高级微观经济学中的数学方法

周华 著

Optimal Solution

首都经济贸易大学出版社
Capital University of Economics and Business Press

高级微观经济学中的数学方法

周华 著

Optimal Solution

首都经济贸易大学出版社
Capital University of Economics and Business Press
· 北 京 ·

图书在版编目(CIP)数据

高级微观经济学中的数学方法/周华著.--北京:首都经济贸易大学出版社,2018.9

ISBN 978-7-5638-2828-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①周… Ⅲ.①微观经济学—经济数学 Ⅳ.①F016 ②F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 133244 号

高级微观经济学中的数学方法

周 华 著

责任编辑 田 学 晓 地

封面设计 周天逸

出版发行 首都经济贸易大学出版社

地 址 北京市朝阳区红庙(邮编 100026)

电 话 (010)65976483 65065761 65071505(传真)

网 址 http://www.sjmcb.com

E-mail publish@cueb.edu.cn

经 销 全国新华书店

照 排 北京砚祥志远激光照排技术有限公司

印 刷 北京九州迅驰传媒文化有限公司

开 本 710 毫米×1000 毫米 1/16

字 数 268 千字

印 张 15.25

版 次 2018 年 9 月第 1 版 2018 年 9 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5638-2828-9/F·1565

定 价 39.00 元

序　　言

高级微观经济学是以现代数学为基础研究经济个体的经济行为并揭示经济规律的经济学理论，是经济学的基础和最高境界。高级微观经济学力图通过现代数学使经济学成为真正的科学。一般来说，高级微观经济学的教材都有介绍该教材用到的数学预备知识或附录，如哈尔·R. 范里安著的《微观经济分析》(第三版)，安德鲁·马斯-克莱尔、迈克尔·D. 温斯顿和杰里·R. 格林著的《微观经济理论》，杰弗里·A. 杰里和菲利普·J. 瑞尼著的《高级微观经济理论》，戴维·M. 克雷普斯著的《高级微观经济学教程》和《高级微观经济学：选择与竞争性市场》，田国强著的《高级微观经济学》，蒋殿春编著的《高级微观经济学》等等。尽管如此，在使用这些教材的过程中，研究生(硕士研究生或博士研究生)在遇到相关的数学内容时，还是会遇到很多困难，特别是经济管理类研究生更是如此。原因如下：第一，对高级微观经济学用到的很多数学内容，如多元函数微分学，最优化理论等，很多研究生在本科学习期间都未涉及；第二，很难找到适合经济类院校研究生学习高级微观经济学时有关数学内容的参考书。因为已出版的经济数学著作大致可分为两类：一类是针对中初级微观经济学编写的经济数学，如迈克尔·霍伊等著的《经济数学》(第三版)等；另一类是龚六堂、蒋中一、王第海等编著出版的经济学中的优化方法，这些优化方法都是以向量函数微分学为基础介绍的，更适用于数学专业毕业的研究生阅读，一般经济类院校本科为背景的研究生选择这类著作作为参考书时会遇到更大的困难。

周华老师编著的《高级微观经济学中的数学方法》更适合非数学专业本科毕业的经济管理类研究生学习高级微观经济学时参考和使用。作者周华老师长期为首都经济贸易大学经济学实验班本科生讲授“数学分析”与“概率论与数理统计”，同时为数量经济专业研究生讲授“数理经济学”。他数学功底深厚，熟悉高级微观经济学，教学经验丰富，较好地将数学与经济学相结合，讲课深受学生欢迎。他将高级微观经济学中用到的数学知识归纳整理并系统化，使之构成比较完整的理论体系，根据经济类院校研究生的数学基础编著了这部《高级微观经济学中的数学方法》。对于一些定理或结论，作者给出了自己独特的证明，使阅读者更容易理解；同

时作者通过大量经济问题实例介绍数学理论和方法在高级微观经济学中的应用。因此本书是经济管理类研究生学好高级微观经济学的一部非常好的数学理论方法参考书，期待该书能为研究生学好高级微观经济学提供帮助并受到他们的欢迎。

