[redacted]"普通高等教育本科国家级规划教材

复变函数与积分变换 第五版

华中科技大学数学与统计学院
李红 谢松法

高等教育出版社

普通高等教育本科国家级规划教材

复变函数与积分变换 第五版

华中科技大学数学与统计学院
李红 谢松法

高等教育出版社·北京

内容提要

本书介绍复变函数与积分变换的基本概念、理论和方法。全书共分9章，主要内容包括：复数与复变函数，解析函数，复变函数的积分，解析函数的级数表示，留数及其应用，共形映射，解析函数在平面场的应用，傅里叶变换，拉普拉斯变换等。

本书每章的后面给出本章小结及若干思考题，便于读者复习和总结；同时每章还配备了一定数量的习题并在书后给出习题的答案或提示。附录中附有傅里叶变换简表和拉普拉斯变换简表，可供学习时查用。

本书可作为高等院校工科类各专业学生的教材，也可供相关专业科技工作者和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/李红，谢松法编. --5版. --北京：高等教育出版社，2018.10
ISBN 978-7-04-050481-1

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①李… ②谢… Ⅲ. ①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ. ①O174.5②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第203388号

策划编辑 于丽娜　责任编辑 于丽娜　封面设计 李小璐　版式设计 马 云
插图绘制 于 博　责任校对 刘娟娟　责任印制 耿 轩

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	北京市鑫霸印务有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	14.75	版　次	1999年8月第1版
字　数	240千字		2018年10月第5版
购书热线	010-58581118	印　次	2018年10月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	28.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 50481-00

第五版前言

华中科技大学复变函数与积分变换课程2009年入选国家精品课程,2013年开始"国家级精品资源共享课"立项建设,并在"爱课程"网上线,2016年该课程被评为第一批"国家级精品资源共享课",2017年复变函数与积分变换MOOC在"中国大学MOOC"上线,该课程由华中科技大学数学与统计学院复变函数与积分变换课程组教师以本教材为蓝本讲授。

在"互联网+"的发展背景下,为适应当前教材出版的新形势,本次修订结合已上线的MOOC,将教学视频资源的应用作为修订的重点。我们精选48个MOOC视频,在每一章添加若干讲解视频,包括重要知识点、疑难解析、典型例题等,将其与纸质教材内容有机配合,进行一体化设计,从而丰富并拓展了知识的呈现形式,在每一章增加单元自测题,便于读者更好地理解和掌握所学知识。读者可以通过扫描书中二维码观看视频或者进行自测,也可登录"中国大学MOOC"学习完整课程。

本教材在读者的呵护下已走过了20年的历程,其间得到了许许多多的鼓励和建议,在此表示衷心感谢。限于编者水平,新版中仍难免存在不足,欢迎广大专家、同行与读者批评指正。在使用过程中,如果发现问题和错误,欢迎与编者联系。

编　者

hongli@hust.edu.cn

xiesongfa@126.com

2018年4月于华中科技大学

第一版前言

复变函数课程的主要内容是讨论复数之间的相互依赖关系，其主要研究对象是解析函数。

复变函数论是一门古老而富有生命力的学科。早在19世纪，柯西、魏尔斯特拉斯及黎曼等人就已给这门学科奠定了坚实的理论基础。作为一种有力的工具，复变函数论广泛地应用于自然科学的众多领域，如理论物理、空气动力学、流体力学、弹性力学、地质学及自动控制学，等等。

第二版序

一般而言，积分变换是通过积分运算，把一个函数变成另一个函数的变换。这里所说的积分变换是指傅里叶变换与拉普拉斯变换，它与复变函数有着密切的联系。它的理论与方法不仅在数学的许多分支中，而且在其他自然科学和各种工程技术领域中均有着广泛的应用，它已成为不可缺少的运算工具。

第二版前言

复变函数又称复分析，是实变函数和微积分的推广与发展。因此它不仅在内容上与实变函数和微积分有许多类似之处，而且在研究问题的方法与逻辑结构方面也很类似。当然，复变函数也有自身的特点，有自己的研究工具和方法，在学习过程中，应注意与微积分理论的比较，从而加深理解，同时须注意复变函数本身的特点，并掌握它自身所固有的理论和方法。

