线性代数

马　荣　编著

南京大学金陵学院

Linear Algebra

南京大学出版社

线性代数

马　荣　编著

南京大学金陵学院

Linear Algebra

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 马荣编著. —南京：南京大学出版社，2018.1

ISBN 978-7-305-19849-6

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 009171 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 线性代数
编　　著 马　荣
责任编辑 沈　洁　吴　汀　　编辑热线 025-83593962

照　　排 南京理工大学资产经营有限公司
印　　刷 南京鸿图印务有限公司
开　　本 787×960　1/16　印张 19.25　字数 294 千
版　　次 2018 年 1 月第 1 版　2018 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-19849-6
定　　价 40.00 元

网　　址:http://www.njupco.com
官方微博:http://weibo.com/njupco
官方微信号:njupress
销售咨询热线:(025)83594756

前　言

在我国的高等教育逐步由精英教育向大众化教育转变的过程中，独立学院应运而生，而教材的建设却没有跟上脚步，目前的独立学院多数还是沿用普通高等学校的专业教材，在教与学的过程中问题日益凸显，严重影响了独立学院的教育教学质量，也制约了独立学院的发展，因此独立学院的配套教材建设迫在眉睫。本书正是根据独立学院培养高素质应用型人才的目标，同时依据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会2014年颁布的《大学数学课程教学基本要求》中“经济和管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写的，可以作为大学经济管理类学生和大专院校学生及自学者学习线性代数的教材和参考书。

随着我国经济的快速发展，经济数学方法的研究和应用日益受到广大经济研究者和经济工作人员的重视，也对经济管理类学生的专业知识提出了更高的要求。本书在编写过程中尽量与经济学各专业紧密贴合，更着重于线性代数基础课程在专业上的应用，重点培养学生的创新和实践能力。同时以经典的线性代数理论与经济学结合的案例来增强学生对这门课程的学习兴趣，让学生学会如何运用线性代数的基础知识来研究经济问题，对自身专业的学习有一个新的突破。

为了更有针对性，本书在编著时，尽量减少了理论性的推导，去掉一些繁琐复杂的证明，增加典型的易于理解的例题和具有实用性的与经济管理类相关的应用问题。全书共分五章，第1章行列式和第2章矩阵是线性代数的基本研究工具，第3章利用行列式和矩阵来研究线性方程组，第4章介绍在经济和工程中应用十分广泛的特征值理论，第5章介绍二次型。本书各小节后设有练习题，书末附有部分习题参考答案与提示，为贯彻循序渐进的原则，习题

分 A、B 两组，可以供不同学习层次的读者选择。

感谢教研室主任黄卫华教授对全书的指导和非常仔细的审校，感谢南京大学金陵学院教务处和基础教学部领导的关心和支持，感谢数学教研室各位同仁的帮助，感谢魏云峰和邵宝刚两位老师对本课程的支持，感谢南京大学出版社吴汀和沈洁两位编辑认真负责的编校工作。

由于时间紧迫、水平有限，本书有不当及错误之处，敬请广大同行和读者朋友不吝赐教。

编著者

2018 年 1 月

【例 1.1.2】 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{vmatrix}.$$

解　按对角线法则，有

$$D=1\times5\times9+2\times6\times7+3\times4\times8-3\times5\times7-2\times4\times9-1\times6\times8=0.$$

【例 1.1.3】 解方程

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\x & 1 & 0\\x^2 & 3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

解　$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\x & 1 & 0\\x^2 & 3 & 1\end{vmatrix}=3+3x-x^2-x=-x^2+2x+3$$

$$=-(x-3)(x+1)=0,$$

故 $x=3$ 或 $x=-1$.

习题 1.1

A 组

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1 & -4\\2 & 3\end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix}2 & -3\\-1 & 6\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}x & y\\y & x+y\end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix}a^2 & ab\\ab & b^2\end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\3 & 2 & 1\\0 & 1 & 4\end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\0 & 2 & -4\\-3 & 4 & 1\end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$； (8) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 3 \end{vmatrix}$.

2. 求解下列方程：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & -2 \\ 8 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix}=87$； (2) $\begin{vmatrix} x-3 & -2 & 1 \\ 2 & x+2 & -2 \\ -3 & -6 & x+1 \end{vmatrix}=0$.