王文举

北京物资学院校长，二级教授

首都经济贸易大学数量经济学博士生导师

中国数量经济学会副理事长

全国数理经济学会理事长

教育部高等学校经济与贸易类专业教学指导委员会副主任委员

中国物流与采购联合会副会长

前　　言

随着我国经济的高速发展,我国经济管理专业的高等教育也得到了迅猛的发展。中级微观经济学或高级微观经济学已经成为各大学经管类专业研究生的必修课,甚至成为某些高校经济类专业本科生的选修课。与初级微观经济学不同的是,中高级微观经济学研究的是经济个体面对多种生产要素或多种产品的经济行为,即如何进行优化选择。因此学习中高级微观经济学需要多元函数微分学和多元函数优化理论的支持。我国高校为本科学生,特别是经管类专业的本科学生开设的高等数学课主要介绍一元或二元函数的微积分及其应用,多元函数微分学的一般理论和多元函数的优化理论介绍得很少,因此背景为经管类专业本科毕业的研究生在学习高级微观经济学时往往会遇到数学上的困难。已出版的大多数经济数学教材主要是针对中初级微观经济学编写的,不适合作为学习高级微观经济学的参考书。虽然龚六堂与王第海两位教授分别出版了经济学中的优化方法等著作,但这些著作都是以向量函数微分学为基础编著的,经管类专业本科毕业的学生阅读这些著作会遇到更大的困难。我在讲授高级微观经济学时,总是先介绍一些高级微观经济学用到的数学基础和方法,但这些介绍是零碎的,不可能构成体系,所以达不到预期的效果。基于上述原因和本人多年讲授高级微观经济学的教学之经验,我编写了这本《高级微观经济学中的数学方法》。该书结合多元函数微分学和多元函数的优化理论,将高级微观经济学中用到的数学内容进行归纳整理,使之构成比较完整的理论体系,并根据经管类专业硕士研究生的高等数学基础,将其由浅入深地展现出来,并在第九章介绍了向量函数微分学以便读者能够更好地理解高级微观经济学的内容。本书还通过大量的经济问题实例介绍了如何用现代数学研究高级微观经济学的理论;并对高级微观经济学中的一些结论或定理给出了严谨和比较独特的证明。因此,本书是对高级微观经济学中数学方法体系的比较完整的总结。

本书基于笔者完成的首都经济贸易大学的两个重点教改项目:《经济学专业高等数学问题导入型教学研究》(2015 年)和《经济类专业高等数学教学内容优化研究与实践》(2017 年)的一些理念和结果。从构思到完成历时两年多,期间遇到很

多困难。比如,在高级微观经济学中用到的数学方法和经济实例的选择上,以及这些内容逻辑关系与体系的安排上都遇到了很大的困难。曾一度想过放弃,但又心有不甘,总觉得编写这样一本书是一件很有意义的事。最终在朋友和家人的支持和鼓励下还是完成了这本书的编写。

本书付印之际,我要感谢首都经济贸易大学教务处给予的支持与信任;感谢首都经济贸易大学经济学院数量经济学科给予的资助;感谢数量经济专业博士生导师王文举和田新民两位教授的帮助,他们对本书的写作提出了中肯的意见和建议。同时感谢经济学系的徐则荣教授、李雪教授、任光宇老师和赵娟老师给予的支持和鼓励。本书能够出版,还要感谢首都经济贸易大学出版社工作人员的辛勤工作,特别感谢社长杨玲和编辑薛捷,本书从选题策划、长时间写作过程到编审定稿,一直得到他们全力的和无私的关心、鼓励与支持,他们的工作热情和严谨的工作态度令我十分敬佩。最后,感谢女儿周天逸为本书精心设计的封面。

本书系统地介绍了无约束条件、等约束条件、不等约束条件和混合约束条件下 n 元函数优化问题有解的必要条件和充分条件以及高级微观经济学中的数学方法;通过大量经济问题实例介绍了数学方法的使用。本书的阅读对象是经管类专业高年级本科生,研究生,也可以作为讲授中高级微观经济学的教师的参考用书。数学专业的本科生如果想了解数学在经济学中有哪些应用,本书也是一本很好的参考书。如果本书能对学习中高级微观经济学的读者提供一些帮助,笔者会倍感欣慰。

