

KAOYAN SHUXUE
LINIAN ZHENTI MINGSHI JIEXI

考研数学 历年真题名师解析

数学二

薛威 编

11年真题解析，冲刺高分的经典题型盘点

- ▶ 分门别类，方便检索，精确定位知识点
- ▶ 新东方名师编写，真题解析详尽，思路开阔
- ▶ 解析与试卷独立成册，复习训练两不误



化学工业出版社

考研数学

历年真题名师解析

数学二

薛威 编



化学工业出版社

· 北京 ·

本书根据 2008 年到 2018 年共 11 年来考研大纲的知识重点与变化编写而成,对考研数学二的知识点进行了全面的梳理,将其分门别类,整理出重点知识,并对 11 年来的真题进行了详尽的解析,根据题型进行专项训练,帮助考研学生举一反三掌握好相关知识,轻松应对考试。为配合题型讲解进行模拟训练,本书还专门附有真题试卷,帮助考生全面把握出题形式。

本书解析步骤详尽,方法易懂,是编者近年来教学经验的总结与凝练,助力考生提高复习效率,冲刺考场高分。

图书在版编目 (CIP) 数据

考研数学历年真题名师解析. 数学二/薛威编. —北京:

化学工业出版社, 2018. 8

ISBN 978 - 7 - 122 - 32498 - 6

I. ①考… II. ①薛… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 136786 号

责任编辑: 旷英姿

装帧设计: 关 飞

责任校对: 边 涛

出版发行: 化学工业出版社 (北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)

印 装: 三河市双峰印刷装订有限公司

787mm×1092mm 1/16 印张 20¹/₄ 字数 400 千字 2018 年 9 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询: 010-64518888 (传真: 010-64519686) 售后服务: 010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书, 如有缺损质量问题, 本社销售中心负责调换。

