

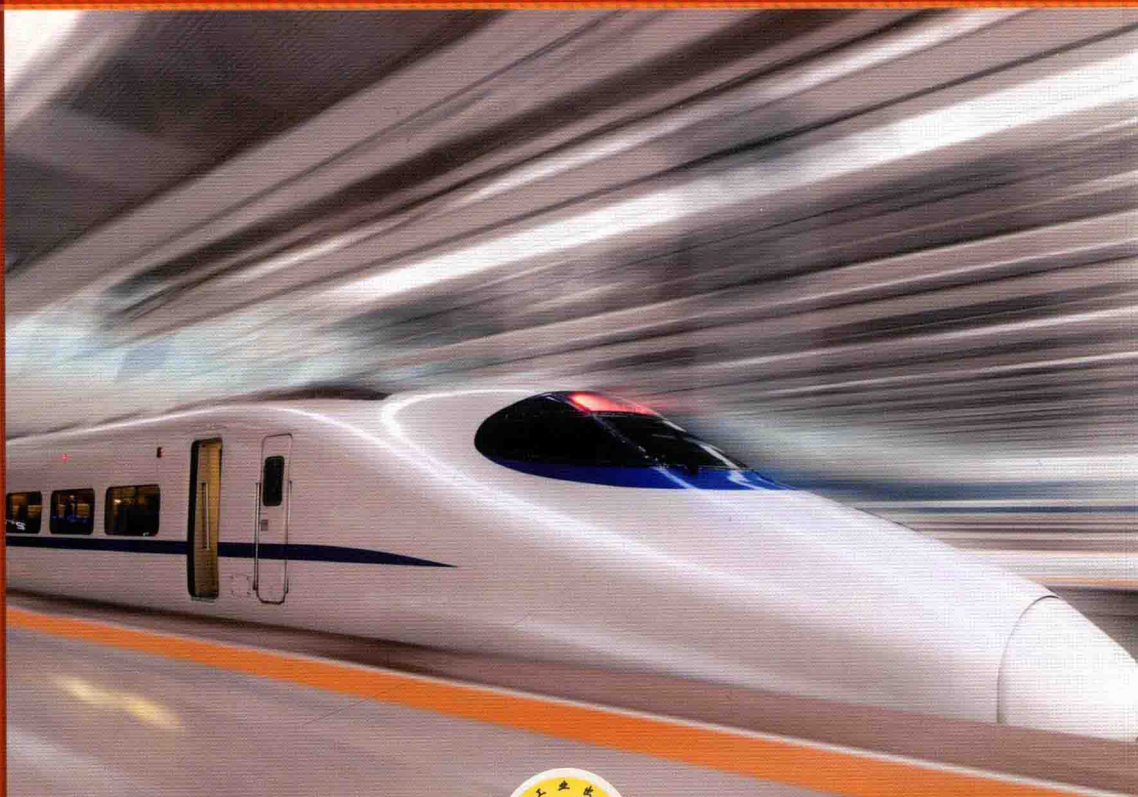


21世纪高等教育规划教材

# 新编 工程力学教程

◎ 袁向丽 刘文秀 李云涛 主编

XINBIAN GONGCHENG LIXUE JIAOCHENG



机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS

21 世纪高等教育规划教材

# 新编工程力学教程

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 主 编 | 袁向丽 | 刘文秀 | 李云涛 |
| 副主编 | 曹玉芬 | 吴国强 | 郑晓刚 |
| 参 编 | 张 俊 | 张东阳 | 蔡路政 |
| 主 审 | 孟庆东 |     |     |



机械工业出版社

本书主要适用于普通高等工科院校 60 ~ 90 课内学时的“工程力学”课程。

全书涵盖了理论力学和材料力学的基础知识。在内容顺序安排上有一定特色：运动学→动力学→材料力学，以期达到节省学时、提高教学效率的目的。

书中结合理论分析和例题，列有一定数量的思考题，以启发读者深入思考，其中包括初学者易误会之处以及需要灵活掌握的方法。编者在选择这些问题时力戒呆板，以防学生死记硬背。在教学中，这些思考题也可供课堂讨论使用。

编者还设计制作了电子课件，内容图文并茂并配有精美的动画，同时附上各章的习题和自我测试题（备考试题）参考答案，教师可在机工教育服务网（[www.cmpedu.com](http://www.cmpedu.com)）免费注册下载。

本书具有较大的专业覆盖面，可以满足不同专业、不同学时课程的需要，可作为高等院校机械类、近机械类和工程类专业开设“工程力学”课程的教材。同时本书具有阐述简洁明了、通俗易懂的特点，因而也适合作为上述同类专业的职工大学、函授大学、远程教育等院校的教材，还可供其他有关专业的师生和工程技术人员、管理人员参考。