由于作者水平有限,书中出现错误或不妥之处在所难免,恳请读者批评指正,本人邮箱是:zhouhua3000@sina.com。

目　录

1　函数的概念及经济问题举例

在高级微观经济学中遇到的函数，如生产函数、效用函数等，通常是定义在 n 维线性空间 R^n 的子集 R^n_+ 上的多元函数。本章介绍 R^n 中点集的概念，n 元函数的概念以及经济问题实例。

1.1　n 维线性空间 R^n 的点集

由于 n 元函数的定义域是 R^n 的子集，所以我们需要对 R^n 的子集有更多的了解。

1.1.1　点集的概念

定义 1.1.1　设 R^n 是 n 维(实)线性空间，R^n 中的点(或向量)记为 $P=(x_1,\cdots,x_n)$，或 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$。R^n 中满足某一条件的所有点构成的集合称作 n 维空间 R^n 的点集。

当 $n=1$ 时，R^1 中的点集也称作数集，比如：区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in R\}$ 既可以称作数集，又可以称作点集。

当 $n=2$ 时，R^2 中的点集也称为平面点集，比如：$E=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2=1,(x_1,x_2)\in R^2\}$ 是平面直角坐标系 Ox_1x_2 中的单位圆。

当 $n=3$ 时，R^3 中的点集 $E=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,(x_1,x_2,x_3)\in R^3\}$ 是以原点 O 为圆心，半径为 1 的单位球面。

当 $n>3$ 时，R^n 中的点集 $E=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1^2+\cdots+x_n^2=1,(x_1,\cdots,x_3)\in R^3\}$ 称作以原点 O 为圆心，半径为 1 的超球面。

记 $\vec{x}^0=(x_1^0,\cdots,x_2^0)\in R^n$，$\delta>0$，称 R^n 中的点集 $\{(x_1,\cdots,x_n)\mid \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2<\delta^2\}$ 为 $\vec{x}^0$ 的 δ 圆形邻域；称 R^n 中的点集 $\{(x_1,\cdots,x_n)\mid |x_i-x_i^0|<\delta,1\leqslant i\leqslant n\}$ 为 $\vec{x}^0$ 的 δ 方形邻域。不论是圆形邻域还是方形邻域都记为 $U(\vec{x}^0,\delta)$，称 $U(\vec{x}^0,\delta)$ 为 $\vec{x}^0$ 的 δ 邻域。用 $U^o(\vec{x}^0,\delta)$ 表示从 $U(\vec{x}^0,\delta)$ 中去掉 $\vec{x}^0$ 点之后的点集，称 $U^o(\vec{x}^0,\delta)$ 为 $\vec{x}^0$ 的 δ 空心邻域。当 $n=1$ 时，x^0 的 δ 邻域 $U(x^0,\delta)=(x^0-\delta,x^0+\delta)$。

1.1.2 内点、外点、界点和聚点

定义 1.1.2 设 $E \subset R^n$ 是一个点集, $P^0 \in R^n$。

如果存在 $\delta > 0$, 使得 $U(P^0,\delta) \subset E$, 则称 P^0 是 E 的内点。

如果存在 $\delta > 0$, 使得 $U(P^0,\delta) \cap E$ 是空集,则称 P^0 是 E 的外点。

如果对任意给定的 $\delta > 0$, 在 $U(P^0,\delta)$ 中既有属于 E 的点又有不属于 E 的点,则称 P^0 是 E 的界点; E 的所有界点构成的集合称为 E 的边界,记为 ∂E。

