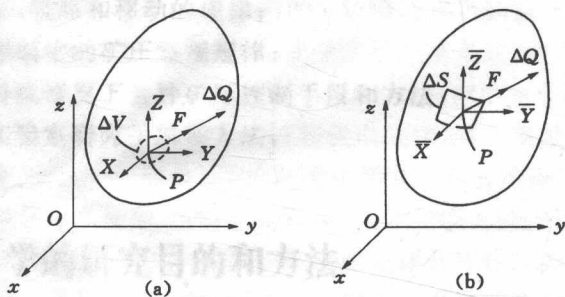


图 2-1

所谓体力,就是分布在物体体积内的力。典型的体力有重力、惯性力、电磁力等。体力分量以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负,其单位是 N/m^3 。

为了表明物体在坐标系 $Oxyz$ 内的某一点 P 所受体力的大小和方向,在 P 点的邻域取一包含 P 在内的微小体积元素 ΔV [图 2-1(a)], 设 ΔV 所受的体力为 ΔF , 则体力按体积计算的平均集度为 $\Delta F/\Delta V$, 当 ΔV 无限缩小而趋于 P 点时,如果把所取的那一小部分物体不

断减小,即 ΔV 不断减小,则 ΔQ 和 $\Delta Q/\Delta V$ 都将不断地改变大小、方向和作用点。现在,令 ΔV 无限减小而趋于 P 点,假定体力为连续分布,则 $\Delta Q/\Delta V$ 将趋于一定的极限 F ,即:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = F$$

这个主极限矢量 F 就是该物体在 P 点所受力的集度。因为 ΔV 是标量,所以 F 的方向就是 ΔQ 的极限方向。矢量 F 在坐标轴 x, y, z 上的投影分别为 f_x, f_y, f_z ,称为该物体在 P 点的体力分量,以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。它们的因次是[力][长度]⁻³。

所谓面力,是分布在物体表面上的力。典型的面力如风力、流体压力、两物体间的接触力等。面力的单位是 Pa。

物体表面上各点受面力的情况一般也是不相同的。为了表明该物体在表面上某一点 P 所受面力的大小和方向,在这一点取该物体表面的一小部分,它包含着 P 点而它的面积为 ΔS [图 2-1(b)]。设作用于 ΔS 的面力为 ΔQ ,则面力的平均集度为 $\Delta Q/\Delta S$ 。与上相似,令 ΔS 无限减小而趋于 P 点,假定面力为连续分布,则 $\Delta Q/\Delta S$ 将趋近于一定的极限 F ,即:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = F$$

这个极限矢量 F 就是该物体在 P 点所受面力的集度。因为 ΔS 为标量,所以 F 的方向就是 ΔQ 的极限方向。矢量 F 在坐标轴 x, y, z 上的投影分别 $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$,称为该物体在 P 点的面力分量,以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。它们的因次是[力][长度]⁻²。

物体受外力以后,其内部将发生内力,即物体本身不同部分之间相互作用的力。为了研究物体在其某一点 P 处的内力,假想用经过 P 点的一个截面 mn 将该物体分为 A 和 B 两部分,而将 B 部分撤开(图 2-2),撤开的部分 B 将在截面 mn 上对留下的部分 A 作用一定的内力。取这一截面的一小部分,它包含着 P 点而它的面积为 ΔA 。设作用于 ΔA 上的内力为 ΔQ ,则内力的平均集度,即平均应力为 $\Delta Q/\Delta A$ 。现在,令 ΔA 无限减小而趋 P 点,假定内力连续分布,则将趋于一定的极限 S ,即:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = S$$

这个极限矢量 S 就是物体在截面 mn 上的、在 P 点的应力,称其为应力矢量。因为 ΔA 是标量,所以应力矢量 S 的方向就是 ΔQ 的极限方向。

对于应力,除了在推导某些公式的过程中以外,通常不用它沿坐标轴方向的分量,因为这些分量与物体的形变或材料强度没有直接的关系。与物体的形变和材料强度直接相关的,是应力在其作用截面的法线方向及切线方向的分量,也就是正应力 σ 及剪应力 τ (图 2-2)。应力及其分量的因次是[力][长度]⁻²。

显然可见,在物体内的同一点 P ,不同截面上的应力是不同的。为了分析这一点的应力状态,即各个截面上应力的大小和方向,在这一点从物体内取出一个微小的正平行六面体,它的棱边平行于坐标轴而长度为 $PA=\Delta x, PB=\Delta y, PC=\Delta z$ (图 2-3)。将每一面上的应力

