“十三五”独立本科院校大学数学系列规划教材

线性代数

Linear Algebra

南京大学金陵学院

陈仲 王培 林小围 ◎ 编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

线性代数

陈 仲　王 培　林小围　编著

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

本书是普通高校"独立学院"文、理科线性代数课程的教材，内容包含行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、特征值问题、欧氏空间、二次型、线性空间与线性变换简介等八章.

本书在深度和广度上符合教育部审定的"高等院校非数学专业线性代数课程教学基本要求"，并参照教育部考试中心颁发的《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》数学一与数学三中线性代数的知识范围，编写的立足点是基础与应用并重，注重数学的思想和方法，并适当地渗透现代数学思想及对部分内容进行更新与优化，适合独立学院培养高素质的具有创新精神的应用型人才的目标.

本书结构严谨，难易适度，语言简洁，既可作为独立学院等高校文、理科学生学习线性代数课程的教材，也可作为科技工作者自学线性代数的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 陈仲，王培，林小围编著. —南京：东南大学出版社，2018.4

ISBN 978-7-5641-7697-6

Ⅰ.①线… Ⅱ.①陈…②王…③林… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 060355 号

线性代数

出版发行	东南大学出版社
社　　址	南京市四牌楼 2 号(邮编：210096)
出 版 人	江建中
责任编辑	吉雄飞(联系电话：025-83793169)
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	南京京新印刷厂
开　　本	700mm×1000mm 1/16
印　　张	13.75
字　　数	270 千字
版　　次	2018 年 4 月第 1 版
印　　次	2018 年 4 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-7697-6
定　　价	33.00 元

本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系，电话：025-83791830。

前　言

著名的德国数学家高斯曾说:"数学是科学的皇后".人类的实践也已证明数学是所有科学的共同"语言",是学习所有自然科学的"钥匙",而数学素养更是成为衡量一个国家科技水平的重要标志.独立学院文、理科线性代数课程是培养高素质应用型人才的重要的必修课,我们编写该课程教材的立足点就是基础与应用并重,以提高学生数学素养为根本目标.

在基础与应用并重的思想指导下,我们编写了线性代数课程的教学大纲,设计了课时安排,教材编写与教学实践密切结合,并多次修改力求完善.在编写过程中,我们努力做到:

(1) 在深度和广度上符合教育部审定的"高等院校非数学专业线性代数课程教学基本要求",并参照教育部考试中心颁发的《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》数学一与数学三中线性代数的知识范围.在独立学院中,有不少学生是因为高考发挥失常而没有考上理想的高校,进入独立学院后,他们发奋努力,立志考研.我们编写教材时,在广度上尽可能达到考研的知识范围.

(2) 注重数学的思想和方法,适当地渗透现代数学思想,并运用部分近代数学的术语与符号,以求符合独立学院培养高素质的具有创新精神的应用型人才的目标.教材除了要使学生获得线性代数的基本概念、基本理论和基本方法,还要让学生受到一定的科学训练,学到数学思想方法,为其学习后继课程提供必要的数学基础,并为其毕业后胜任工作或继续深造积累潜在的能力.

(3) 通过教学研究,将一些经典定理、公式的结论或证明加以更新与优化.如此,既改革了教学内容,又丰富了线性代数的内涵.

我们的目标是全书结构严谨,难易适度,语言简洁,既适合培养目标,又贴近教学实际,便于教与学.

本书包含行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、特征值问题、欧氏空间、二次型、线性空间与线性变换简介等八章.对数学要求较高的理工类、经管类专业,如电子、电气、计算机、经管、金融等,本书可用一个学期讲授,每周4学时;其他专业,如土木、地质、化工等,可依实际安排的学时数选讲线性代数的基本内容(如略去基变换与坐标变换、二次型等).本书在附录部分提供了线性代数课程的教学课时安排建议,供授课老师参考.

书中用 * 标出的部分为较难内容,供任课教师选用(一般留给学生课外自学).书中习题分 A,B 两组,A 组为基本要求,B 组为较高要求;除第 8 章外,每一章末有复习题,供学有余力的学生练习.书末附有习题答案与提示.

本书由陈仲、王培、林小围编著,陈仲写第 1,4,8 章,王培写第 3,5,6 章,林小围写第 2,7 章.

感谢金陵学院教务处和基础教学部对编者的关心,感谢钱钟教授、王均义教授、黄卫华教授和王建民主任对编者的支持,感谢范克新、邓建平、袁明霞、马荣、章丽霞、魏云峰、邵宝刚等老师使用本书讲授线性代数课程,并给编者提供宝贵的修改建议.感谢东南大学出版社吉雄飞编辑的认真负责和悉心编校,使本书质量大有提高.