如果存在 $\delta > 0$, 使得 $U(P^0,\delta) \cap E = \{P^0\}$, 则称 P^0 是 E 的孤立点。

如果对任意给定的 $\delta > 0$, $U(P^0,\delta)$ 中都有属于 E 的无穷多个点,则称 P^0 是 E 的聚点。

由定义 1.1.2 我们看到,对任意给定的点集 $E \subset R^n$, 都可以将 R^n 中的点分为三类: E 的内点、E 的外点和 E 的界点。

点集 E 的孤立点和聚点的概念在某种意义上描述了点集 E 的结构: E 中的点要么孤立的存在,要么集聚在聚点的附近。

1.1.3 开集、闭集、开域、闭域和区域

定义 1.1.3 设 $E \subset R^n$ 是一个点集。

如果 E 的每个点都是 E 的内点,则称 E 是 R^n 的一个开集。

如果 E 的每个聚点都属于 E, 则称 E 是 R^n 的一个闭集。

规定:空集 ϕ 与 R^n 既是开集又是闭集。

如果 E 是 R^n 的一个开集,且 E 具有连通性,即,对 E 的任意两个点 P^1 和 P^2, 都存在属于 E 的有限条线段将 P^1 和 P^2 连接起来,则称 E 是 R^n 的一个开区域;开区域与其界点构成的点集称为闭区域。

开区域、闭区域以及开区域与其部分界点构成的集合都称作区域。

1.1.4 凸集、凸锥

定义 1.1.4 设点集 $E \subset R^n$, 如果对任意的 $P^1, P^2 \in E$, 及 $t \in (0,1)$ 有

$$tP^1 + (1-t)P^2 \in E,$$

则称点集 E 是 R^n 的一个凸集。

由定义可以看出,点集 E 是 R^n 的一个凸集的充分必要条件是: E 中任意两点的连线属于 E。比如,区间 $[a,b]$ 是 R^1 的一个凸集;在 R^2 中,单位圆 $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1, x_2 \in R^1\}$ 不是凸集,单位圆盘 $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1, x_1, x_2 \in R^1\}$ 是凸集;在 $R^n(n > 3)$ 中,超球体

$$\{(x_1,\cdots,x_n) \mid \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2 < r^2\}$$

是凸集。

定理 1.1.1 点集 $E \subset R^n$ 是凸集的充分必要条件是：对任意给定的 $\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^m \in E$ 以及 $t_1,\cdots,t_m \in (0,1)$，且 $t_1+\cdots+t_m=1$，有

$$t_1\vec{x}^1+\cdots+t_m\vec{x}^m \in E。$$

证明：

按凸集的定义，充分性显然。下面证明必要性。

假设 $E \subset R^n$ 是凸集，对 m 用归纳法。

当 $m=2$ 时，由凸集的定义，结论成立；

假设结论对 $m \geqslant 2$ 时成立，即对任意给定的 $\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^m \in E$ 以及 $t_1,\cdots,t_m \in (0,1)$，且 $t_1+\cdots+t_m=1$，有

$$t_1\vec{x}^1+\cdots+t_m\vec{x}^m \in E。$$

考察 $m+1$ 的情形。设 $\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^m,\vec{x}^{m+1} \in E$，$t_1,\cdots,t_m,t_{m+1} \in (0,1)$，且 $t_1+\cdots+t_m+t_{m+1}=1$。由于 $t_{m+1} \in (0,1)$，所以 $1-t_{m+1}>0$。记 $\lambda_i=\dfrac{t_i}{1-t_{m+1}}>0$，$i=1,\cdots,m$，由于 $t_1+\cdots+t_m+t_{m+1}=1$，所以

$$\lambda_1+\cdots+\lambda_m=\frac{t_1}{1-t_{m+1}}+\cdots+\frac{t_m}{1-t_{m+1}}=1。$$

由归纳法假设

$$\vec{x}^0=\lambda_1\vec{x}^1+\cdots+\lambda_m\vec{x}^m=\frac{t_1\vec{x}^1+\cdots+t_m\vec{x}^m}{1-t_{m+1}} \in E;$$

由凸集的定义

$$t_1\vec{x}^1+\cdots+t_m\vec{x}^m+t_{m+1}\vec{x}^{m+1}=t_{m+1}\vec{x}^{m+1}+(1-t_{m+1})\vec{x}^0 \in E,$$

所以必要性成立。

定理 1.1.2 设 $E, F \subset R^n$ 是两个凸集。记

E 与 F 的交集为：$E \cap F$；E 与 F 的笛卡尔积为：$E \times F=\{\vec{z}=(\vec{x},\vec{y}) \mid \vec{x} \in E,\vec{y} \in F\}$；$E+F=\{\vec{z}=\vec{x}+\vec{y} \mid \vec{x} \in E,\vec{y} \in F\}$。