定 价: 52.00 元

版权所有 违者必究

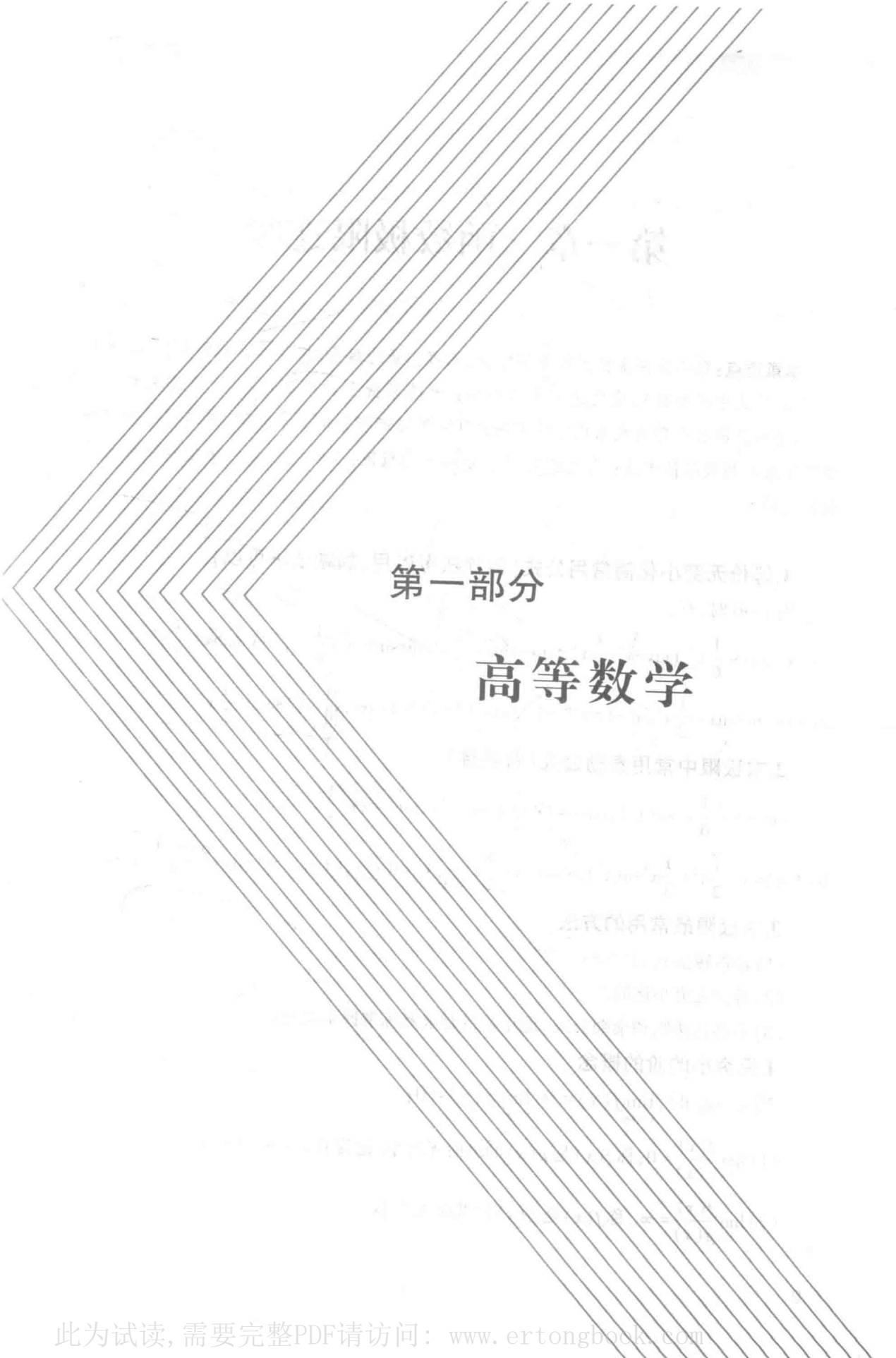
目 录

第一部分 高等数学

第一章	函数极限连续	2
第二章	一元函数微分学	29
第三章	一元函数积分学	63
第四章	多元函数的微分学	90
第五章	重积分	111
第六章	常微分方程	127

第二部分 线性代数

第一章	行列式	144
第二章	矩阵及其运算	150
第三章	向量	159
第四章	线性方程组	164
第五章	特征值和特征向量	184
第六章	二次型	203



第一部分

高等数学

第一章 函数极限连续

本章重点:熟练掌握求极限的常用方法、无穷小量的概念、极限的反问题的解法(已知极限,求表达式中的参数),这些是常考的内容;熟练掌握七种未定式转换、等价无穷小量化简、洛必达法则和泰勒公式求极限的方法;熟练掌握定积分定义求极限、夹逼准则和单调有界原理求数列极限的方法;会处理变限积分形式的极限;了解间断点的类型判断和连续函数的性质.

1. 等价无穷小化简常用公式(乘除法可以用,加减法不可以)

当 $x \rightarrow 0$ 时,有:

$$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3, \tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3, \tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3, \arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3, x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3,$$

$$\arcsin x - \arctan x \sim \frac{1}{2}x^3, a^x - 1 = e^{x \ln a} - 1 \sim x \ln a, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2.$$

2. 求极限中常用泰勒公式(背熟练)

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2).$$

3. 求极限最常用的方法

(1) 幂指转换 $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$.

(2) 等价无穷小化简.

(3) 洛必达法则和泰勒公式(近年题目要求熟练掌握泰勒公式).

4. 无穷小的阶的概念

当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$:

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小, 记为 $f(x) = o(g(x))$.

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, 称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小.

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$, 称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶无穷小, 记为 $f(x) = O(g(x))$.

(4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的等价无穷小, 记为 $f(x) \sim g(x)$.

(5) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g^k(x)} = C \neq 0$, 称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 k 阶无穷小.

5. 极限反问题的两个重要定理

(1) 已知 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

(2) 已知 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = B \neq 0, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

这两个重要定理多用于无穷小量的阶的问题, 反求表达式中的参数.

6. 定积分定义求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx.$$

7. 间断点解题步骤

(1) 找出无定义的间断点 (例如分母为零的点).