积分变换与复变函数一样，也是在实变函数和微积分的基础上发展起来的，因此在学习中也应特别注意分清异同点，这样才能抓住要点、融会贯通。

第三版前言

编写本书的主要目的是为理工科本科生提供一本比较系统完整的“复变函数与积分变换”教材。编者一方面汇总了国内同类教材的主要优点；另一方面融合了我校众多教师长期讲授该门课程的经验体会，力求思路清晰、推证简洁且可读性强，从而满足广大师生的教、学需求。

本书在每章后精心设计了“小结”，可帮助读者更清楚明了地把握学习要点，更深刻地理解该章的主要学习内容。大部分章节还给出了思考题，帮助读者对所学内容进行检验，启发并训练读者的独立思考能力与分析能力。全书习题经过教学实践不断积累和更新，其内容涵盖了全书主要讲授内容的基本概念、基本理论和基本方法。既有一般的基础习题，也有难度较大的

第四版前言

提高题。书末除对计算题给出答案外,还对有些必要的难题给出了提示,其目的在于帮助读者尽快掌握本书所讲授的内容。

本书适当地介绍了本学科与其他学科之间的联系,给出了一些实际应用问题以帮助读者加深对课程的理解,培养解决实际问题的能力,从而达到学为所用的最终目的。

目录中打“*”号的章节,可根据各专业的不同需要选用。在本书的完成过程中,自始至终得到了本校数学系领导和同仁们的大力支持,没有他们的热情鼓励和帮助,本书不可能如期顺利出版,在此向他们表示衷心的感谢!

本书共分九章,外加两个附录,其中第一、二、三、四、五及第七章由李红副教授执笔;第六、八、九章及附录由谢松法副教授执笔。胡适耕教授审阅、修改,并作了详尽的具体指导。

编　者

1999年4月于武汉

目　录

第一章　复数与复变函数

复变函数论中所研究的函数的自变量与因变量均取复数，因此，读者首先对复数域以及复变量的函数要有清晰的认识. 本章论述复数的基本概念、复数的四则运算、复数的三角表示、平面点集的一般概念及其复数表示，以及复变量连续函数. 复数的概念、四则运算以及三角表示在现行中学数学课本中已经涉及，但可能有的读者未曾学到，因此这里仍从头开始. 由于复数全体可以同平面上的点的全体作成一一对应，所以平面点集以后经常要用到，这里仅介绍平面点集的一般概念，学习将某些简单的平面点集用含复变量的等式或不等式来表示的方法. 关于复变函数，本章主要讨论连续函数的性质，许多定义与结果从形式上看与微积分中所学的颇为相似，但意义已不尽相同. 希望读者在开始学习时就特别留意.

§1.1　复数

§1.1.1　复数的基本概念

我们将形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为**复数**,其中 i 称为**虚数单位**,并规定 $\mathrm{i}^2=\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-1$,或 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$;x 与 y 是任意实数,依次称为 z 的**实部**(real part)与**虚部**(imaginary part),分别表示为

$$\operatorname{Re} z=x,\quad \operatorname{Im} z=y.$$

例如,对复数 $z=\sqrt{2}+\mathrm{i}$,有

$$\operatorname{Re} z=\sqrt{2},\quad \operatorname{Im} z=1.$$

当 $y=0$ 时,$z=x+\mathrm{i}y=x+\mathrm{i}0$,我们就认为它是实数 x;当 $x=0$ 时,$z=x+\mathrm{i}y=0+\mathrm{i}y$,我们称它为**纯虚数**,并且就写作 $\mathrm{i}y$. 例如,$2+0\mathrm{i}$ 就是实数 2;$0+3\mathrm{i}$ 是纯虚数,可以写成 $3\mathrm{i}$;而 $0+0\mathrm{i}$ 既可看作实数 0,也可以看作纯虚数 $0\mathrm{i}$.