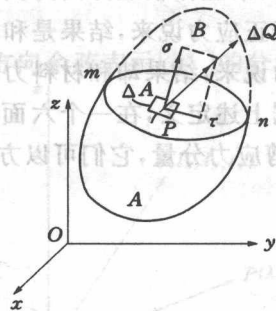


图 2-2

分解为一个正应力和两个剪应力,分别与三个坐标轴平行。正应力用 σ 表示。为了表明这个正应力的作用面和作用方向,加上一个下标字母。例如正应力 σ_x 是作用在垂直于 x 轴的面上,同时也是沿着 x 轴的方向作用的。剪应力用 τ 表示,并加上两个下标字母,前一个字母表明作用面垂直于哪一个坐标轴,后一个字母表明作用方向沿着哪一个坐标轴。例如,剪应力 τ_{xy} 是作用在垂直于 x 轴的面上而沿着 y 轴方向作用的。

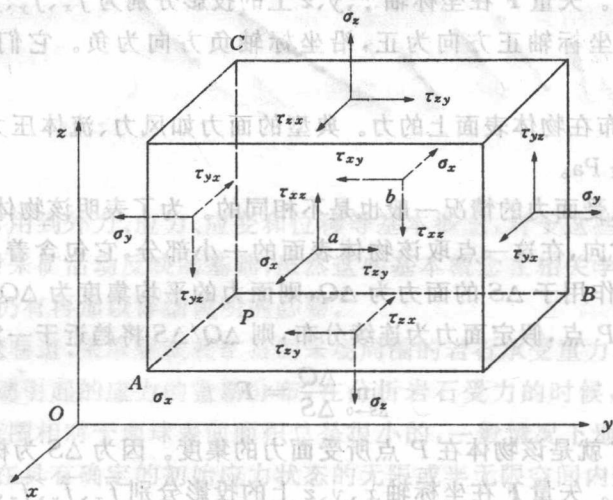


图 2-3

如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的正方向,这个截面就称为一个正面,而这个面上的应力就以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。相反,如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的负方向,这个截面就称为一个负面,而这个面上的应力就以沿坐标轴负方向为正,沿坐标轴正方向为负。图 2-3 上所示的应力全都是正的。注意,虽然上述正负号规定对于正应力说来,结果是和材料力学中的规定相同(拉应力为正而压应力为负),但是对于剪应力说来,结果却和材料力学中的规定不完全相同。

根据上述定义,在一个六面体上作用的力可以分为 9 个应力分量,其中 3 个正应力分量,6 个剪应力分量,它们可以方便地用应力矩阵 $[\sigma]$ 的形式写出,即:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

6 个剪应力之间具有一定的互等关系。例如,以连接六面体前后两面中心的直线 ab 为矩轴,列出力矩平衡方程,得:

$$2\tau_{yz} \Delta z \Delta x \frac{\Delta y}{2} - 2\tau_{xy} \Delta y \Delta x \frac{\Delta z}{2} = 0$$

同样,可以得出其余两个相似的方程,简化以后,有:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2-2)$$

这就证明了剪应力的互等性:作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的剪应力是互等的(大小相等,正负号也相同)。因此,剪应力记号的两个下标字母可以对调。

在这里,我们没有考虑应力由于位置不同而有的变化,也就是把六面体中的应力当作均

匀应力,而且也没有考虑体力的作用。以后可见,即使考虑到应力的变化和体力的作用,仍然可以推导出剪应力的互等性。

此外,如果采用材料力学中的正负号规定,则剪应力的互等性应表示成为 $\tau_{yz} = -\tau_{zy}$, $\tau_{xz} = -\tau_{zx}$, $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$, 显然不如采用上述规定时来得简单。但也应当指出,在利用莫尔圆(应力圆)时,必须采用材料力学中的规定。

以后可见,在物体的任意一点,如果已知 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ 这 6 个应力分量,就可以求得经过该点的任意截面上的正应力和剪应力。因此,定义一点的全部应力状态只需要 6 个应力分量。那么,式(2-1)的应力矩阵可写成:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

2.3 应力变换

确定应力状态时参照轴方向的选定是任意的,对于所研究的问题来说,会产生不同的情况,其中选择某一特定方位的参考坐标系更为方便。图 2-4 表示一组旧坐标系(x, y, z)和新坐标系(l, m, n)。某一特定轴,例如 l 轴,相对于原坐标轴 x, y, z 的方向可以用方向余弦(l_x, l_y, l_z)的行矢量定义。在该矢量中, l_x 表示平行于 l 轴方向的单位矢量在 x 轴上的投影,对 l_y 和 l_z 也有同样的定义。同样地, m 和 n 轴相对于原坐标轴的方向分别由方向余弦(m_x, m_y, m_z)和(n_x, n_y, n_z)的行矢量定义。相对于 l, m, n 轴的一点的应力状态也可用应力矩阵 $[\sigma^*]$ 表示。

$$[\sigma^*] = \begin{bmatrix} \sigma_l & \tau_{lm} & \tau_{ln} \\ \tau_{lm} & \sigma_m & \tau_{mn} \\ \tau_{ln} & \tau_{mn} & \sigma_n \end{bmatrix}$$