(2) 求间断点的左右极限.

(3) 判断间断点的类型.

题型 1.1.1 函数的概念和性质

(2002 年, 数学二/数学四)

设函数 $f(x)$ 连续, 则下列函数中, 必为偶函数的是 ().

(A) $\int_0^x f(t^2) dt$

(B) $\int_0^x f^2(t) dt$

(C) $\int_0^x t[f(t) - f(-t)] dt$

(D) $\int_0^x t[f(t) + f(-t)] dt$

【解析】 设 $F(x) = \int_0^x t[f(t) + f(-t)] dt$, 则

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} t[f(t) + f(-t)] dt \\ &\stackrel{\text{令 } u=-t}{=} \int_0^x (-u)[f(-u) + f(u)] d(-u) \\ &= \int_0^x u[f(u) + f(-u)] du = F(x). \end{aligned}$$

即 $F(x)$ 是偶函数, (D) 是正确的.

类似方法可以证明 (A) (C) 均为奇函数. 对于 (B) 选项, 因为

$$\int_0^{-x} f^2(t) dt \stackrel{u=-t}{=} \int_0^x -f^2(-t) dt \text{ 不是偶函数.}$$

(2005 年, 数学一/数学二)

设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ”表示“ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有 ().

- (A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数 (B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数
(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数 (D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

【解析】 当取 $f(x) = \cos x + 1$, $F(x) = \sin x + x + 1$ 时, 可判断 (B) (C) (D) 不正确. 故选项 (A) 正确.

(2005 年, 数学三/数学四)

以下四个命题中, 正确的是 ().

- (A) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界
(B) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界
(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界
(D) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界

【解析】 若取 $f(x) = \ln x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x}$, 可知选项 (A) 和 (B) 都不正确. 若取 $f(x) = \sqrt{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 可知选项 (D) 是不正确的. 故 (C) 是正确的.

(2014 年, 数学一/数学二)

设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x) = 2(x-1)$, $x \in [0, 2]$, 则 $f(7) =$ _____.

【解析】 因为 $f(x)$ 是周期为 4 的奇函数, 所以 $f'(x)$ 是周期为 4 的偶函数. 如图 1.1.1 所示, $y = f'(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的图像, 其在第三象限中与坐标轴围成的三角形的面积为 1.

因为 $f(-1) - f(0) = \int_0^{-1} f'(x) dx = 1$, 且 $f(0) = 0$, $f(x)$ 的周期为 4, 所以

$$f(7) = f(7-2 \times 4) = f(-1) = 1.$$

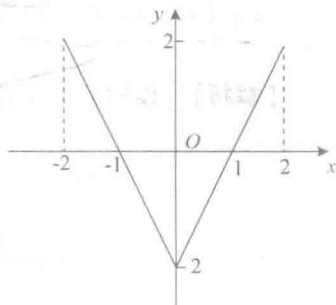


图 1.1.1

题型 1.1.2 极限的概念和性质

(2014 年, 数学三)

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有().

- (A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ (B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$ (C) $a_n > a - \frac{1}{n}$ (D) $a_n < a + \frac{1}{n}$

【解析】由题设知 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$, 当 n 充分大时, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a| > \frac{|a|}{2}$, 故选(A).

(2015 年, 数学三)

设 $\{x_n\}$ 是数列, 下列命题中不正确的是().

- (A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$
 (B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$
 (C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$
 (D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

【解析】例证法, 设 $x_{3n} = 1 + \frac{1}{3n}$, $x_{3n+1} = 1 + \frac{1}{3n+1}$, $x_{3n+2} = 2 + \frac{1}{3n+2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = 1$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+2} = 2$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 1$. 故选(D).

(2017 年, 数学二)

设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则().

- (A) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
 (B) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sqrt{|x_n|}) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
 (C) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x_n^2) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
 (D) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sin x_n) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

【解析】设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \sin a = 0$, $\sin a = 0$, 有无穷多个解, 不收敛.

$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sqrt{|x_n|}) = a + \sqrt{|a|} = 0$, 则 $a = 0$ 或 $a = -1$, 不收敛.