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 是两个复数. 如果 $x_1=x_2,y_1=y_2$,则称 z_1 与 z_2 **相等**. 由此得出,对于复数 $z=x+\mathrm{i}y$,$z=0$ 当且仅当 $x=y=0$.

设 $z=x+\mathrm{i}y$ 是一个复数,称 $x-\mathrm{i}y$ 为 z 的**共轭复数**,记作 $\bar{z}$. 易知 $\bar{\bar{z}}=z$. 共轭复数有很多用处,后文将逐步介绍.

§ 1.1.2 复数的四则运算

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 是两个复数. 定义复数的**加法**为

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2). \tag{1.1}$$

复数的**减法**是加法的逆运算. 若存在复数 z 使 $z_1=z_2+z$,则$z=z_1-z_2$. 因此得到

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2). \tag{1.2}$$

定义复数的**乘法**为

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1). \tag{1.3}$$

例如,

$$\begin{aligned}&(2-3\mathrm{i})(4+5\mathrm{i})\\ =&[2\cdot 4-(-3)\cdot 5]+\mathrm{i}[2\cdot 5+(-3)\cdot 4]=23-2\mathrm{i}.\end{aligned}$$

由乘法定义可验证

$$\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=(0+1\cdot\mathrm{i})(0+1\cdot\mathrm{i})=-1.$$

复数的**除法**是乘法的逆运算. 当 $z_2\neq 0$ 时,我们说:“z_1 除以 z_2 得到商 z”,意思就是

$$z_1=z_2\cdot z.$$

从这个式子我们来求 z. 记 $z=x+\mathrm{i}y$. 由于

$$x_1+\mathrm{i}y_1=(x_2+\mathrm{i}y_2)(x+\mathrm{i}y)=(x_2x-y_2y)+\mathrm{i}(x_2y+xy_2),$$

根据两个复数相等的定义,得到

$$x_1=x_2x-y_2y,\quad y_1=x_2y+xy_2,$$

由此解出

$$x=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\quad y=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

这就是说,当 $x_2+\mathrm{i}y_2\neq 0$(这相当于 $x_2^2+y_2^2\neq 0$)时,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{1.4}$$

因可直接验证

$$z_2\bar{z}_2=x_2^2+y_2^2,\ z_1\bar{z}_2=(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2),$$

从而(1.4)式可缩写成$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}$. 形式上看,这个等式是很自然的,它不过是指明分式 z_1/z_2 的分子分母同乘 $\bar{z}_2(z_2\neq 0)$,分式值不变. 这一结论可用于复数

除法的实际演算,即

$$\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

例如,

$$\frac{3-2\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}=\frac{(3-2\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}=\frac{(6-6)+\mathrm{i}(-4-9)}{2^2+3^2}=-\mathrm{i}.$$

同实数的四则运算一样,复数加法满足结合律与交换律,复数乘法也满足结合律与交换律,加法与乘法满足分配律. 这些读者都可自行验证(作为练习).

最后,我们顺便介绍有关共轭复数的几个运算性质,读者很容易自己去验证(作为练习).

$$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2,\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2,\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad(z_2\neq 0),$$

$$z\bar{z}=x^2+y^2=(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2,$$

$$\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad \operatorname{Im} z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z}).$$

例 1.1 设 z_1,z_2 是任意两个复数,求证:

$$2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)=z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2.$$

证 利用公式 $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$ 可算得

$$2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)=z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}=z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1\bar{\bar{z}}_2=z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2.$$