3. 当 a,b 满足什么条件时，行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -4 & b \\ -1 & 2 & b \end{vmatrix}\neq 0$?

4. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么?

5. 求解下列二元线性方程组：

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2=9, \\ 2x_1-3x_2=4; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x_1+4x_2=1, \\ 5x_1+7x_2=3. \end{cases}$

6. 求解下列三元线性方程组：

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ 4x_1+2x_2+x_3=3, \\ 9x_1-3x_2+x_3=28; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x-z=1, \\ 2x+4y-z=1, \\ -x+8y+3z=2. \end{cases}$

B 组

1. 证明下列等式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

1.2 *n* 阶行列式

式(1.1)和(1.2)分别用二阶和三阶行列式给出了二元和三元线性方程

组的解，明显地揭示出方程组的解与方程组的系数和常数项之间的关系，便于记忆. 很自然地想：这一结果能否推广到一般的 n 元线性方程组的情形，即 n 元线性方程组的解能否也用相应的行列式来表示？为此，首先要将二阶、三阶行列式进行推广. 为给出 n 阶行列式的定义，我们先来介绍排列和逆序数.

1.2.1　排列和逆序数

定义 1.2.1　由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数组成的一个有序数组称为一个 **n 级排列**.

例如，25134 是一个 5 级排列. 全部的 3 级排列有 123，132，231，213，312，321，共 6 个. 同理，可推出全部的 n 级排列共有 $n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1$ 个，记作 $n!$，读作 **n 的阶乘**.

按自然数顺序从小到大的排列 $12\cdots n$ 称为**自然排列或标准排列**.

定义 1.2.2　在一个排列中，如果有大的数 i 排在小的数 j 的前面，则称 i 与 j 为一个**逆序**(reverse order). 一个排列中全部的逆序的总数称为这个排列的**逆序数**(number of reverse order).

排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记作 $N(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如，排列 12435 中，4 在 3 前面，构成一个逆序，因此 $N(12435)=1$. 求逆序数，可以先看 1 构成的逆序个数，再看 2 构成的逆序个数……最后加起来. 如排列 54321，1 构成的逆序个数为 4，2 构成的逆序个数为 3……因此 $N(54321)=4+3+2+1+0=10$. 自然排列没有逆序数，即逆序数为 0.

【例 1.2.1】　求排列 $n(n-1)(n-2)\cdots21$ 的逆序数.

解　1 构成的逆序个数为 $n-1$，2 构成的逆序个数为 $n-2$，…，故

$$N(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\frac{n(n-1)}{2}.$$

定义 1.2.3　逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例如，12435 是奇排列，54321 是偶排列. 特别地，自然排列的逆序数是零，因此是偶排列.

定义 1.2.4　在一个排列中将两个数 i,j 互换，称作一个**对换**(transposition)，记作 (i,j).

例如，$2431 \xrightarrow{(1,2)} 1432 \xrightarrow{(1,2)} 2431$，因此，我们很容易得到对换的第一个性质.

性质 1 一个排列连续作两次相同的对换，排列还原.

性质 2 两个不同的 n 级排列作同一个对换得到的仍然是不同的排列.

证 设 P_1, P_2 是两个不同的 n 级排列，作同一个对换 (i,j)，$P_1 \xrightarrow{(i,j)} P_1'$，$P_2 \xrightarrow{(i,j)} P_2'$，下证 $P_1' \neq P_2'$.

假设 $P_1' = P_2'$，再作对换 (i,j)，则由性质 1，$P_1' \xrightarrow{(i,j)} P_1$，$P_2' \xrightarrow{(i,j)} P_2$，故 $P_1 = P_2$，这与原条件矛盾，命题得证.

性质 3 一个对换把全部的 $n(n \geqslant 2)$ 级排列两两配对，且每一对的两个排列在这个对换下互变.

证 设所作的对换为 (i,j).

任取一个 n 级排列 $P: \cdots i \cdots j \cdots$，则 P 与 $P_1: \cdots j \cdots i \cdots$ 显然构成一对，且在对换 (i,j) 下互变.

若另有 P_2，$P_2 \neq P_1$，且 P_2 也与 P 在对换 (i,j) 下配成一对，则 $P_2 \xrightarrow{(i,j)} P$，$P_1 \xrightarrow{(i,j)} P$，这与性质 2 矛盾，所以排列 P 有且仅有一个排列在 (i,j) 下与之配对，从而全部的 n 级排列可以两两配对.