### 图书在版编目（CIP）数据

新编工程力学教程/袁向丽，刘文秀，李云涛主编. —北京：机械工业出版社，2018.12

21 世纪高等教育规划教材

ISBN 978-7-111-61208-7

I. ①新… II. ①袁…②刘…③李… III. ①工程力学—高等学校—教材  
IV. ①TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 244470 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：张金奎 责任编辑：张金奎 陈崇昱

责任校对：张晓蓉 封面设计：张 静

责任印制：孙 炜

天津嘉恒印务有限公司印刷

2019 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 23.25 印张 · 599 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-61208-7

定价：49.80 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线：010-88379833

机工官网：[www.cmpbook.com](http://www.cmpbook.com)

读者购书热线：010-88379649

机工官博：[weibo.com/cmp1952](http://weibo.com/cmp1952)

教育服务网：[www.cmpedu.com](http://www.cmpedu.com)

封面无防伪标均为盗版

金书网：[www.golden-book.com](http://www.golden-book.com)

# 前 言

为适应 21 世纪科学技术的发展和教学改革的需要,编者参照教育部颁布的《工程力学课程教学基本要求》编写了这本教材,本书主要适用于普通高等工科院校机械、机电、工程等专业的“工程力学”课程,全书按 60~90 课内学时编写(一般带\*号或\*\*号的为选讲内容)。

在编写过程中,一方面考虑到学生的入学水平逐年提高,并通过前期基础课程(如高等数学、物理学等)的学习已具备了一定的理论基础知识;另一方面兼顾在我国高等教育的发展与改革中,学校的数量与类型增多,对课程提出了不同层次的要求。结合工程力学课程的学时不断压缩的实际情况,本着“提高起点,降低重心”的原则,编者对原有内容进行了改革,在课程内容的取舍和编排方式上,更具有针对性、应用性和综合性。同时,编者积极引入面向 21 世纪的新内容,并在一定程度上消除了大学物理中力学部分与工程力学之间的重叠内容。在不降低教学基本要求的前提下,对课程体系进行了较大幅度的改革与创新,把教材由传统的四篇(静力学、运动学、动力学和材料力学)改为三篇(运动学、动力学和材料力学),把静力学的内容放在动力学相应的章节中讲授。编者认为,静力学问题原本就是动力学问题的一个特例,它的分析方法(如力的投影、合成、分解及平衡)也是动力学分析的基础,将原静力学问题回归到动力学中,并作为其基础叙述,使此部分知识更容易融会贯通、易讲易学。此前,按这种体系改革的教材(试用讲义)编者已使用多届,取得了较好的教学效果,较明显地节省了学时,提高了教学效率。

本书在有关理论力学的内容中,以矢量数学作为工具,使理论力学基本概念的数学描述更为简洁。在顺序安排上具有如下的特点:运动学→动力学→材料力学。

第 1 篇为运动学部分。分为 3 章,其主要内容为:运动学基础、点的合成运动及刚体的平面运动。

第 2 篇为动力学部分。分为 6 章,其主要内容为:刚体动力学的基本概念、力系的简化与平衡、质点运动微分方程、动能定理、达朗贝尔原理(动静法)、动量定理和动量矩定理。

第 3 篇为材料力学部分。分为 11 章,涵盖了材料力学的主要内容,包括:材料力学基础、拉伸与压缩、剪切与挤压、扭转、弯曲内力和弯曲强度、弯曲变形及梁的刚度计算、应力状态理论和强度理论、组合变形、压杆稳定、交变应力及其疲劳破坏、能量法基础。

本书具有较大的专业覆盖面,可以满足不同专业、不同学时课程的需要。

本书可作为普通高等工科院校机械、机电、工程等专业学习“工程力学”课程的教材,亦可供上述同类专业的高职院校和成人教育(如夜大、函大等)及网络教育使用。

参与本书编写的人员有:青岛科技大学的袁向丽、刘文秀、张东阳、蔡路政,天津海运职业学院的吴国强,水利部产品质量标准研究所的曹玉芬、郑晓刚、张俊,山东旭辉银盛泰集团的李云涛。编写人员(以姓氏笔画排序)分工如下:

刘文秀(第 11、14、15 章)

李云涛(第 13、19、20 章)

吴国强(第 5 章及全部附录)

张俊(第 7 章)

