



“十三五”独立本科院校大学数学系列规划教材

线性代数

Linear Algebra

南京大学金陵学院

陈 仲 王 培 林小围 © 编著



东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

线 性 代 数

陈 仲 王 培 林小围 编著

东 南 大 学 出 版 社

• 南 京 •

内 容 提 要

本书是普通高校“独立学院”文、理科线性代数课程的教材,内容包含行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、特征值问题、欧氏空间、二次型、线性空间与线性变换简介等八章。

本书在深度和广度上符合教育部审定的“高等院校非数学专业线性代数课程教学基本要求”,并参照教育部考试中心颁发的《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》数学一与数学三中线性代数的知识范围,编写的立足点是基础与应用并重,注重数学的思想和方法,并适当地渗透现代数学思想及对部分内容进行更新与优化,适合独立学院培养高素质的具有创新精神的应用型人才的目标。

本书结构严谨,难易适度,语言简洁,既可作为独立学院等高校文、理科学生学习线性代数课程的教材,也可作为科技工作者自学线性代数的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 陈仲,王培,林小围编著. —南京:东南大学出版社,2018.4

ISBN 978-7-5641-7697-6

I. ①线… II. ①陈…②王…③林… III. ①线性代数-高等学校-教材 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 060355 号

线性代数

出版发行 东南大学出版社
社 址 南京市四牌楼 2 号(邮编:210096)
出 版 人 江建中
责任编辑 吉雄飞(联系电话:025-83793169)
经 销 全国各地新华书店
印 刷 南京京新印刷厂
开 本 700mm×1000mm 1/16
印 张 13.75
字 数 270 千字
版 次 2018 年 4 月第 1 版
印 次 2018 年 4 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5641-7697-6
定 价 33.00 元

本社图书若有印装质量问题,请直接与营销部联系,电话:025-83791830。

前 言

著名的德国数学家高斯曾说:“数学是科学的皇后”.人类的实践也已证明数学是所有科学的共同“语言”,是学习所有自然科学的“钥匙”,而数学素养更是成为衡量一个国家科技水平的重要标志.独立学院文、理科线性代数课程是培养高素质应用型人才的重要的必修课,我们编写该课程教材的立足点就是基础与应用并重,以提高学生数学素养为根本目标.

在基础与应用并重的思想指导下,我们编写了线性代数课程的教学大纲,设计了课时安排,教材编写与教学实践密切结合,并多次修改力求完善.在编写过程中,我们努力做到:

(1) 在深度和广度上符合教育部审定的“高等院校非数学专业线性代数课程教学基本要求”,并参照教育部考试中心颁发的《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》数学一与数学三中线性代数的知识范围.在独立学院中,有不少学生是因为高考发挥失常而没有考上理想的高校,进入独立学院后,他们发奋努力,立志考研.我们编写教材时,在广度上尽可能达到考研的知识范围.

(2) 注重数学的思想和方法,适当地渗透现代数学思想,并运用部分近代数学的术语与符号,以求符合独立学院培养高素质的具有创新精神的应用型人才的目标.教材除了要使学生获得线性代数的基本概念、基本理论和基本方法,还要让学生受到一定的科学训练,学到数学思想方法,为其学习后继课程提供必要的数学基础,并为其毕业后胜任工作或继续深造积累潜在的能力.

(3) 通过教学研究,将一些经典定理、公式的结论或证明加以更新与优化.如此,既改革了教学内容,又丰富了线性代数的内涵.

我们的目标是全书结构严谨,难易适度,语言简洁,既适合培养目标,又贴近教学实际,便于教与学.

本书包含行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、特征值问题、欧氏空间、二次型、线性空间与线性变换简介等八章.对数学要求较高的理工类、经管类专业,如电子、电气、计算机、经管、金融等,本书可用一个学期讲授,每周4学时;其他专业,如土木、地质、化工等,可依实际安排的学时数选讲线性代数的基本内容(如略去基变换与坐标变换、二次型等).本书在附录部分提供了线性代数课程的教学课时安排建议,供授课老师参考.