学习了以上两段以后,读者可仔细体会,以加深对复数的认识. 最初当给出复数概念时,我们所知道的复数是什么?复数无非是一个实数 x 同另一个实数 y 用“i”及“+”连接而写成“$x+\mathrm{i}y$”这样一个形式的东西,“i”是什么,“+”是什么意思,都未加说明. 后来,介绍了复数与实数的关系,复数与纯虚数的关系,又介绍了复数加法的定义. 这样,我们也就可以把 $x+\mathrm{i}y$ 看成实数 x 同纯虚数 $\mathrm{i}y$ 相加. 其后,又定义了复数乘法. 利用复数的加法与乘法,现在已可将复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 真正理解为虚数 i 乘 y,然后再加上 x 的结果(注意 $x=x+0\mathrm{i}$,$y=y+0\mathrm{i}$,$\mathrm{i}=0+1\mathrm{i}$):

$$z=(x+0\mathrm{i})+(0+1\mathrm{i})(y+0\mathrm{i})=x+\mathrm{i}y.$$

历史上,当人们第一次引进-1的平方根并把它当作“数”的时候,是把它作为想像中的数,所以称为“虚数”. 后来就把形如 $x+\mathrm{i}y$ 的数叫做复数,意思

是“复合”起来的数.

§1.1.3 复平面

一个复数 $x+\mathrm{i}y$ 可唯一地对应一个有序实数对 (x,y)，而有序实数对与坐标平面上的点是一一对应的. 所以，复数 z 全体与坐标平面上点的全体形成一一对应. 现在我们直截了当地把坐标平面上的点写成 $x+\mathrm{i}y$（图 1.1），那么，横轴上的点就表示实数，纵轴上的点就表示纯虚数. 整个坐标平面可称为**复(数)平面**. 今后我们索性将复数与复平面上的点不加区分. 这种点、数等同将给我们带来许多方便. 在点、数等同的观点下，一个复数集合就是一个平面点集. 因此，很自然地，某些特殊的平面点集就可以用复数所满足的某种关系式来表示. 例如，

$$\{z: \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$$

与

$$\{z: 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1, 0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1\}$$

分别表示上半平面与以 $0,1,1+\mathrm{i},\mathrm{i}$ 为顶点的正方形.

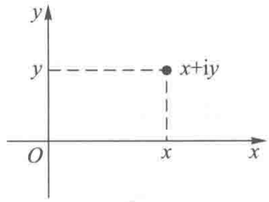

图 1.1

§1.2 复数的三角表示

§1.2.1 复数的模与辐角

上面说过，复数与平面上的点成一一对应，这是将复数实部与虚部分别看作直角坐标系下点的横坐标与纵坐标. 除此以外，复数还可以同平面向量成对应，只要将复数的实部与虚部分别看作向量的水平分量与铅垂分量就行了. 所以我们也可以把复数与平面向量等同起来. 不过要注意，向量具有平移不变性，即其起点可安放在任意一点. 若把向量的起点放在(复平面的)坐标原点，则此向量及向量的终点在上述两种对应下恰好对应同一个复数(图 1.2).

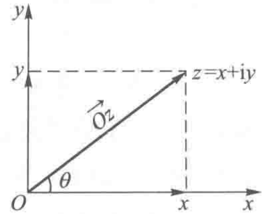

图 1.2

如果 z 是一个不为 0 的复数，我们将它所对应向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度叫做 z 的**模**，记作 $|z|$；将实轴正向与向量 $\overrightarrow{Oz}$ 之间的夹角叫做 z 的**辐角**. 辐角有无穷多个值，其中任意两个值相差 2π 的整数倍. 今后，我们用记号 $\operatorname{Arg} z$ 作为 z 的辐角的一般表示，意思是它可

复数的几何表示

以不受限制地取 z 的辐角的任意值. 再用记号 $\arg z$ 表示 z 的所有辐角中介于$-\pi$ 与 π 之间(包括 π)的那一个角,并把它称为 z 的**主辐角**,即$-\pi<\arg z\leqslant\pi$(顺便指出,有的书上把 z 的所有辐角中的非负最小值作为主辐角,也用记号 $\arg z$ 表示,这样便有$0\leqslant\arg z<2\pi$).所以

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,$$

k 是任意的整数(图 1.3). 当 $z=0$ 时, $|z|=0$, 这时辐角没有意义. 对于共轭复数,我们有 $|z|=|\bar{z}|$ 以及 $\arg\bar{z}=-\arg z$($z\neq0$ 且不为负实数,对负实数有 $\arg\bar{z}=\arg z=\pi$). 对 $z=x+\mathrm{i}y$ 易验证