张东阳（校核第3篇，并对习题做出参考解答；设计制作第3篇的电子课件）

郑晓刚（第8~10章、第12章）

袁向丽（前言、绪论、第1~4章、第6章）

曹玉芬（第16~18章）

蔡路政（校核第1、2篇，并对习题做出参考解答；设计制作第1、2篇的电子课件）

本书由袁向丽、刘文秀、李云涛任主编；曹玉芬、吴国强、郑晓刚任副主编。由袁向丽负责统稿。

本书承蒙青岛科技大学孟庆东教授精心审阅，并提出了许多宝贵意见。

本书在编写过程中参考了多本同类教材和习题集以及其中的部分素材和插图，并得到了有关院校教学主管部门的协助和支持。在编写出版过程中得到了机械工业出版社的大力支持与帮助。在此向上述人员和单位一并致以深深的谢意。

因编者水平所限，书中难免有错误与疏漏之处，望各位读者不吝赐教。

编者

2018年8月

# 目 录

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| 前言                      |     |
| 绪论                      | 1   |
| 第1篇 运动学                 | 5   |
| 第1章 运动学基础               | 7   |
| 1.1 点的运动学               | 7   |
| 1.2 刚体的基本运动             | 15  |
| 1.3 定轴转动刚体上点的速度和加速度     | 17  |
| 思考题                     | 21  |
| 习题                      | 22  |
| 第2章 点的合成运动              | 26  |
| 2.1 点的合成运动的概念           | 26  |
| 2.2 点的速度合成定理            | 27  |
| 2.3 点的加速度合成定理           | 30  |
| 思考题                     | 32  |
| 习题                      | 33  |
| 第3章 刚体的平面运动             | 36  |
| 3.1 刚体平面运动的运动特征与运动分解    | 36  |
| 3.2 平面图形上点的速度分析         | 37  |
| 3.3 用基点法求平面图形内各点的加速度    | 41  |
| 思考题                     | 42  |
| 习题                      | 42  |
| 第2篇 动力学                 | 45  |
| 第4章 刚体动力学的基本概念          | 47  |
| 4.1 力与力的投影              | 47  |
| 4.2 力的四个公理及刚化原理         | 48  |
| 4.3 力矩与力偶               | 51  |
| 4.4 约束和约束力              | 53  |
| 4.5 物体的受力分析与受力图         | 58  |
| 思考题                     | 63  |
| 习题                      | 63  |
| 第5章 力系的简化与平衡            | 66  |
| 5.1 汇交力系的简化与平衡          | 66  |
| 5.2 力偶系的简化与平衡           | 68  |
| 5.3 空间任意力系的简化           | 70  |
| 5.4 空间力系的平衡条件和平衡方程      | 73  |
| 5.5 空间平衡力系的平面解法         | 75  |
| 5.6 平面任意力系的平衡           | 76  |
| 5.7 平面平行力系的平衡方程         | 79  |
| 5.8 静定与超静定的概念 物体系统的平衡问题 | 80  |
| *5.9 简单静定平面桁架的内力计算      | 82  |
| 5.10 摩擦                 | 85  |
| 5.11 考虑滑动摩擦的平衡问题        | 88  |
| 5.12 重心和形心              | 90  |
| 思考题                     | 94  |
| 习题                      | 95  |
| 第6章 质点运动微分方程            | 100 |
| 6.1 动力学基本定律             | 100 |
| 6.2 质点运动微分方程及其应用        | 101 |
| 思考题                     | 105 |
| 习题                      | 105 |
| 第7章 动能定理                | 107 |
| 7.1 质心和转动惯量             | 107 |
| 7.2 力的功                 | 110 |
| 7.3 动能                  | 115 |
| 7.4 动能定理                | 117 |
| 7.5 功率与机械效率             | 122 |
| 思考题                     | 123 |
| 习题                      | 123 |
| 第8章 达朗贝尔原理(动静法)         | 126 |
| 8.1 惯性力与质点的达朗贝尔原理       | 126 |
| 8.2 质点系的达朗贝尔原理          | 128 |
| 8.3 刚体惯性力系的简化           | 129 |
| 8.4 用动静法解质点系统动力学问题的应用举例 | 131 |
| 8.5 定轴转动刚体轴承的附加动反力      | 133 |
| 思考题                     | 134 |
| 习题                      | 135 |
| 第9章 动量定理和动量矩定理          | 137 |
| 9.1 动量定理                | 137 |
| 9.2 动量矩定理               | 144 |
| *9.3 刚体的平面运动微分方程        | 148 |
| 9.4 动力学普遍定理的综合应用        | 150 |
| 思考题                     | 152 |
| 习题                      | 152 |