书中用*标出的部分为较难内容,供任课教师选用(一般留给学生课外自学).书中习题分A,B两组,A组为基本要求,B组为较高要求;除第8章外,每一章末有复习题,供学有余力的学生练习.书末附有习题答案与提示.

本书由陈仲、王培、林小围编著,陈仲写第1,4,8章,王培写第3,5,6章,林小围写第2,7章.

感谢金陵学院教务处和基础教学部对编者的关心,感谢钱钟教授、王均义教授、黄卫华教授和王建民主任对编者的支持,感谢范克新、邓建平、袁明霞、马荣、章丽霞、魏云峰、邵宝刚等老师使用本书讲授线性代数课程,并给编者提供宝贵的修改建议.感谢东南大学出版社吉雄飞编辑的认真负责和悉心编校,使本书质量大有提高.

书中不足与错误难免,敬请智者不吝赐教.

陈 仲

2018年1月于南京大学

目 录

1 行列式	1
1.1 行列式基本概念	1
1.1.1 n 阶行列式的定义	1
1.1.2 行列式的性质	5
习题 1.1	9
1.2 行列式的计算	9
1.2.1 拉普拉斯展开定理	9
1.2.2 行列式计算举例	10
习题 1.2	15
复习题 1	17
2 矩 阵	18
2.1 矩阵基本概念	18
2.1.1 矩阵的定义	18
2.1.2 常用的特殊矩阵	18
2.1.3 矩阵的线性运算	20
2.1.4 矩阵的乘法	21
2.1.5 分块矩阵	24
习题 2.1	29
2.2 初等变换与初等矩阵	30
2.2.1 矩阵的初等变换	30
2.2.2 矩阵的阶梯形	31
2.2.3 初等矩阵	33
2.2.4 初等变换与初等矩阵的联系	34
2.2.5 矩阵的行列式	35
习题 2.2	37
2.3 逆矩阵	39
2.3.1 可逆矩阵与逆矩阵	39

2.3.2 克莱姆法则	44
2.3.3 用初等行变换求逆矩阵与方程组的唯一解	46
习题 2.3	49
复习题 2	50
3 向量空间	52
3.1 向量空间基本概念	52
3.1.1 向量空间的定义	52
3.1.2 子空间	53
习题 3.1	53
3.2 向量组的线性相关性	54
3.2.1 向量组线性相关与线性无关的定义	54
3.2.2 线性相关与线性无关向量组的性质	57
习题 3.2	60
3.3 向量组的秩	61
3.3.1 向量组的极大无关组	61
3.3.2 向量组的等价	64
3.3.3 向量组秩的定义与性质	66
习题 3.3	67
3.4 矩阵的秩	68
3.4.1 矩阵秩的定义	68
3.4.2 用初等行变换求矩阵的秩	69
3.4.3 矩阵的行秩与列秩	70
3.4.4 矩阵的和秩	71
3.4.5 矩阵的积秩	71
习题 3.4	73
3.5 向量空间的基 · 基变换 · 坐标变换	75
3.5.1 向量空间的基与维数	75
3.5.2 向量的坐标	76
3.5.3 基变换与坐标变换	77
3.5.4 用初等行变换求过渡矩阵与向量的坐标	78
习题 3.5	80
复习题 3	81

线性方程组	82
4.1 线性方程组解的属性	82
4.1.1 线性方程组的初等变换	82
4.1.2 线性方程组解的性质	83
4.1.3 线性齐次方程组解的属性	83
4.1.4 线性非齐次方程组解的属性	85
习题 4.1	88
4.2 线性方程组的通解	90
4.2.1 线性齐次方程组的基础解系	90
4.2.2 线性齐次方程组的通解	91
4.2.3 线性非齐次方程组的通解	94
习题 4.2	99
复习题 4	101
5 特征值问题	103
5.1 特征值与特征向量	103
5.1.1 特征值与特征向量的定义	103
5.1.2 特征值与特征向量的求法	103
5.1.3 特征值与特征向量的性质	107
习题 5.1	111
5.2 矩阵的相似对角化	113
5.2.1 相似矩阵	113
5.2.2 矩阵相似对角化的定义	114
5.2.3 矩阵可相似对角化的条件	114
5.2.4 矩阵相似对角化的步骤	117
习题 5.2	122
复习题 5	123
6 欧氏空间	124
6.1 欧氏空间基本概念	124
6.1.1 向量的内积	124
6.1.2 欧氏空间与度量矩阵	124
6.1.3 向量的模与两向量的夹角	127
习题 6.1	130
6.2 正交矩阵	130