则 $E \cap F$，$E+F$ 与 $E \times F$ 都是凸集。

证明：

(1) 设 $P^1,P^2 \in E \cap F$，$t \in (0,1)$，则 $P^1,P^2 \in E$ 且 $P^1,P^2 \in F$。因为 E 和 F 都是凸集，所以 $tP^1+(1-t)P^2 \in E$ 且 $tP^1+(1-t)P^2 \in F$，故

$$tP^1+(1-t)P^2 \in E \cap F,$$

因此 $E \cap F$ 是凸集。

(2) 设 $\vec{z}^1, \vec{z}^2 \in E+F$, $t \in (0,1)$。由 $E+F$ 的定义,存在 $\vec{x}^1, \vec{x}^2 \in E$ 和 $\vec{y}^1$, $\vec{y}^2 \in F$, 使得 $\vec{z}^1 = \vec{x}^1 + \vec{y}^1$; $\vec{z}^2 = \vec{x}^2 + \vec{y}^2$。因为 E 和 F 都是凸集,所以

$$t\vec{x}^1 + (1-t)\vec{x}^2 \in E; t\vec{y}^1 + (1-t)\vec{y}^2 \in F。$$

于是

$$\begin{aligned} t\vec{z}^1 + (1-t)\vec{z}^2 &= t(\vec{x}^1 + \vec{y}^1) + (1-t)(\vec{x}^2 + \vec{y}^2) \\ &= [t\vec{x}^1 + (1-t)\vec{x}^2] + [t\vec{y}^1 + (1-t)\vec{y}^2] \in E+F, \end{aligned}$$

即, $E+F$ 是凸集。

(3) 设 $\vec{z}^1, \vec{z}^2 \in E \times F$, $t \in (0,1)$, 由 $E \times F$ 的定义,存在 $\vec{x}^1, \vec{x}^2 \in E$ 和 $\vec{y}^1, \vec{y}^2 \in F$, 使得 $\vec{z}^1 = (\vec{x}^1, \vec{y}^1)$, $\vec{z}^2 = (\vec{x}^2, \vec{y}^2)$。因为 E 和 F 都是凸集,所以

$$t\vec{x}^1 + (1-t)\vec{x}^2 \in E; t\vec{y}^1 + (1-t)\vec{y}^2 \in F,$$

于是

$$t\vec{z}^1 + (1-t)\vec{z}^2 = (t\vec{x}^1 + (1-t)\vec{x}^2, t\vec{y}^1 + (1-t)\vec{y}^2) \in E \times F,$$

所以 $E \times F$ 是凸集。

注:如果 E, F 都是凸集,那么 E 与 F 的并集 $E \cup F$ 不一定是凸集。

定义 1.1.5 设 $E \subset R^n$, 如果对任意的 $\vec{x} \in E$ 和任意的 $a(a \geqslant 0) \in R^1$, 都有 $a\vec{x} \in E$, 则称 E 是以原点 O 为顶点的 R^n 的锥;如果以原点 O 为顶点的 R^n 的锥 E 是凸集,则称 E 为(以原点为顶点的) R^n 的凸锥。

比如: R^n 中从原点出发的两条不同射线上的点构成的点集是锥,但不是凸锥; R^n 中以原点出发的两条不同射线之间(夹角为锐角)的平面区域是凸锥。

注:(1) R^n 是凸锥;

(2) 如果 $E^1, \cdots, E^m \subset R^n$ 都是 R^n 的凸锥,那么 $E^1, \cdots, E^m$ 的交集 $E^1 \cap \cdots \cap E^m$ 是 R^n 的凸锥; $E^1, \cdots, E^m$ 的笛卡尔乘积 $E^1 \times \cdots \times E^m$ 是 R^n 的凸锥。

1.1.5 超平面、半空间、凸多胞体和单纯形

定义 1.1.6(超平面) 设 $a_1, \cdots, a_n, b \in R$ 是任意给定的实数,则称 R^n 中满足如下方程

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

的所有 $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 构成的点集为 R^n 中的一个超平面。R^n 中的超平面通常也用上述方程表示。比如: R^2 中的超平面 $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ 是平面直角坐标系 Ox_1x_2 中的一条直线; R^3 中的超平面 $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ 是空间直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 中的一个真实的平面。