|                            |     |                                       |     |
|----------------------------|-----|---------------------------------------|-----|
| 第3篇 材料力学 .....             | 155 | 图的概念 .....                            | 234 |
| 第10章 材料力学基础 .....          | 157 | 14.5 弯矩图的叠加法 .....                    | 240 |
| 10.1 变形固体的概念 .....         | 157 | * 14.6 平面刚架的内力 .....                  | 241 |
| 10.2 材料力学的研究对象 .....       | 158 | * 14.7 平面曲杆的内力 .....                  | 242 |
| 10.3 构件的外力与杆件变形的形式 .....   | 159 | 14.8 弯曲应力 .....                       | 243 |
| 10.4 材料力学的内力及截面法 .....     | 160 | 14.9 梁弯曲横截面上的切应力 .....                | 250 |
| 10.5 应力 .....              | 161 | 14.10 梁的强度计算 .....                    | 253 |
| 10.6 线应变和切应变 .....         | 162 | 14.11 提高梁的弯曲强度的措施 .....               | 256 |
| 思考题 .....                  | 162 | 思考题 .....                             | 258 |
| 习题 .....                   | 163 | 习题 .....                              | 259 |
| 第11章 拉伸与压缩 .....           | 164 | 第15章 弯曲变形及梁的刚度计算 .....                | 264 |
| 11.1 轴向拉伸与压缩的概念与实例 .....   | 164 | 15.1 弯曲变形的计算 .....                    | 264 |
| 11.2 轴向拉伸或压缩时横截面上的内力 ..... | 165 | 15.2 梁的刚度计算 .....                     | 271 |
| 11.3 轴向拉伸或压缩时截面上的应力 .....  | 167 | 15.3 简单超静定梁的解法 .....                  | 272 |
| 11.4 轴向拉伸或压缩时的变形 .....     | 172 | 15.4 提高梁刚度的措施 .....                   | 276 |
| 11.5 材料在拉伸和压缩时的力学性能 .....  | 176 | 思考题 .....                             | 276 |
| 11.6 拉伸和压缩的强度计算 .....      | 182 | 习题 .....                              | 277 |
| 11.7 拉伸和压缩超静定问题 .....      | 185 | 第16章 应力状态理论和强度理论 .....                | 280 |
| 思考题 .....                  | 190 | 16.1 应力状态概述 .....                     | 280 |
| 习题 .....                   | 191 | 16.2 平面应力状态分析 .....                   | 281 |
| 第12章 剪切与挤压 .....           | 196 | 16.3 广义胡克定律 .....                     | 287 |
| 12.1 剪切和挤压的概念 .....        | 196 | 16.4 强度理论 .....                       | 290 |
| 12.2 剪切强度条件 .....          | 197 | 思考题 .....                             | 295 |
| 12.3 挤压强度条件 .....          | 198 | 习题 .....                              | 295 |
| 12.4 综合强度计算及其他剪切计算 .....   | 202 | 第17章 组合变形 .....                       | 298 |
| 思考题 .....                  | 205 | 17.1 概述 .....                         | 298 |
| 习题 .....                   | 205 | 17.2 第一类组合变形——组合后为单向<br>应力状态 .....    | 299 |
| 第13章 扭转 .....              | 208 | 17.3 第二类组合变形——组合后为复杂<br>应力状态 .....    | 304 |
| 13.1 扭转概念和工程实例 .....       | 208 | 思考题 .....                             | 307 |
| 13.2 外力偶矩和扭矩的计算 .....      | 209 | 习题 .....                              | 308 |
| 13.3 切应力互等定理与剪切胡克定律 .....  | 211 | 第18章 压杆稳定 .....                       | 310 |
| 13.4 圆轴扭转时横截面上的应力 .....    | 213 | 18.1 压杆稳定的概念及失稳分析 .....               | 310 |
| 13.5 圆轴扭转时的强度计算 .....      | 217 | 18.2 临界力和临界应力 .....                   | 311 |
| 13.6 扭转变形和刚度条件 .....       | 218 | 18.3 欧拉公式的适用范围——中、小柔度杆<br>的临界应力 ..... | 315 |
| * 13.7 圆柱形密封圈螺旋弹簧 .....    | 221 | 18.4 压杆的稳定性计算 .....                   | 319 |
| 13.8 矩形截面杆扭转理论简介 .....     | 223 | 18.5 提高压杆稳定性的措施 .....                 | 322 |
| 思考题 .....                  | 225 | 思考题 .....                             | 323 |
| 习题 .....                   | 225 | 习题 .....                              | 323 |
| 第14章 弯曲内力和弯曲强度 .....       | 228 | 第19章 交变应力及疲劳破坏 .....                  | 325 |
| 14.1 弯曲和平面弯曲的概念与实例 .....   | 228 |                                       |     |
| 14.2 梁的简化及分类 .....         | 229 |                                       |     |
| 14.3 梁的内力——剪力和弯矩 .....     | 230 |                                       |     |
| 14.4 剪力方程和弯矩方程及剪力图和弯矩      |     |                                       |     |