6.2.1	正交矩阵基本概念	130
6.2.2	施密特正交规范化方法	132
习题 6.2		136
6.3	矩阵的正交相似对角化	137
6.3.1	矩阵正交相似对角化的定义	137
6.3.2	实对称矩阵的特征值与特征向量	137
6.3.3	实对称矩阵可正交相似对角化	138
6.3.4	实对称矩阵正交相似对角化的步骤	139
习题 6.3		142
复习题 6		143
7	二次型	144
7.1	二次型基本概念	144
7.1.1	二次型的矩阵表示	144
7.1.2	二次型的等价	146
习题 7.1		146
7.2	矩阵的合同对角化	147
7.2.1	合同矩阵	147
7.2.2	矩阵合同对角化的定义	148
7.2.3	对称矩阵可合同对角化	148
* 7.2.4	用初等变换将对称矩阵合同对角化	150
7.2.5	矩阵正交合同对角化的定义	151
7.2.6	实对称矩阵可正交合同对角化	151
习题 7.2		152
7.3	二次型的标准形	152
7.3.1	二次型的标准形与规范形	152
7.3.2	通过配方化实二次型为标准形	156
7.3.3	通过正交变换化实二次型为标准形	157
* 7.3.4	通过初等变换化实二次型为标准形	159
7.3.5	惯性定理	160
7.3.6	二次曲面类型的判别	162
习题 7.3		162
7.4	正定二次型与正定矩阵	164
7.4.1	二次型的分类	164
7.4.2	正定二次型与正定矩阵的判别法	164

习题 7.4	168
复习题 7	169
8 线性空间与线性变换简介	170
8.1 线性空间的基本概念	170
8.1.1 线性空间的例子	170
8.1.2 线性空间的同构	171
习题 8.1	174
8.2 线性变换的基本概念	174
8.2.1 线性变换的定义	174
8.2.2 线性变换的像与核	175
8.2.3 线性变换在基下的矩阵	177
8.2.4 线性变换在不同基下矩阵的关系	180
习题 8.2	182
习题答案与提示	184
附录 《线性代数》教学课时安排建议	210

1 行列式

在微积分课程的“空间解析几何”一章中我们已介绍过2阶与3阶行列式的计算,这一章将系统介绍 n 阶行列式的定义、性质和计算.

1.1 行列式基本概念

1.1.1 n 阶行列式的定义

定义 1.1.1(行列式) 设 F 为一数域, $a_{ij} \in F(i, j = 1, 2, \dots, n)$,将这 n^2 个数 a_{ij} 排成 n 行、 n 列的方阵列,左右两边各画一条竖线得

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| \quad (1.1.1)$$

称式(1.1.1)为数域 F 上的 n 阶行列式(横排称为行,纵排称为列),记为 D_n 或 $\det(a_{ij})$.其中,数 a_{ij} 称为行列式 D_n 的元素或 (i, j) 元.特别的, $D_1 = \det(a_{11})$.

定义 1.1.2(余子式、代数余子式) 设行列式 D_n 如式(1.1.1)所示,在行列式 D_n 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列的所有元素,余下的 $(n-1)^2$ 个元素按原顺序构成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 $M_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, n)$,即

$$M_{ij} = \left| \begin{array}{cccccc} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right|$$

称 $A_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

下面我们用数域 F 中的数来定义行列式 D_n 的值.