定理 1.2.1 对换改变排列的奇偶性.

证明略.

由此定理，很容易得到下述推论.

推论 1.2.1 作偶数次对换不改变排列的奇偶性，作奇数次对换改变排列的奇偶性.

推论 1.2.2 $n(n \geqslant 2)$ 级排列中奇偶排列各占一半，都等于 $\frac{n!}{2}$ 个.

证 对全部的 $n!$ 个 n 级排列作对换 (i,j)，由性质 3，它们可以两两配对，每对中的两个排列在 (i,j) 之下互变，故共有 $\frac{n!}{2}$ 对. 又由定理 1.2.1，每对中各有一个奇排列与偶排列，故结论成立.

定理 1.2.2 任一个 n 级排列都可以经过一系列对换与自然排列 $12\cdots n$ 互变，且所作对换个数的奇偶性与原排列的奇偶性一致.

证明略.

例如,4 级排列 4231,是奇排列,经过 1 次对换(1,4)可变为自然排列 1234,5 级排列 52314,是偶排列,经过两次对换(1,5),(4,5)可变为自然排列 12345.

1.2.2 n 阶行列式的定义

观察三阶行列式的结构,

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

我们发现,

(1) D_3 是 6 项的代数和;

(2) 每一项都是三个元素的乘积,且这三个元素分别位于不同行不同列;

(3) 所有位于不同行不同列的三个元素的乘积都在这个和式中,

$$a_{11}\left\langle\begin{matrix} a_{22}-a_{33} \\ a_{23}-a_{32} \end{matrix}\right. \qquad a_{12}\left\langle\begin{matrix} a_{21}-a_{33} \\ a_{23}-a_{31} \end{matrix}\right. \qquad a_{13}\left\langle\begin{matrix} a_{22}-a_{31} \\ a_{21}-a_{32} \end{matrix}\right.$$

(4) 符号的规律为:当行指标按自然顺序 123 排列后,观察列指标 $j_1j_2j_3$,带正号的列指标的排列是 123,231,312,这三个排列的共同之处是都是偶排列,带负号的列指标的排列是 321,213,132,这三个都是奇排列,因此,符号可统一表示为$(-1)^{N(j_1j_2j_3)}$.

定义 1.2.5 将 n^2 个数排成 n 行 n 列

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

称为 ***n* 阶行列式**(determinant),它的值等于所有不同行不同列的 n 个数的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和,其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列. 每一项都按以下规

律带正负号:当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时带正号;当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时带负号.

注 式(1.3)可简记为 $|a_{ij}|$,a_{ij} 称为元素,i 称为行指标,j 称为列指标.从左上到右下的直线称为主对角线,从右上到左下的直线称为副对角线.

按定义 1.2.5,n 阶行列式可以表示为

$$|a_{ij}|=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

和式共有 $n!$ 项,其中带正号的项与带负号的项各占一半,即$\frac{n!}{2}$项. 特别地,$n=1$ 时,$|a|=a$,不要与绝对值混淆.

其实更一般地,不同行不同列的 n 个元素的乘积可以表示为 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$,其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 是行指标构成的 n 级排列,$j_1j_2\cdots j_n$ 是列指标构成的 n 级排列. 要确定这一项的符号,可以适当交换乘积中元素的位置,使行指标变为 $12\cdots n$,再按定义 1.2.5 确定所带的符号. 例如,$a_{13}a_{44}a_{32}a_{21}$ 是 4 阶行列式的一项,因 $a_{13}a_{44}a_{32}a_{21}=a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$,$(-1)^{N(3124)}=(-1)^2=1$,故为正号. 而对于一般的情形,我们不加证明地给出如下定理:

定理 1.2.3 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 的一般项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 所带的符号为 $(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}$,若取定行指标 $i_1i_2\cdots i_n$,则

$$|a_{ij}|=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

若取定列指标 $j_1j_2\cdots j_n$,则

$$|a_{ij}|=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

特别地,取 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 $12\cdots n$,则

$$|a_{ij}|=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

【例 1.2.2】 设 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix},$$

问 $a_3d_4c_2b_1$ 是否为 D 的项？若是，所带的符号是什么？

解　$a_3d_4c_2b_1$ 是位于 D 的不同行不同列的 4 个元素，因此是 D 的项. 又由于 $a_3d_4c_2b_1=a_{13}d_{44}c_{32}b_{21}$，按行指标为自然顺序排列为 $a_{13}b_{21}c_{32}d_{44}$，因此所带的符号为 $(-1)^{N(3124)}=(-1)^2=1$，为正号.