注:(1) R^n 中的超平面是 R^n 中的凸集; R^n 中经过原点的超平面是 R^n 中的

凸锥。

(2) R^n 中的超平面 $\pi: a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ 将 R^n 分成三部分：

超平面 π，点集 $\{(x_1,\cdots,x_n) \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n < b\}$ 与点集 $\{(x_1,\cdots,x_n) \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n > b\}$。

定义 1.1.7　(1)(半空间)称 R^n 中的点集：$\{(x_1,\cdots,x_n) \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \geqslant (\leqslant) b\}$ 为 R^n 的半空间。

(2)(凸多胞体) R^n 中有限个半空间的交集称为 R^n 的凸多胞体。

(3)(单纯形)设 $\vec{a}^0, \vec{a}^1, \cdots, \vec{a}^n \in R^n$，且向量组 $\vec{a}^i - \vec{a}^0, 1 \leqslant i \leqslant n$ 线性无关，则称点集

$S^n: \{t_0\vec{a}^0 + t_1\vec{a}^1 + \cdots + t_n\vec{a}^n \mid t_0 + t_1 + \cdots + t_n = 1, t_i \in [0,1] (0 \leqslant i \leqslant n)\}$

即，$\{\vec{a}^0, \vec{a}^1, \cdots, \vec{a}^n\}$ 的凸包(多胞体)为一个 n-单纯形，其表示 R^n 中以 $\vec{a}^0, \vec{a}^1, \cdots, \vec{a}^n$ 为顶点的 $n+1$ 面体。

例 1.1.1　设 $\vec{a}^0 = \vec{0}$；$\vec{a}^i = \vec{e}^i$ 表示第 i 个分量等于 1，其他分量等于 0，即作为向量，$\vec{a}^i = \vec{e}^i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 是单位向量。由于 $t_0\vec{a}^0 + t_1\vec{a}^1 + \cdots + t_n\vec{a}^n = (t_1, \cdots, t_n)$，其中 $t_1 + \cdots + t_n = 1 - t_0 \leqslant 1$。

所以此时单纯形可以表示为：

$$S^n: t_1 + \cdots + t_n \leqslant 1, t_i \geqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant n,$$

称 S^n 为 n-标准单纯形，记为 S_0^n。

当 $n=2$ 时，S_0^2 表示 Ox_1x_2 平面上由直线：$x_1 = 0$，$x_2 = 0$ 和 $x_1 + x_2 = 1$ 围成的三角形区域，如图 1.1.1(a)所示。

当 $n = 3$ 时，S_0^3 表示 $Ox_1x_2x_3$ 空间中由平面：$x_1 = 0$，$x_2 = 0$，$x_3 = 0$ 和 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ 围成的四面体，如图 1.1.1(b)所示。

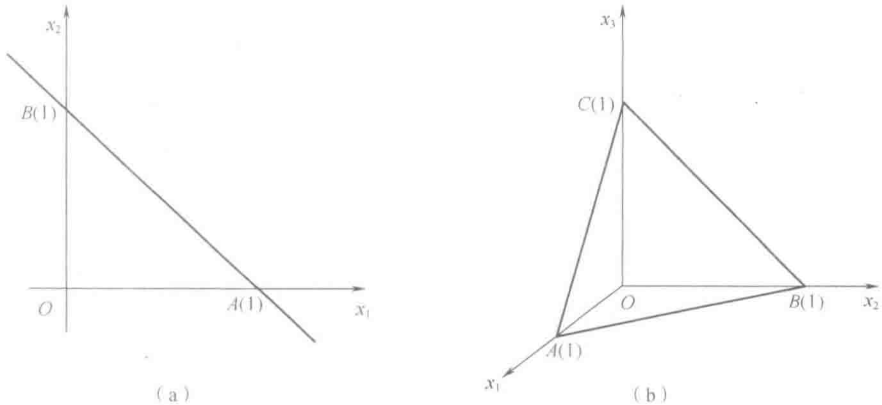

图 1.1.1