定义 1.1.3(行列式的值) 设行列式 D_n 如式(1.1.1)所示,则行列式 D_n 的值

定义为

$$D_1 = \det(a_{11}) \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}, \quad D_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j} \quad (n \geq 2) \quad (1.1.2)$$

其中, A_{1j} 为 D_n 中 a_{1j} 的代数余子式. (注: 行列式的值常简称为行列式)

此定义称为行列式按第一行展开. 它是递推式定义, 由此定义 2 阶行列式可得

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

再用 2 阶行列式定义 3 阶行列式, 可得

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

依此类推, 可用 $n-1$ 阶行列式定义 n 阶行列式.

下面的**对角线法则**提供了计算 3 阶行列式的技巧, 即 D_3 等于图 1.1(a) 中实线连接的 3 个数乘积之和减去图 1.1(b) 中虚线连接的 3 个数乘积之和, 其结果与上式相同.

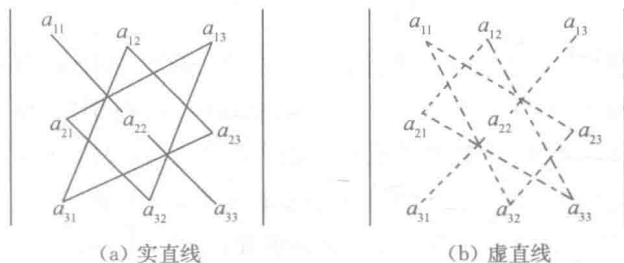


图 1.1 对角线法则示意图

例 1 求行列式: (1) $D_3 = \begin{vmatrix} i & 0 & 1 \\ 2 & i & 3 \\ i & i & 1 \end{vmatrix}$; (2) $D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

解 (1) 应用行列式的定义, 有

$$D_3 = i \begin{vmatrix} i & 3 \\ i & 1 \end{vmatrix} - 0 + \begin{vmatrix} 2 & i \\ i & i \end{vmatrix} = 2 + 2i + 1 = 3 + 2i$$

(2) 应用行列式的定义, 有

$$D_4 = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

容易求得

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -116, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -54, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 55$$

于是

$$D_4 = 2 \times (-116) - 3 \times (-54) + 2 \times 55 - 0 = 40$$

例 2 求下三角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

这里 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 称为主对角元, O 表示主对角元上方的所有元素皆为 0, $*$ 表示主对角元下方的元素不全为 0.

解 将行列式逐次按第一行展开得

$$D_n = \lambda_1 \begin{vmatrix} \lambda_2 & & O \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{vmatrix} + 0 = \lambda_1 \left(\begin{vmatrix} \lambda_3 & & O \\ \lambda_2 & & \\ * & & \lambda_n \end{vmatrix} + 0 \right) \\ = \dots = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{n-1} \lambda_n$$

即下三角行列式等于主对角元的乘积.

例 3 求拟下三角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} O & & \mu_1 \\ & \mu_2 & \\ & & \ddots \\ \mu_n & & & * \end{vmatrix}$$

这里 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 称为次对角元, O 表示次对角元上方的所有元素皆为 0, $*$ 表示

次对角元下方的元素不全为 0.

解 应用行列式的定义,有

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{1+n} \mu_1 \begin{vmatrix} O & & \mu_2 \\ & \ddots & \\ \mu_n & & * \end{vmatrix} = (-1)^{(1+n)+n} \mu_1 \mu_2 \begin{vmatrix} O & & \mu_3 \\ & \ddots & \\ \mu_n & & * \end{vmatrix} \\ &= \cdots = (-1)^{(1+n)+n+(n-1)+\cdots+4} \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{n-2} \begin{vmatrix} 0 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & a_{n2} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cdots \mu_{n-1} \mu_n \end{aligned}$$

即拟下三角行列式 = 次对角元的乘积, 这里“±”号由 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 为偶数或奇数决定.

下面应用行列式的定义证明行列式也可按第一列展开.