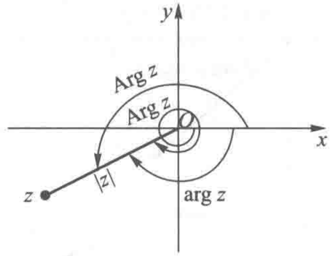

图 1.3

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2},$$

因此

$$|z|^2=x^2+y^2=z\bar{z}.$$

由此推出

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

对于一个不为 0 的复数 $z=x+\mathrm{i}y$,它的实部与虚部同它的模与辐角之间有如下的关系. 一方面有

$$x=|z|\cos\operatorname{Arg} z,\quad y=|z|\sin\operatorname{Arg} z;$$

另一方面,反过来有

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

从而有明显的不等式

$$|x|\leqslant|z|,\quad|y|\leqslant|z|,\quad|z|\leqslant|x|+|y|.$$

辐角的表示式稍微复杂些,要看 z 在哪个象限而定. 对任意实数 α,用 $\arctan\alpha$ 表示$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内其正切为 α 的一个角,我们有(图 1.4)

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,y\text{ 为任意实数},\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y\geqslant0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0.\end{cases}$$

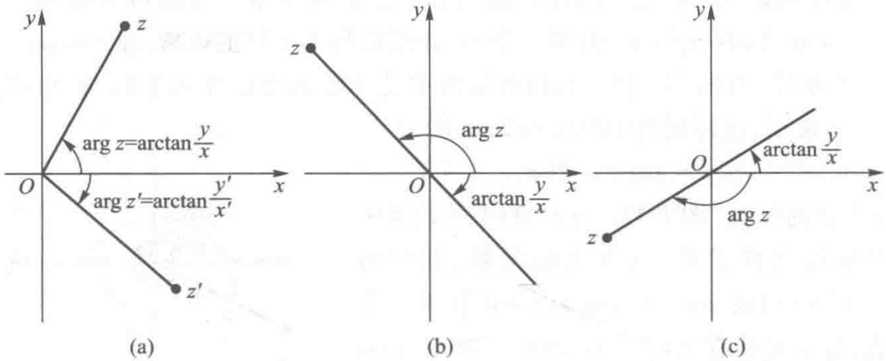

图 1.4

最后,我们向读者做简短提示:由于复数可以表示平面向量. 所以,有关平面向量的问题就有可能利用复变函数来研究. 这样,复变函数论就逐渐被广泛地应用于理论物理、弹性力学、流体力学等学科,成为重要的数学工具. 与此同时,人们也逐渐改变了对复数的看法,不再指责它是“虚无缥缈”的东西了.

§1.2.2　复数模的三角不等式

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,根据复数的加、减法则,有

$$z_1 \pm z_2=(x_1 \pm x_2)+\mathrm{i}(y_1 \pm y_2),$$

这恰好同向量的加、减法一致. 因为,复平面上从点 $z=0$ 到点 $z=z_1$ 的向量对应于复数 z_1,从点 $z=0$ 到点 $z=z_2$ 的向量对应于复数 z_2. 两个向量相加相当于它们的水平分量与铅垂分量相加,所以复数加法可以用向量相加的三角形法则在图上作出(图 1.5(a)),复数减法也可以类似地在图上作出(图 1.5(b)). 这里,向量$\overrightarrow{Oz_1}$减去向量$\overrightarrow{Oz_2}$所得的差就是从点 z_2 到点 z_1 的向量. 这个向量所对应的复数是z_1-z_2,注意到这个向量的长度就是复数 z_1-z_2 的模,我们就得出一个结论:对任意两个复数 z_1 与 z_2, $|z_1-z_2|$ 就是复平面上点 $z=z_1$ 与点 $z=z_2$ 之间的距离. 这是一个很有用的结果. 例如,复平面上以 z_0 为中心,以 r 为半径的圆盘,就是满足不等式 $|z-z_0|<r$ 的点 z 的全体. 简单地,就用不等式 $|z-z_0|<r$ 表示. 从上面这个结论出发,再根据三角形两边长之和大于第三边长,两边长之差小于第三边长的法则,可以得到关于复数模的三角不等式

$$||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1-z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|. \tag{1.5}$$

而从图 1.5(a)得到类似的不等式

$$||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|. \qquad (1.6)$$

以上两个不等式串中有一处等号成立的充分必要条件是 z_1 与 z_2 位于通过原点的同一直线上.