|                                   |     |                                     |     |
|-----------------------------------|-----|-------------------------------------|-----|
| 19.1 交变载荷和交变应力的概念 .....           | 325 | 思考题 .....                           | 346 |
| 19.2 疲劳破坏和持久极限 .....              | 326 | 习题 .....                            | 346 |
| 19.3 影响构件持久极限的因素及强度<br>计算简介 ..... | 327 | 附录 .....                            | 348 |
| 思考题 .....                         | 330 | 附录 A 力系分类及平衡方程 .....                | 348 |
| * 第 20 章 能量法基础 .....              | 331 | 附录 B 常用材料的力学性能 .....                | 349 |
| 20.1 概述 .....                     | 331 | 附录 C 常见规则形状均质刚体的转动惯量和<br>惯性半径 ..... | 349 |
| 20.2 外力功和应变能的计算 .....             | 331 | 附录 D 几种常见图形的几何性质 .....              | 350 |
| 20.3 卡氏定理 .....                   | 334 | 附录 E 平面图形的几何性质 .....                | 351 |
| 20.4 单位载荷法 .....                  | 337 | 附录 F 型钢规格表 .....                    | 356 |
| ** 20.5 运用能量法解超静定问题 .....         | 339 | 参考文献 .....                          | 361 |
| * 20.6 动载荷应力 .....                | 341 |                                     |     |

# 绪 论

## 0.1 力学和工程力学的概念

### 1. 力学的概念

力学是研究物质机械运动规律的科学。世界充满着物质，有形的固体和无形的空气都是力学的研究对象。力学所阐述的物质机械运动的规律，与数学、物理等学科一样，也是自然科学中的普遍规律。因此，力学是基础科学。同时，力学研究所揭示出的物质机械运动的规律，在许多工程技术领域中可以直接得到应用，实际面向工程，服务于工程。所以，力学又是技术科学。力学是工程技术学科的重要理论基础之一。工程技术的发展过程中不断提出新的力学问题，力学的发展又不断应用于工程实际并推动其进步，二者有着十分密切的联系。从这个意义上说，力学是沟通自然科学基础理论与工程技术实践的桥梁。

力学是最古老的物理科学之一，其历史可以追溯到阿基米德时代。力学探讨的问题十分广泛，研究的内容和应用的范围不断扩展，引起了几乎所有伟大科学家的兴趣。如伽利略、牛顿、达朗贝尔、拉格朗日、拉普拉斯、欧拉、爱因斯坦、钱学森等。

### 2. 工程力学的概念

工程力学是一门包含广泛内容的学科，它有众多分支，如理论力学、材料力学、结构力学、弹性力学、塑性力学、断裂力学等。本书所研究的工程力学仅为理论力学和材料力学两部分。然而这两部分却是研究其他力学的基础，故也称为工程力学基础。

## 0.2 工程力学基础所研究的两部分内容

### 1. 理论力学内容简介

理论力学是研究物体机械运动一般规律的科学。运动是物质的固有属性，大至宇宙，小至基本粒子，无不处在不断的运动变化之中，没有不运动的物质，也不能离开物质谈运动。物质的运动有多种形式，从简单的位置变动到复杂的思维活动，呈现出多种多样的运动形态，如天体的运动，车辆、飞机、机器等的运动，发热、发光等物理现象，化合与分解等化学变化，生命的生长过程以及社会现象等，这一切都是物质运动的不同表现。人们在对各种物质和各种运动形式以及它们之间的相互转化规律的研究过程中，形成了许多科学的分支。机械运动是指物体在空间的位置随时间的变化过程。机器上工件的旋转移动，飞机、舰艇和车辆的运动，地球围绕太阳的公转和本身的自转，地震时地壳的振动，空气相对飞机等的运动，地层中石油的流动等都是机械运动的现象。对各种不同形态的机械运动的研究产生了不同的力学分支。理论力学是研究机械运动的最普遍和最基本规律的学科。因此，理论力学既是各门力学学科的基础，又是各门力学学科与机械运动密切联系的工程技术学科的基础。

理论力学原是物理学的一个独立的分支，但它的内容远远超过了物理学中力学的内容。理论力学不仅要建立与力学有关的各种基本概念与理论，而且还要求能运用理论知识去解决某些工程实际问题。理论力学所研究的力学规律仅限于经典力学范畴，一般认为，经典力学是以牛顿定律为基础建立起来的力学理论。它仅适用于运动速度远小于光速的宏观物体的运动。绝大

多数工程实际问题都属于这个范围。至于速度接近于光速的宏观物体和微观粒子的运动,则是相对论和量子力学研究的范畴。

## 2. 材料力学内容简介

材料力学是研究组成机器、设备或结构的零件(在工程中称为构件)在外力作用下发生变形和破坏的规律,利用对这些规律性的认识,去解决怎样保证构件在外力作用下不致发生破坏或产生过大的变形及保证其稳定性诸问题。