定理 1.1.1 设行列式 D_n 如式(1.1.1)所示, 则行列式 D_n 可按第一列展开, 即

$$D_n = \sum_{i=1}^n a_{i1} A_{i1} \quad (1.1.3)_n$$

* 证 由于 $D_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21}$, 所以 $n=2$ 时结论成立. 归纳假设 $n-1$ 阶行列式也可按第一列展开. 首先将 D_n 按第一行展开得

$$D_n = a_{11}A_{11} + \sum_{j=2}^n a_{1j}A_{1j} = a_{11}A_{11} + \sum_{j=2}^n (-1)^{1+j} a_{1j}M_{1j} \quad (1.1.4)$$

由于 $M_{1j} (j=2, 3, \cdots, n)$ 是 $n-1$ 阶行列式, 将 M_{1j} 按第一列展开得

$$M_{1j} = \sum_{i=2}^n (-1)^{(i-1)+1} a_{i1} (M_{1j})_{i1} \quad (1.1.5)$$

由于 $(M_{1j})_{i1} = (M_{11})_{ij}$, 将其代入式(1.1.5), 再将式(1.1.5)代入式(1.1.4)得

$$D_n = a_{11}A_{11} + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n (-1)^{1+j} a_{1j} a_{i1} (M_{11})_{ij} \quad (1.1.6)$$

另一方面, 将 D_n 按第一列展开, 其值记为 D'_n , 则

$$D'_n = \sum_{i=1}^n a_{i1} A_{i1} = a_{11}A_{11} + \sum_{i=2}^n a_{i1} A_{i1} = a_{11}A_{11} + \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} \quad (1.1.7)$$

其中 $M_{i1} (i=2, 3, \cdots, n)$ 是 $n-1$ 阶行列式, 将 M_{i1} 按第一行展开得

$$M_{il} = \sum_{j=2}^n (-1)^{1+(j-1)} a_{lj} (M_{il})_{lj} \quad (1.1.8)$$

由于 $(M_{il})_{lj} = (M_{11})_{ij}$, 将其代入式(1.1.8), 再将式(1.1.8)代入式(1.1.7)得

$$D'_n = a_{11}A_{11} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n (-1)^{1+i+j} a_{il} a_{lj} (M_{11})_{ij} \quad (1.1.9)$$

由式(1.1.6)和式(1.1.9)得 $D_n = D'_n$, 即式(1.1.3)_n成立. 于是, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 原式均成立. $\square$

例4 求上三角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

这里 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为主对角元, O 表示主对角元下方的所有元素皆为0, $*$ 表示主对角元上方的元素不全为0.

解 将行列式逐次按第一列展开得

$$\begin{aligned} D_n &= \lambda_1 \begin{vmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{vmatrix} + 0 = \lambda_1 \left(\begin{vmatrix} \lambda_3 & & * \\ \lambda_2 & & \ddots \\ O & & \lambda_n \end{vmatrix} + 0 \right) \\ &= \dots = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{n-1} \lambda_n \end{aligned}$$

即上三角行列式等于主对角元的乘积.

1.1.2 行列式的性质

按行列式的定义计算4阶以上的行列式, 在一般情况下是相当繁琐的. 本小节研究行列式的性质, 利用这些性质可将行列式化简, 譬如化为上三角行列式或下三角行列式, 然后再求值就比较简单了.

定理 1.1.2(性质1) 将行列式转置, 其值不变.

所谓行列式转置, 就是主对角元不动, 非主对角元 a_{ij} 与 a_{ji} 对换 ($i \neq j$). 应用行列式可以按第一行展开, 又可以按第一列展开的结论, 再利用数学归纳法即可证明该定理, 这里不赘.

行列式 D 转置后的行列式称为 D 的转置行列式, 记为 D^T , 则 $D^T = D$.

由性质1可知, 行列式对“行”所具有的性质换为“列”也成立(反之亦然). 基于此, 下面对行列式的其他性质只就“行”给出.

定理 1.1.3(性质2) 将行列式两行对换, 其值反号.

* 证 分三种情况证明.