书中不足与错误难免,敬请智者不吝赐教.

陈　仲

2018 年 1 月于南京大学

目　　录

1 行列式

在微积分课程的"空间解析几何"一章中我们已介绍过2阶与3阶行列式的计算，这一章将系统介绍 n 阶行列式的定义、性质和计算.

1.1 行列式基本概念

1.1.1 n 阶行列式的定义

定义 1.1.1(行列式) 设 F 为一数域，$a_{ij} \in F(i,j=1,2,\cdots,n)$，将这 n^2 个数 a_{ij} 排成 n 行、n 列的方形阵列，左右两边各画一条竖线得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1.1}$$

称式(1.1.1)为数域 F 上的 n **阶行列式**(横排称为**行**，纵排称为**列**)，记为 D_n 或 $\det(a_{ij})$. 其中，数 a_{ij} 称为行列式 D_n 的**元素**或 **(i,j) 元**. 特别的，$D_1 = \det(a_{11})$.

定义 1.1.2(余子式、代数余子式) 设行列式 D_n 如式(1.1.1)所示，在行列式 D_n 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列的所有元素，余下的 $(n-1)^2$ 个元素按原顺序构成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 $M_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 $A_{ij} \xlongequal{\text{def}} (-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

下面我们用数域 F 中的数来定义行列式 D_n 的值.

定义 1.1.3(行列式的值) 设行列式 D_n 如式(1.1.1)所示，则**行列式 D_n 的值**

定义为

$$D_1 = \det(a_{11}) \xlongequal{\text{def}} a_{11}, \quad D_n \xlongequal{\text{def}} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} \quad (n \geqslant 2) \tag{1.1.2}$$

其中,A_{1j} 为 D_n 中 a_{1j} 的代数余子式.(注:行列式的值常简称为行列式)

此定义称为**行列式按第一行展开**.它是递推式定义,由此定义 2 阶行列式可得

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

再用 2 阶行列式定义 3 阶行列式,可得

$$\begin{aligned} D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

依此类推,可用 $n-1$ 阶行列式定义 n 阶行列式.

下面的**对角线法则**提供了计算3阶行列式的技巧,即 D_3 等于图 1.1(a) 中实线连接的 3 个数乘积之和减去图 1.1(b) 中虚线连接的 3 个数乘积之和,其结果与上式相同.

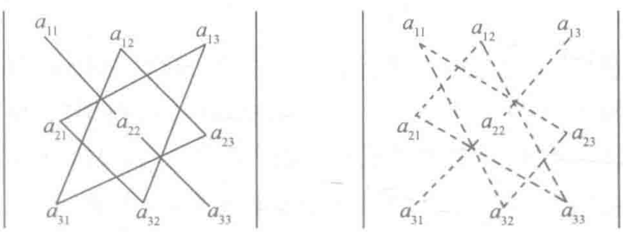

图 1.1　对角线法则示意图

例 1　求行列式:(1) $D_3 = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & 0 & 1 \\ 2 & \mathrm{i} & 3 \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 \end{vmatrix}$;(2) $D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

解　(1) 应用行列式的定义,有

$$D_3 = \mathrm{i}\begin{vmatrix} \mathrm{i} & 3 \\ \mathrm{i} & 1 \end{vmatrix} - 0 + \begin{vmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} \end{vmatrix} = 2 + 2\mathrm{i} + 1 = 3 + 2\mathrm{i}$$

(2) 应用行列式的定义,有

$$D_4=2\cdot\begin{vmatrix}4&4&-1\\3&-2&6\\-1&2&2\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}3&4&-1\\5&-2&6\\2&2&2\end{vmatrix}$$
$$+2\cdot\begin{vmatrix}3&4&-1\\5&3&6\\2&-1&2\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}3&4&4\\5&3&-2\\2&-1&2\end{vmatrix}$$

容易求得

$$\begin{vmatrix}4&4&-1\\3&-2&6\\-1&2&2\end{vmatrix}=-116,\quad\begin{vmatrix}3&4&-1\\5&-2&6\\2&2&2\end{vmatrix}=-54,\quad\begin{vmatrix}3&4&-1\\5&3&6\\2&-1&2\end{vmatrix}=55$$

于是

$$D_4=2\times(-116)-3\times(-54)+2\times55-0=40$$

例 2 求下三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda_1&&&O\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\ *&&&\lambda_n\end{vmatrix}$$

这里$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$称为**主对角元**,$O$表示主对角元上方的所有元素皆为0,$*$表示主对角元下方的元素不全为0.