【例 1.2.3】　利用 n 阶行列式的定义计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

解　由于行列式中不为零的项只有 $1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n$ 这一项，把这 n 个元素按行指标为自然顺序排列时，对应的列指标为 $n-1,n-2,\cdots,2,1,n$，其逆序数为

$$N((n-1)(n-2)\cdots 21n)=\frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

故 n 阶行列式

$$D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!.$$

1.2.3　几种特殊的行列式

1. 上三角行列式

形如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的行列式称为**上三角行列式**，其特点是主对角线下方的元素全为 0. 行列式中不为 0 的项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，所带符号为 $(-1)^{N(12\cdots n)}=1$，故上三角行列式

$$|a_{ij}|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即主对角线上元素的乘积.

2. 下三角行列式

形如$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$的行列式称为**下三角行列式**,其特点是主对角线上方的元素全为 0. 同理,下三角行列式

$$|a_{ij}|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3. 对角行列式

形如$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$的行列式称为**对角行列式**,其特点是除主对角线上的元素外其余全为 0. 同理可得

$$|a_{ij}|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

【例 1.2.4】 计算下列 n 阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 (1) 此行列式的特点是副对角线下方的元素全为 0,不为 0 的项只有 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$,列排列的逆序数为

$$N(n(n-1)\cdots 21)=\frac{n(n-1)}{2},$$

故
$$|a_{ij}|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(2)与(3)同理可得，$|a_{ij}|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

习题 1.2

A 组

1. 求下列排列的逆序数，以及奇偶性：

(1) 43512；　　(2) 2673415；

(3) 32675184；　　(4) 987654321.

2. 写出把排列 12345 变成排列 25431 所作的对换.

3. 选择 i 和 j，使：

(1) $4i2j3$ 成偶排列；　　(2) $1i25j4897$ 成奇排列.

4. 写出四阶行列式中所有包含 a_{23} 并带正号的项.

5. 在五阶行列式中，项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 和 $a_{31}a_{25}a_{43}a_{14}a_{52}$ 带有什么符号？

6. 求 i 与 j 的值，使得五阶行列式中项 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{5j}a_{44}$ 是带有正号的项.

7. 在函数

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$

中，求 x^3 和 x^4 的系数.

8. 用定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a_3 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2017 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2018 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$；(6) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

B 组

1. 设排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为k，问排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少？

2. 设

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=0,$$

证明奇偶排列各半.

3. 设

$$F(x)=\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & x-a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & x-a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & x-a_{44} \end{vmatrix},$$

求:(1) x^4 的系数;(2) x^3 的系数;(3) 常数项.

1.3 行列式的性质

当行列式的阶数很大时,直接用定义来计算行列式几乎是不可能的. 因此我们进一步研究行列式的性质,利用这些性质可以简化行列式的计算.

性质 1 行列互换,行列式的值不变,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D^{\mathrm{T}}.$$

证 设

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n}(-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n}$$

$$=\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n}(-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n}=D.$$

注 D^{T} 称为 D 的**转置行列式**(transpose determinant). 显然有 $(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D$. 由性质 1 知行列式的行与列地位是平等的. 因此,我们只要研究行的性质即可.

引理 1.3.1 由于 $|a_{ij}|$ 等于所有不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和. 若指定第 i 行,则每项含且只含第 i 行的一个元素,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (\sum \text{含 } a_{i1} \text{ 的项}) + (\sum \text{含 } a_{i2} \text{ 的项}) + \cdots + (\sum \text{含 } a_{in} \text{ 的项})$$

$$= a_{i1}(\sum \cdots) + a_{i2}(\sum \cdots) + \cdots + a_{in}(\sum \cdots)$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

其中 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}$ 与第 i 行元素无关.

性质 2 用数 k 去乘行列式的某一行(列),等于用数 k 去乘行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 由引理 1.3.1,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (ka_{i1})A_{i1} + (ka_{i2})A_{i2} + \cdots + (ka_{in})A_{in}$$

$$= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in})$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$