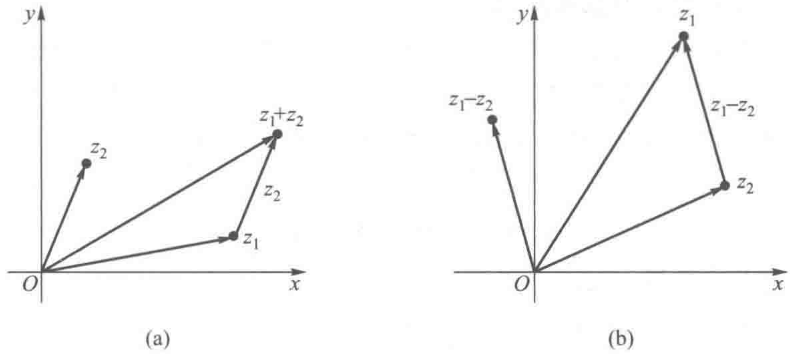

图 1.5

(1.5)式与(1.6)式可以用共轭复数的性质来证明. 我们以(1.6)式为例.

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\ &= z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2),\end{aligned}$$

又因为

$$|\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)| \leqslant |z_1\bar{z}_2| = |z_1||\bar{z}_2| = |z_1||z_2|,$$

所以有

$$|z_1+z_2|^2 \leqslant |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2,$$

以及

$$|z_1+z_2|^2 \geqslant |z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2| = (|z_1|-|z_2|)^2.$$

因此(1.6)式成立. 将(1.6)式中的 z_2 用 $-z_2$ 替代,就得到(1.5)式.

请读者留意:不等式(1.5)及(1.6)都是对复数的模而言的. 复数本身不能比较大小,故不存在形如 $z_1 \leqslant z_2$ 的不等式.

§1.2.3 复数的三角表示

设 z 是一个不为 0 的复数,r 是 z 的模,θ 是 z 的任意一个辐角,则

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

上式右端称为**复数的三角表示**. 反过来,对于任意的正数 r 与实数 θ,$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 一定是某个复数 z 的三角表示. 事实上,该复数 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

特别,当 $r=1$ 时,有 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$. 我们引出欧拉公式:

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,$$

利用上式,就可以将 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 改写成

$$z=re^{i\theta},$$

称上式为非零复数的**指数形式**.

一个复数的三角表示不是唯一的,因为其中的辐角有无穷多种选择. 如果有两个三角表示相等,即:

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

那么可推出

$$r_1=r_2,\quad \theta_1=\theta_2+2k\pi,$$

其中 k 为某个整数.

例 1.2 写出复数 1+i 的三角表示式.

解 因为 $|1+i|=\sqrt{2}$, $\arg(1+i)=\dfrac{\pi}{4}$,所以 1+i 的三角表示式可以写成

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

如果取 1+i 的另一辐角,例如,取 $2\pi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{9}{4}\pi$,那么 1+i 的三角表示式也可写成

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{9}{4}\pi+i\sin\frac{9}{4}\pi\right).$$

例 1.3 写出复数-1-3i 的三角表示式.

解 先算出 $|-1-3i|=\sqrt{10}$,以及

$$\arg(-1-3i)=\arctan 3-\pi,$$

故所求的三角表示式可写为

$$-1-3i=\sqrt{10}[\cos(\arctan 3-\pi)+i\sin(\arctan 3-\pi)].$$

例 1.4 设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$. 求$\dfrac{1}{z}$的三角表示.

解 因为 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$, $|z|=r$, $\bar{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)$,故

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)=\frac{1}{r}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)].$$

最后的式子即是$\dfrac{1}{z}$的三角表示.