解 将行列式逐次按第一行展开得

$$D_n=\lambda_1\begin{vmatrix}\lambda_2&&O\\&\ddots&\\ *&&\lambda_n\end{vmatrix}+0=\lambda_1\left(\lambda_2\begin{vmatrix}\lambda_3&&O\\&\ddots&\\ *&&\lambda_n\end{vmatrix}+0\right)$$
$$=\cdots=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n$$

即下三角行列式等于主对角元的乘积.

例 3 求拟下三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}O&&&\mu_1\\&&\mu_2&\\&\iddots&&\\ \mu_n&&&*\end{vmatrix}$$

这里$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$称为**次对角元**,O表示次对角元上方的所有元素皆为0,$*$表示

次对角元下方的元素不全为 0.

解 应用行列式的定义,有

$$D_n=(-1)^{1+n}\mu_1\begin{vmatrix} O & & \mu_2 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \mu_n & & * \end{vmatrix}=(-1)^{(1+n)+n}\mu_1\mu_2\begin{vmatrix} O & & \mu_3 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \mu_n & & * \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=(-1)^{(1+n)+n+(n-1)+\cdots+4}\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-2}\begin{vmatrix} 0 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & a_{n2} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_{n-1}\mu_n$$

即拟下三角行列式 $=\pm$ 次对角元的乘积,这里"$\pm$"号由 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 为偶数或奇数决定.

下面应用行列式的定义证明行列式也可按第一列展开.

定理 1.1.1 设行列式 D_n 如式(1.1.1)所示,则行列式 D_n 可按第一列展开,即

$$D_n=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1} \tag{1.1.3$_n$}$$

***证** 由于 $D_2=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}$,所以 $n=2$ 时结论成立. 归纳假设 $n-1$ 阶行列式也可按第一列展开. 首先将 D_n 按第一行展开得

$$D_n=a_{11}A_{11}+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}A_{1j}=a_{11}A_{11}+\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} \tag{1.1.4}$$

由于 $M_{1j}(j=2,3,\cdots,n)$ 是 $n-1$ 阶行列式,将 M_{1j} 按第一列展开得

$$M_{1j}=\sum_{i=2}^{n}(-1)^{(i-1)+1}a_{i1}(M_{1j})_{i1} \tag{1.1.5}$$

由于 $(M_{1j})_{i1}=(M_{11})_{ij}$,将其代入式(1.1.5),再将式(1.1.5)代入式(1.1.4)得

$$D_n=a_{11}A_{11}+\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i+j}a_{1j}a_{i1}(M_{11})_{ij} \tag{1.1.6}$$

另一方面,将 D_n 按第一列展开,其值记为 D_n',则

$$D_n'=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}=a_{11}A_{11}+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}A_{i1}=a_{11}A_{11}+\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} \tag{1.1.7}$$

其中 $M_{i1}(i=2,3,\cdots,n)$ 是 $n-1$ 阶行列式. 将 M_{i1} 按第一行展开得

$$M_{i1}=\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+(j-1)}a_{1j}(M_{i1})_{1j} \tag{1.1.8}$$

由于$(M_{i1})_{1j}=(M_{11})_{ij}$，将其代入式(1.1.8)，再将式(1.1.8)代入式(1.1.7)得

$$D_n'=a_{11}A_{11}+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+i+j}a_{i1}a_{1j}(M_{11})_{ij} \tag{1.1.9}$$

由式(1.1.6)和式(1.1.9)得$D_n=D_n'$，即式$(1.1.3)_n$成立. 于是，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，原式均成立. □

例 4 求上三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n\end{vmatrix}$$

这里$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为主对角元，$O$表示主对角元下方的所有元素皆为0，$*$表示主对角元上方的元素不全为0.

解 将行列式逐次按第一列展开得

$$D_n=\lambda_1\begin{vmatrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n\end{vmatrix}+0=\lambda_1\left(\lambda_2\begin{vmatrix}\lambda_3 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n\end{vmatrix}+0\right)$$
$$=\cdots=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n$$

即上三角行列式等于主对角元的乘积.

1.1.2 行列式的性质

按行列式的定义计算4阶以上的行列式，在一般情况下是相当繁琐的. 本小节研究行列式的性质，利用这些性质可将行列式化简，譬如化为上三角行列式或下三角行列式，然后再求值就比较简单了.

定理 1.1.2(性质 1) 将行列式转置，其值不变.