经验和实验表明,任何机器或设备在工作时,都要受到各种各样的外力作用,而组成机器、设备或结构的构件在外力作用下都要产生一定程度的变形。如果构件的材料选择不当或尺寸设计不合理,则在外力作用下是不安全的:构件可能发生破坏,从而使设备毁坏;构件也可能产生过大的变形,而使设备不能正常工作;当外力达到某一定值时,还有的构件可能会突然失去原有的平衡形状,而使设备毁坏。因此,为了使机器或设备能安全而正常地工作,必须使构件具有足够的强度、刚度和稳定性。所谓强度是指构件抵抗破坏的能力;所谓刚度是指构件抵抗变形的能力;所谓稳定性是指构件保持其原有平衡形态的能力。构件的强度、刚度和稳定性统称为构件的承载能力。

在材料力学研究问题的过程中,实验研究和理论分析具有同等重要的地位。通过实验,可了解材料的基本力学性能,还可以观察构件的变形现象,从而确定构件内部力的分布特点。同时,由理论分析得出的结论,必须通过实验来验证其正确性。

## 0.3 工程力学基础的任务

由上述工程力学基础的研究内容可见,工程力学基础就是在对机器、设备或结构的构件进行受力分析研究的基础上,研究构件在外力作用下变形和破坏的规律。为所设计的构件选择适当的材料、合理的截面形状和尺寸,以保证达到强度、刚度和稳定性的要求。为使设备能够满足适用、安全和经济的要求,提供基础理论知识。

工程力学侧重于实际中的应用,是工科院校诸多专业学生必修的课程,它既是一系列后续课程的基础,又和工程实际问题联系紧密,可以单独或和其他知识一道解决工程实际问题。因此,工程力学是研究范围极其广泛的技术基础课程。

## 0.4 工程力学的学习方法

### 1. 联系实际

工程力学来源于人类长期的生活实践、生产实践与科学实验,并且广泛应用于各类工程实践中。因此,在实践中学习工程力学是一个重要的学习方法。

广泛联系与分析生活及生产中的各种力学现象,是培养未来的工程技术人员对工程力学产生兴趣的一条重要途径。而对工程力学的兴趣则是身心投入的一个重要起点。联系实际也是从获得理论知识到养成分析与解决问题能力之间的一座桥梁。初学工程力学者的通病就是感到“理论好懂,习题难解”,这就是缺少各种实践的过程(包括大量的课内外练习),没有完成理论到能力之间转化的一种反映。

### 2. 善于总结

将书读薄是做学问的一种基本方法。读一本书后要将其总结成几页材料,惟其如此,才能抓住一个章节、一本书乃至一门学科的精髓,才能融会贯通,才能使其真正成为自己的知识。

理论需要总结,解题的方法与技巧也需要总结。本书例题中常有一题多解和多题一解的现

象，其目的就在于传授方法，培养举一反三的能力。

### 3. 勤于交流

相互交流是获取知识的一种重要手段，课堂教学、习题讨论、课件利用，以及网上交流都是交流的方式，只有经常表述自己的观点，不断纠正自己的错误理念，才能使自己的综合素质得到提高。



# 第 1 篇 运 动 学

---

运动学属于理论力学研究的范畴，是理论力学的基础部分。

运动学是从几何方面来研究物体的机械运动，即研究物体的位置随时间的变化，而不考虑物体运动变化的物理原因（即不计物体所受的力和物体的质量）。运动学的任务是建立物体的运动规律，确定物体运动的有关特征，包括点的轨迹、速度、加速度，刚体的角速度和角加速度，以及它们之间的相互关系等。

运动学首先遇到的问题是确定物体在空间的位置，物体的位置只能相对地描述，即只能确定一物体相对于另一物体的位置，这后一物体称为参考体，将坐标系固连在参考体上，则此坐标系称为参考坐标系或参考系。如果物体在所选的参考系中的位置不发生变化，则称该物体处于静止状态，如果物体在所选参考系中的位置随时间而变化，则称该物体处于运动状态。选用不同的参考系，可以得到不同的结果。

运动学的知识在工程实际中应用十分广泛，例如，对各种机器设备中的传动机械进行设计时，需进行运动分析，同时运动学也是动力学的基础。

在量度时间时，要注意区别瞬时和时间间隔这两个概念。瞬时是指某一时刻，而时间间隔则是指两个不同瞬时之间的一段时间。

在运动学中要研究点的运动、刚体的基本运动、点的合成运动以及刚体的平面运动。



# 第 1 章 运动学基础

由于计算机的发展和普及,运动学分析法在工程计算中的地位不断提高,特别是在工程实际中常常注重对运动全过程的分析,而不仅仅限于分析特定瞬时的运动,这一要求完全可以由分析法的数值计算来满足。本章主要研究点的运动和刚体的简单运动的分析法,它是研究物体复杂运动的基础。另外,简要介绍一些平面机构运动的分析法。