$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x_n^2) = a + a^2 = 0$, 则 $a = 0$ 或 $a = -1$, 不收敛.

于是(A)(B)(C)被排除. 故选(D).

题型 1.1.3 数列极限的计算

(2008 年, 数学一/数学二)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是 ().

- (A) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛 (B) 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛
(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛 (D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

【解析】 在选项 (B) 中, 因为数列 $\{x_n\}$ 单调, 考虑到 $f(x)$ 是一个单调有界函数, 所以数列 $\{f(x_n)\}$ 不仅单调, 而且有界, 由单调有界原理, 从而收敛. 故选 (B).

(2006 年, 数学一/数学二)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$.

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限;

(II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【证明】 (I) 当 $0 < x < \pi$ 时, 有 $0 < \sin x < x$, 当 $0 < x_n < \pi$ 时, 有 $0 < x_{n+1} = \sin x_n < x_n < \pi$.

已知 $0 < x_1 < \pi$, 由数学归纳法知对一切 $n = 1, 2, \dots$, 有 $0 < x_{n+1} = \sin x_n < x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单调减少且 $x_n > 0$. 由单调有界准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 记为 a , 且 $a \geq 0$.

等式 $x_{n+1} = \sin x_n$ 两边令 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 得 $a = \sin a$.

由于 $f(x) = x - \sin x$, 当 $0 < x < \pi$ 时, $f'(x) = 1 - \cos x > 0$, 易知 $x = 0$ 是解且唯一. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

【解析】 (II) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $x_n \rightarrow 0$, 考虑函数极限:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \left(1 + \frac{\sin x}{x} - 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\cos x - 1}{3x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

从而

$$\text{原式} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

(2009 年, 数学二)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-x} \sin nx dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【解析】 令 $I_n = \int e^{-x} \sin nx dx = -e^{-x} \sin nx + n \int e^{-x} \cos nx dx$

$$= -e^{-x} \sin nx - ne^{-x} \cos nx - n^2 I_n,$$

所以

$$I_n = -\frac{(\sin nx + n \cos nx) e^{-x}}{n^2 + 1} + C,$$

即

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{(n \cos nx + \sin nx) e^{-x}}{n^2 + 1} \right]_{0-}^1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{(n \cos n + \sin n) e^{-1}}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 1} \right] = 0. \end{aligned}$$

(2011年, 数学一/数学二)

(I) 证明: 对任意的正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 成立;

(II) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ ($n = 1, 2, \cdots$), 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

【证明】 (I) 【方法1】 令 $F(x) = x - \ln(1+x)$ ($x > 0$), 则 $F'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0$ ($x > 0$),

即当 $x > 0$ 时 $F(x)$ 单调增加. 又 $F(0) = 0$, 所以 $F(x) > 0$ ($x > 0$), 从而

$$F'\left(\frac{1}{n}\right) > 0, \text{ 即 } \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

再令 $G(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ ($x > 0$), 则 $G'(x) = \frac{x}{(1+x)^2} > 0$ ($x > 0$), $G(x)$ ($x > 0$) 单调增加. 又

$G(0) = 0$, 所以 $G(x) > 0$ ($x > 0$), 从而

$$G\left(\frac{1}{n}\right) > 0, \text{ 即 } \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

综上所述, 有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

【方法2】 令 $f(x) = \ln x$ ($x > 0$). 对任意正整数 n , 在 $[n, n+1]$ 连续, $(n, n+1)$ 上可导, 根据拉格朗日中值定理, 得

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(1+n) - \ln n = \frac{1}{\xi}, \text{ 其中 } n < \xi < n+1,$$

所以

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

(II) 【方法1】 由(I)知, 当 $n \geq 1$ 时, 有

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$\begin{aligned} &> \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln n \\ &= \ln(1+n) - \ln n > 0, \end{aligned}$$

故数列 $\{a_n\}$ 单调减少且有下界,所以 $\{a_n\}$ 收敛.