分析上要求用 $[\sigma]$ 分量和 l, m, n 轴相对于 x, y, z 轴的方向余弦表示 $[\sigma^*]$ 的分量。

图 2-4 表示用于确定应力矩阵分量从单元正六面体上切割的四面体 $Oabc$ 被面 abc 切去的那部分材料由作用在面 abc 的每单位面积的数值为 t 的平衡力替换。假设面 abc 的外法线 OP 用方向余弦($\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$)的行矢量定义。

如果面 abc 的面积为 A ,面 abc 在其法线分别为 x, y, z 轴的各平面上的投影面积由下式给出:

$$Oac \text{ 面} = A_x = A\lambda_x;$$

$$Oab \text{ 面} = A_y = A\lambda_y;$$

$$Obc \text{ 面} = A_z = A\lambda_z$$

假定牵引力矢量 t 的分量为 t_x, t_y, t_z 。利用 x 方向的平衡条件得出:

$$t_x A - \sigma_x A\lambda_x - \tau_{xy} A\lambda_y - \tau_{xz} A\lambda_z = 0 \quad (2-4)$$

或:

$$t_y = \sigma_x \lambda_x + \tau_{xy} \lambda_y + \tau_{xz} \lambda_z$$

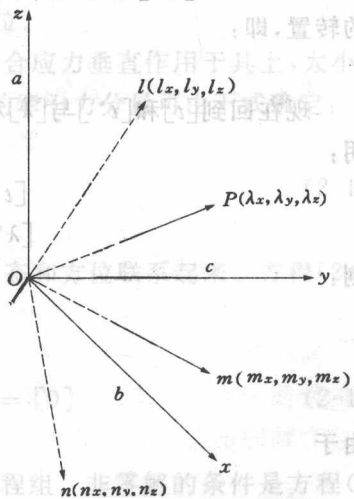


图 2-4 确定应力变换方程、主应力及其方向的割离体图

方程(2-4)表示牵引力分量、应力状态和通过该点的表面的方向之间的重要关系。对于 t 和 z 同样可得到类似于方程(2-4)的平衡方程,于是三个平衡方程可写成:

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

或: $[t] = [\sigma][\lambda]$

对于另一组坐标轴 l, m, n ,以同样的方法保持切割面的总体方位不变以形成切割四面体,将所有牵引力和应力分量在坐标系 l, m, n 中表达出来,则有如下关系式:

$$\begin{bmatrix} t_l \\ t_m \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_l & \tau_{lm} & \tau_{nl} \\ \tau_{lm} & \sigma_m & \tau_{nm} \\ \tau_{nl} & \tau_{nm} & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_l \\ \lambda_m \\ \lambda_n \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

或: $[t^*] = [\sigma^*][\lambda^*]$

在方程(2-6)和方程(2-8)中, $[t], [t^*], [\lambda], [\lambda^*]$ 是与 x, y, z 和 l, m, n 坐标系有关的矢量。这些矢量表示作用在具有固定方位的面上的牵引力分量和该面外法线的方向余弦。根据初等的矢量分析,矢量 $[V]$ 按如下变换方程从一组正交参考轴 x, y, z 变换到另一组轴 l, m, n 。

$$\begin{bmatrix} v_l \\ v_m \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

或: $[V^*] = [R][V]$

在该表达式中, $[R]$ 为旋转矩阵,该矩阵的行可看作是由新轴相对于旧轴的方向余弦的行矢量组成的。像 Jennings(1997)所论证的那样,该旋转矩阵的唯一性质是其逆阵等于它的转置,即:

$$[R]^{-1} = [R]^T \quad (2-10)$$

现在回到 $[t]$ 和 $[t^*]$ 与 $[\lambda]$ 和 $[\lambda^*]$ 之间的关系式,方程(2-9)和方程(2-10)表示的结果表明:

$$\begin{aligned} [t^*] &= [R][t] \text{ 或 } [t] = [R]^T[t^*] \\ [\lambda^*] &= [R][\lambda] \text{ 或 } [\lambda] = [R]^T[\lambda^*] \end{aligned}$$

则: $[t^*] = [R][t]$

$$\begin{aligned} &= [R][\sigma][\lambda] \\ &= [R][\sigma][R]^T[\lambda^*] \end{aligned}$$

由于 $[t^*] = [\sigma^*][\lambda^*]$

于是: $[\sigma^*] = [R][\sigma][R]^T$