## 1.1 点的运动学

点的运动学是研究一般物体运动的基础,又具有独立的应用意义。本节将研究点的简单运动,研究点相对某一个参考系的几何位置随时间变动的规律。所研究的点既包括由物体抽象得来的点,也包括物体上的某一具体的点。

用分析法研究动点在空间的运动,首先要选择一个合适的参考系。然后用该参考系的坐标描述动点在任意瞬时的空间位置,即建立动点的运动方程。最后,用求导数的方法计算动点的速度和加速度。本节在已有的高等数学和大学物理知识的基础上,分别介绍描述点的运动的三种方法:矢径法、直角坐标法和自然法。利用这三种方法建立点的运动方程(用以描述点在空间的位置随时间变化的规律)及求点的速度和加速度。

### 1.1.1 用矢量法表示点的位置、速度和加速度

#### 1. 点的运动方程

为了确定点  $M$  在任一瞬时的空间位置,可在参考系上选取某固定点  $O$  为坐标原点,自点  $O$  向点  $M$  作矢量  $r$ ,称  $r$  为点  $M$  相对于原点  $O$  的矢径,如图 1-1 所示。在点  $M$  的运动过程中,矢径  $r$  的大小和方向随时间连续变化,故矢径  $r$  是时间  $t$  的单值连续函数,表示为

$$r = r(t) \tag{1-1}$$

式 (1-1) 称为矢量形式的点  $M$  的运动方程。随着时间的变化,矢径  $r$  的末端描绘出一条连续曲线,称为矢端曲线,也就是点  $M$  的运动轨迹。

#### 2. 点的速度

点运动的快慢和方向用速度表示。如图 1-2 所示,设由瞬时  $t$  到瞬时  $t' = t + \Delta t$ ,点由  $M$  运动到  $M'$ ,相应的矢径由  $r$  变化到  $r'$ 。点在  $\Delta t$  时间间隔内的位移为

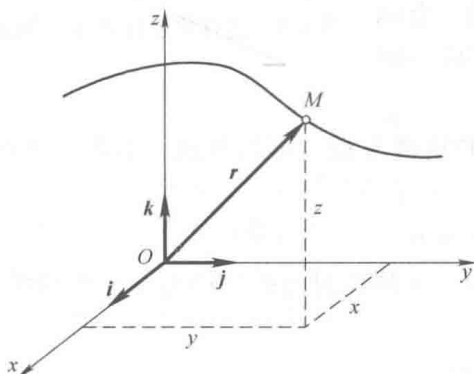


图 1-1 点  $M$  的运动方程

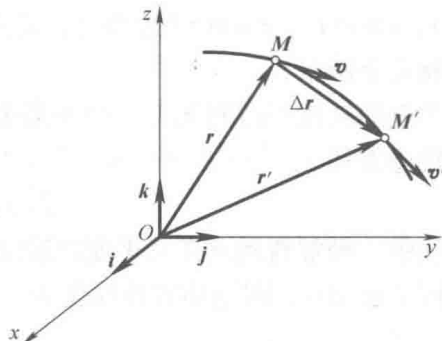


图 1-2 点  $M$  的运动速度

$$\Delta \mathbf{r} = \overrightarrow{MM'} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$$

点在  $\Delta t$  时间间隔内的平均速度为

$$\mathbf{v}^* = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

当  $\Delta t$  趋近于零时, 平均速度  $\mathbf{v}$  的极限称为点在瞬时  $t$  的速度, 表示为

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (1-2)$$

即点的速度等于点的矢径  $\mathbf{r}$  对时间的一阶导数。

点的速度  $\mathbf{v}$  是矢量, 其大小表明点在瞬时  $t$  运动的快慢, 其方向沿轨迹在  $M$  点处的切线并指向点前进的一方, 如图 1-2 所示。在国际单位制中, 速度的单位为  $\text{m/s}$ 。

### 3. 点的加速度

点运动速度的变化可用加速度表示。如图 1-2 所示, 设由瞬时  $t$  到瞬时  $t' = t + \Delta t$ , 点由  $M$  运动到  $M'$ , 相应的速度由  $\mathbf{v}$  变化到  $\mathbf{v}'$ 。在  $\Delta t$  时间间隔内, 点的速度的改变量为