【方法2】 因为

$$a_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \right], \text{ 且 } \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2} (n \rightarrow \infty).$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(2012年, 数学二)

设 $a_n > 0 (n=1, 2, \cdots)$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的().

(A) 充分必要条件

(B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件

(D) 既非充分也非必要条件

【解析】 因为 $a_n > 0 (n=1, 2, \cdots)$, 所以数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的.

如果 $\{S_n\}$ 有界, 根据单调有界准则, 知 $\{S_n\}$ 的极限存在, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. 由此可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0,$$

即数列 $\{a_n\}$ 收敛. 可知数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分条件.

但是, 若 $\{a_n\}$ 收敛, $\{S_n\}$ 却未必有界. 例如, 取 $a_n = 1 (n=1, 2, \cdots)$, 则 $\{a_n\}$ 收敛, 但 $\{S_n\} = n$ 无上界. 可见 $\{S_n\}$ 有界并非是 $\{a_n\}$ 收敛的必要条件. 故选(B).

(2012年, 数学二)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【解析】

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{1+n^2} + \frac{n^2}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2+n^2} \right) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right] \cdot \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(2012 年, 数学二)

(I) 证明方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ (n 为大于 1 的整数) 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内有且仅有一个实根;(II) 记 (I) 中的实根为 x_n , 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限.【证明】(I) 令 $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$ ($n > 1$), 则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上连续, 且

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = -\frac{1}{2^n} < 0, \quad f(1) = n - 1 > 0,$$

由闭区间上连续函数的零点定理知, 方程 $f(x) = 0$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内至少有一个实根.当 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, $f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1 > 1 > 0$, 故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内单调增加.综上所述, 方程 $f(x) = 0$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内有且仅有一个实根.(II) 由 $x_n \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 知数列 $\{x_n\}$ 有界, 又

$$x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = 1, \quad x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^n + \cdots + x_{n+1} = 1.$$

因为 $x_{n+1}^{n+1} > 0$, 所以 $x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n > x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n-1} + \cdots + x_{n+1}$,于是有 $x_n > x_{n+1}$, $n = 1, 2, \cdots$ 即 $\{x_n\}$ 单调减少. 综上所述数列 $\{x_n\}$ 单调有界, 故 $\{x_n\}$ 收敛.记 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. 由于 $\frac{x_n - x_{n+1}}{1 - x_n} = 1$, 令 $n \rightarrow \infty$ 并注意到 $\frac{1}{2} < x_n < x_1 < 1$, 则有 $\frac{a}{1-a} = 1$, 解得 $a = \frac{1}{2}$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

(2013 年, 数学二)

设函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.(I) 求 $f(x)$ 的最小值;(II) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限.【解析】(I) $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $f(x)$ 的唯一驻点 $x = 1$.

又 $f''(1) = \frac{2-x}{x^3} \Big|_{x=1} = 1 > 0$, 故 $f(1) = 1$ 是唯一极小值, 即最小值.

(II) 由 (I) 的结果知 $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$, 从而有 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1 \leq \ln x_n + \frac{1}{x_n}$,

于是 $x_n \leq x_{n+1}$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

又由题设知 $\ln x_n$ 有意义, 故 $x_n > 0$, 于是 $x_{n+1} > 0$; 故由 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$, 知 $\ln x_n < 1$, 因此 $x_n < e$. 从而数列 $\{x_n\}$ 单调增加, 且有上界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 可知 $a \geq x_1 > 0$. 在 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ 两边取极限, 得 $\ln a + \frac{1}{a} \leq 1$, 又由 (I) 知:

$\ln a + \frac{1}{a} \geq 1$, 故 $\ln a + \frac{1}{a} = 1$, 可得 $a = 1$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

(2016 年, 数学二/数学三)

极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \cdots + n \sin \frac{n}{n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解析】

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sin \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n} \sin \frac{n}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{k}{n} \sin \frac{k}{n} \\ &= \int_0^1 x \sin x dx = - \int_0^1 x d \cos x \\ &= -x \cos x \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos x dx = \sin 1 - \cos 1. \end{aligned}$$

(2018 年, 数学一/数学二/数学三)

设数列 $\{x_n\}$ 满足, $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$. 证: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【证明】 先证 $\{x_n\}$ 有界性. 设 $f(x) = e^x - 1 - x, x > 0$, 则有

$$f'(x) = e^x - 1 > 0.$$

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 取最小值, 故 $f(x) > f(0) = 0, \frac{e^x - 1}{x} > 1$, 易证得

$$e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} > 1.$$

即 $x_{n+1} > 0$. 故 x_n 有下界.