所谓行列式转置，就是主对角元不动，非主对角元a_{ij}与a_{ji}对换$(i\neq j)$. 应用行列式可以按第一行展开，又可以按第一列展开的结论，再利用数学归纳法即可证明该定理，这里不赘.

行列式D转置后的行列式称为D的**转置行列式**，记为D^{T}，则$D^{\mathrm{T}}=D$.

由性质1可知，行列式对"行"所具有的性质换为"列"也成立(反之亦然). 基于此，下面对行列式的其他性质只就"行"给出.

定理 1.1.3(性质 2) 将行列式两行对换，其值反号.

*证　分三种情况证明.

(1) 先证:将第一行与第二行对换,其值反号.即证

$$D_n' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -D_n \qquad (1.1.10)_n$$

应用数学归纳法,$n=2$ 时,因为

$$D_2' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -D_2$$

所以式$(1.1.10)_2$ 成立.假设式$(1.1.10)_{n-1}$ 成立,设行列式 D_n' 中(i,j) 元的余子式为 M_{ij}',行列式 D_n 中(i,j) 元的余子式为 M_{ij},显然 $M_{11}'=M_{21}$,$M_{21}'=M_{11}$,又因M_{ij}' 是 $n-1$ 阶行列式,由假设有

$$M_{i1}' = -M_{i1} \quad (i=3,4,\cdots,n)$$

将行列式 D_n' 按第一列展开得

$$\begin{aligned} D_n' &= (-1)^{1+1}a_{21}M_{11}' + (-1)^{2+1}a_{11}M_{21}' + (-1)^{3+1}a_{31}M_{31}' + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}' \\ &= (-1)^{1+1}a_{21}M_{21} + (-1)^{2+1}a_{11}M_{11} - (-1)^{3+1}a_{31}M_{31} - \cdots - (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} \\ &= -(-1)^{1+1}a_{11}M_{11} - (-1)^{2+1}a_{21}M_{21} - (-1)^{3+1}a_{31}M_{31} - \cdots - (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} \end{aligned}$$

将行列式 D_n 按第一列展开得

$$D_n = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{2+1}a_{21}M_{21} + (-1)^{3+1}a_{31}M_{31} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

所以 $D_n' = -D_n$,即式$(1.1.10)_n$ 成立.

(2) 再证:将相邻的第 $i(i=2,3,\cdots,n-1)$ 行与第 $i+1$ 行对换,其值反号.证明方法与上述(1) 完全相同,不赘述.

(3) 最后证明:将不相邻的第 i 行与第 j 行对换,其值反号.这里不妨设 $i<j$,令 $j-i=k(2\leqslant k\leqslant n-1)$.采用相邻两行对换的方法,即将第 i 行逐次与它的下一行对换 k 次,则第 i 行调到第 j 行,再将原第 j 行从第 $j-1$ 行逐次与它的上一行对换 $k-1$ 次调至原第 i 行位置,这样经过 $2k-1$(奇数) 次相邻两行对换,将 D_n 的第 i 行与第 j 行实现对换.因为$(-1)^{2k-1}=-1$,所以将不相邻的第 i 行与第 j 行对换,行列式的值反号. □

推论 1.1.4　行列式一行元素全为 0,其值为 0.(证明留作习题)

推论 1.1.5　行列式两行相同,其值为 0.(证明留作习题)

定理 1.1.6(性质 3)　将行列式一行 k 倍,其值 k 倍.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证　当 $i=1$ 时,将上式两边按第一行展开即得结论成立.当 $i>1$ 时,将上式两边的第 i 行与第一行对换,由性质 2 得两边皆变号,然后两边再按第一行展开即得结论成立. □

推论 1.1.7　行列式中两行成比例,其值为 0.

证　设行列式的第 j 行是第 i 行的 k 倍,将比例常数 k 提出去后,则行列式的第 i 行与第 j 行变为相同,应用推论 1.1.5 即得其值为 0. □

定理 1.1.8(性质 4)　只有第 i 行($1\leqslant i\leqslant n$)不同的两个行列式相加,其值等于这一行对应元素相加而其他元素不变的行列式的值.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证　当 $i=1$ 时,将上式中的 3 个行列式按第一行展开即得结论成立.当 $i>1$ 时,将上式中的 3 个行列式的第 i 行与第一行对换,由性质 2 得两边皆变号,然后两边再按第一行展开即得结论成立.(注:此性质常常逆向使用) □

定理 1.1.9(性质 5)　将行列式第 j 行的 k 倍加到第 i 行上,其值不变.即