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$$

所以点在  $\Delta t$  时间间隔内的平均加速度为

$$\mathbf{a}^* = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

当  $\Delta t$  趋近于零时, 平均加速度的极限称为点在瞬时  $t$  的加速度, 表示为

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{a}^* = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (1-3)$$

即点的加速度等于它的速度  $\mathbf{v}$  对时间的一阶导数, 或等于矢径  $\mathbf{r}$  对时间的二阶导数。在国际单位制中, 加速度的单位为  $\text{m/s}^2$ 。

## 1.1.2 用直角坐标法确定点的位置、速度和加速度

### 1. 用直角坐标表示点的运动方程

如图 1-3 所示, 当动点  $M$  在空间运动时, 它在某瞬时的位置也可以用空间直角坐标系的坐标  $(x, y, z)$  来表示, 位置坐标  $x$ 、 $y$ 、 $z$  都是时间  $t$  的单值连续函数, 即

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

式 (1-4) 就是动点  $M$  的直角坐标运动方程。当函数  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  已知时, 动点  $M$  在任一瞬时的位置就完全确定。

因为动点的轨迹与时间无关, 如果要求点的轨迹方程, 可以从式 (1-4) 中消去  $t$ , 即得动点的轨迹方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1-5)$$

在工程中, 经常遇到点在某平面内运动的情形, 显然此时点的轨迹为一平面曲线。如取该平面为坐标平面  $xOy$ , 则运动方程简化为

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

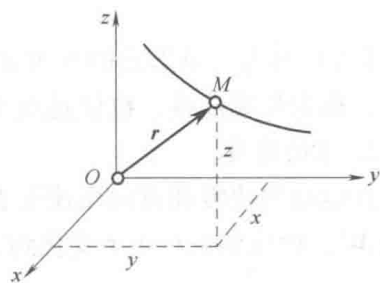


图 1-3 用直角坐标表示点的运动方程

当动点始终沿一直线运动时,如取该直线为坐标轴  $Ox$ , 则运动方程为

$$x = x(t) \quad (1-7)$$

## 2. 用直角坐标表示点的速度

点的速度是描述点运动快慢和方向的物理量。如图1-4所示,若以  $O$  点为坐标原点,建立  $Oxyz$  直角坐标系,则动点  $M$  的矢径可表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1-8)$$

式中,  $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$  分别为沿直角坐标轴正向的单位矢量。

由于动点的速度等于矢径对时间的一阶导数,故动点的速度可表示为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad (1-9)$$

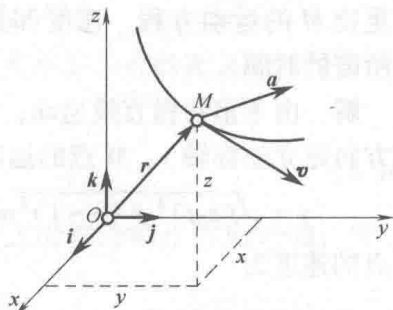


图 1-4 用直角坐标表示点的速度

设动点  $M$  的速度矢量  $\mathbf{v}$  在直角坐标轴上的投影为  $v_x$ 、 $v_y$  和  $v_z$ , 即

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \quad (1-10)$$

比较式 (1-9) 和式 (1-10), 得到

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt} \quad (1-11)$$

因此,动点的速度在各直角坐标轴上的投影分别等于动点的相应位置坐标对时间的一阶导数。

由式 (1-11) 求得  $v_x$ 、 $v_y$  和  $v_z$  后,速度  $\mathbf{v}$  的大小和方向就可由它的这三个投影完全确定。速度的大小及方向余弦为

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \\ \cos(\mathbf{v}, \mathbf{i}) &= \frac{v_x}{v}, \cos(\mathbf{v}, \mathbf{j}) = \frac{v_y}{v}, \cos(\mathbf{v}, \mathbf{k}) = \frac{v_z}{v} \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

## 3. 用直角坐标表示点的加速度

与前述点的速度和点的位置的关系类似,由于动点的加速度等于速度对时间的一阶导数,所以动点的加速度  $\mathbf{a}$  在直角坐标轴上的投影  $a_x$ 、 $a_y$ 、 $a_z$  分别等于动点的速度  $\mathbf{v}$  在直角坐标轴上的投影  $v_x$ 、 $v_y$ 、 $v_z$  对时间  $t$  的一阶导数,即

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

上式表明,动点的加速度在各直角坐标轴上的投影分别等于动点的相应位置坐标对时间的二阶导数。加速度的大小及方向余弦为

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \\ \cos(\mathbf{a}, \mathbf{i}) &= \frac{a_x}{a}, \cos(\mathbf{a}, \mathbf{j}) = \frac{a_y}{a}, \cos(\mathbf{a}, \mathbf{k}) = \frac{a_z}{a} \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$