再证 $\{x_n\}$ 的单调性, 由拉格朗日中值定理得

$$e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{e^{\xi_n} - e^0}{x_n - 0} = e^{\xi}, \xi \in (0, x_n).$$

故 $x_{n+1} = \xi < x_n$, 数列 $\{x_n\}$ 单调减. 由单调有界原理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则有 $ae^a = e^a - 1$; 又因为当 $x > 0$ 时, $g(x) = xe^x - e^x + 1$ 的导数 $g'(x) = xe^x > 0$, 故 $g(x)$ 只有唯一的零点 $x=0$, 所以 $a=0$.

题型 1.1.4 函数极限的计算

(2008 年, 数学一/数学二)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.

【解析】

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(\sin x) \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin^2 x}{3x^2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(2008 年, 数学三)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$.

【解析】

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(2009 年, 数学二)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$.

【解析】

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x}}{4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan x - \sec^2 x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan^2 x}{4x} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(2009 年, 数学三)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【解析】

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} \sin x}{\frac{2}{3}x} = \frac{3}{2}e.$$

(2010 年, 数学一)

$$\text{极限} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = (\quad).$$

(A) 1

(B) e

(C) e^{a-b}

(D) e^{b-a}

【解析】 当 $a=b$ 时,

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a^2}{x^2 - a^2} \right)^{\frac{x^2 - a^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{x^2 - a^2} \cdot x} = e^0 = 1;$$

当 $a \neq b$ 时,

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(a-b)x + ab}{(x-a)(x+b)} \right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x + ab} \cdot \frac{(a-b)x + ab}{(x-a)(x+b)} \cdot x} = e^{a-b}.$$

故选(C).

(2010 年, 数学三)

设 $f(x) = \ln^{10} x$, $g(x) = x$, $h(x) = e^{\frac{x}{10}}$, 则当 x 充分大时有().

(A) $g(x) < h(x) < f(x)$

(B) $h(x) < g(x) < f(x)$

(C) $f(x) < g(x) < h(x)$

(D) $g(x) < f(x) < h(x)$

【解析】 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln^{10} x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{10}}}{x} = +\infty,$$

所以当 x 充分大时, 有 $f(x) < g(x) < h(x)$. 故选(C).

(2010 年, 数学三)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【解析】 设 $y = (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$, 则 $\ln y = \frac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x} = \frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}{\ln x},$

因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{\ln x}{x}}}{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1 - \ln x}{x}}{\frac{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \ln x}{1 - \ln x} = -1.$$

所以 原式 = e^{-1} .

(2011 年, 数学一)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{e^x - 1}}$.

【解析】 因为 $\left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{e^x - 1}} = \left\{ 1 + \left[\frac{\ln(1+x) - x}{x} \right] \right\}^{\frac{x}{\ln(1+x) - x} \cdot \frac{\ln(1+x) - x}{x} \cdot \frac{1}{e^x - 1}}$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x) - x}{x} \right] \cdot \frac{1}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

所以 原式 = $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

(2011 年, 数学二)

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解析】 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2^x - 1}{2} \right)^{\frac{2}{2^x - 1} \cdot \frac{2^x - 1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{2x} = e^{\frac{\ln 2}{2}} = \sqrt{2}.$

(2011 年, 数学三)

设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$, 则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解析】 由于 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}} = x \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+3t)^{\frac{1}{3t}} \right]^{3x} = x e^{3x}$, 所以

$$f'(x) = e^{3x} + 3x e^{3x} = (1+3x) e^{3x}.$$