(1) 先证:将第一行与第二行对换,其值反号.即证

$$D'_n = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -D_n \quad (1.1.10)_n$$

应用数学归纳法, $n=2$ 时, 因为

$$D'_2 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -D_2$$

所以式 $(1.1.10)_2$ 成立. 假设式 $(1.1.10)_{n-1}$ 成立, 设行列式 D'_n 中 (i, j) 元的余子式为 M'_{ij} , 行列式 D_n 中 (i, j) 元的余子式为 M_{ij} , 显然 $M'_{11} = M_{21}$, $M'_{21} = M_{11}$, 又因 M'_{ij} 是 $n-1$ 阶行列式, 由假设有

$$M'_{i1} = -M_{i1} \quad (i = 3, 4, \cdots, n)$$

将行列式 D'_n 按第一列展开得

$$\begin{aligned} D'_n &= (-1)^{1+1}a_{21}M'_{11} + (-1)^{2+1}a_{11}M'_{21} + (-1)^{3+1}a_{31}M'_{31} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M'_{n1} \\ &= (-1)^{1+1}a_{21}M_{21} + (-1)^{2+1}a_{11}M_{11} - (-1)^{3+1}a_{31}M_{31} - \cdots - (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} \\ &= -(-1)^{1+1}a_{11}M_{11} - (-1)^{2+1}a_{21}M_{21} - (-1)^{3+1}a_{31}M_{31} - \cdots - (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} \end{aligned}$$

将行列式 D_n 按第一列展开得

$$D_n = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{2+1}a_{21}M_{21} + (-1)^{3+1}a_{31}M_{31} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

所以 $D'_n = -D_n$, 即式 $(1.1.10)_n$ 成立.

(2) 再证:将相邻的第 i ($i=2, 3, \cdots, n-1$) 行与第 $i+1$ 行对换, 其值反号. 证明方法与上述(1)完全相同, 不赘述.

(3) 最后证明:将不相邻的第 i 行与第 j 行对换, 其值反号. 这里不妨设 $i < j$, 令 $j-i=k$ ($2 \leq k \leq n-1$). 采用相邻两行对换的方法, 即将第 i 行逐次与它的下一行对换 k 次, 则第 i 行调到第 j 行, 再将原第 j 行从第 $j-1$ 行逐次与它的上一行对换 $k-1$ 次调至原第 i 行位置, 这样经过 $2k-1$ (奇数) 次相邻两行对换, 将 D_n 的第 i 行与第 j 行实现对换. 因为 $(-1)^{2k-1} = -1$, 所以将不相邻的第 i 行与第 j 行对换, 行列式的值反号. $\square$

推论 1.1.4 行列式一行元素全为 0, 其值为 0. (证明留作习题)

推论 1.1.5 行列式两行相同, 其值为 0. (证明留作习题)

定理 1.1.6(性质 3) 将行列式一行 k 倍,其值 k 倍,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 当 $i=1$ 时,将上式两边按第一行展开即得结论成立. 当 $i>1$ 时,将上式两边的第 i 行与第一行对换,由性质 2 得两边皆变号,然后两边再按第一行展开即得结论成立. $\square$

推论 1.1.7 行列式中两行成比例,其值为 0.

证 设行列式的第 j 行是第 i 行的 k 倍,将比例常数 k 提出去后,则行列式的第 i 行与第 j 行变为相同,应用推论 1.1.5 即得其值为 0. $\square$

定理 1.1.8(性质 4) 只有第 i 行 ($1 \leq i \leq n$) 不同的两个行列式相加,其值等于这一行对应元素相加而其他元素不变的行列式的值. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 当 $i=1$ 时,将上式中的 3 个行列式按第一行展开即得结论成立. 当 $i>1$ 时,将上式中的 3 个行列式的第 i 行与第一行对换,由性质 2 得两边皆变号,然后两边再按第一行展开即得结论成立. (注:此性质常常逆向使用) $\square$

定理 1.1.9(性质 5) 将行列式第 j 行的 k 倍加到第 i 行上,其值不变. 即