Apollonius
Conics
Books Ⅰ to Ⅳ

圆锥曲线论

（卷Ⅰ–Ⅳ）

第2版

［古希腊］阿波罗尼奥斯 著

朱恩宽 张毓新
张新民 冯汉桥 译

陕西新华出版传媒集团
陕西科学技术出版社
Shaanxi Science and Technology Press

Apollonius

Conics

Books Ⅰ to Ⅳ

圆锥曲线论

(卷Ⅰ-Ⅳ)

第2版

[古希腊]阿波罗尼奥斯　著

朱恩宽　张毓新
张新民　冯汉桥　译

陕西新华出版传媒集团
陕西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

圆锥曲线论. 1—4 卷 / (古希腊) 阿波罗尼奥斯著;
朱恩宽等译. —2 版. —西安:陕西科学技术出版社,
2018. 6

ISBN 978 - 7 - 5369 - 7266 - 7

Ⅰ. ①圆… Ⅱ. ①阿… ②朱… Ⅲ. ①圆锥曲线
Ⅳ. ①O123. 3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 095736 号

Apollonius of Perga Conics, Translation by R. Catesby Taliaferro, diagrams by William H. Donahue, introduction by Harvey Flaumenhaft(Books Ⅰ - Ⅲ) and by Michael N. Fried(Book Ⅳ)

圆 锥 曲 线 论(卷Ⅰ - Ⅳ)第 2 版
[古希腊]阿波罗尼奥斯 著
朱恩宽 张毓新 张新民 冯汉桥 译

责任编辑	李 珑
封面设计	李 阳
出 版 者	陕西新华出版传媒集团 陕西科学技术出版社 西安北大街 131 号 邮编 710003 电话 (029)87211894 传真 (029) 87218236 http: //www. snstp. com
发 行 者	陕西新华出版传媒集团 陕西科学技术出版社 电话(029)87212206 87260001
印 刷	陕西博文印务有限责任公司
规 格	787mm × 1092mm 1/16 开本
印 张	17. 875
字 数	336 千字
版 次	2007 年 12 月第 1 版 2018 年 6 月第 2 版 2018 年 6 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978 - 7 - 5369 - 7266 - 7
定 价	85. 00 元

'Απολλώνιος

阿波罗尼奥斯

（约262B.C.–约190B.C.）

画像选自《文明之光—图说数学史》李文林主编

山东教育出版社 2005

Apollonius

Conics

Books V to VII

The Arabic Translation of the
Lost Greek Original
in the Version of the Banū Mūsā

Volume I: Introduction, Text, and Translation

Edited
with Translation and Commentary by
G.J. Toomer

In Two Volumes
With 288 Figures

Springer-Verlag
New York Berlin Heidelberg
London Paris Tokyo Hong Kong

《Apollonius Conics Books Ⅴ to Ⅶ》（施普林格出版社 1990）第一册扉页

Apollonius

Conics

Books V to VII

The Arabic Translation of the
Lost Greek Original
in the Version of the Banū Mūsā

Volume II: Commentary, Figures, and Indexes

Edited
with Translation and Commentary by
G.J. Toomer

In Two Volumes
With 288 Figures

Springer-Verlag
New York Berlin Heidelberg
London Paris Tokyo Hong Kong

《Apollonius Conics Books Ⅴ to Ⅶ》（施普林格出版社 1990）第二册扉页

بسم الله الرحمن الرحيم
المقالة الخامسة من كتاب ابلونيوس
فى المخروطات
نقل ثابت بن قرّة واصلاح بنى موسى

من ابلونيوس الى أطالوس سلام عليك إنّى قد وضعتُ فى هذه المقالة الخامسة اشكالاً فى الخطوط الكبار والصغار وينبغى ان تعلم انَ مَن تقدّمنا ومَن فى عصرنا هذا إنّما شاموا النظر فى الصغار منها مشامةً يسيرةً وبذلك بيّنوا اىّ الخطوط المستقيمة تماسّ القطوع وعكس ذلك ايضاً اعنى اىّ شىء يعرض للخطوط التى تماسّ القطوع فاذا عرض كانت الخطوط مماسّة ∴ فاما نحن فقد بيّنّا هذه الاشياء فى المقالة الاولى من غير ان نستعمل فى تبيين ذلك امر الخطوط الصغار ورمنا ان نجعل مرتبتها قريباً من موضع ذكرنا لحدوث القطوع الثلثة لنبيّن بذلك انّه قد يكون منها فى كلّ واحد من القطوع ما لا نهاية لعدده لما يعرض ويلزم فيها كما عرض فى الاقطار الأُول واما الاشكال التى تكلّمنا فيها فى الخطوط الصغار فإنّا افردناها وعزلناها على حدة من بعد فحص كثير وضمّنّا القول فيها الى القول فى الخطوط الكبار التى ذكرنا آنفاً

1 الرحيم: وما توفيقى إلاّ بالله add. O   4 نقل...موسى om. H، اصلاح بنى موسى واخراج هلال T   5 من...وضعت: قال ابلونيوس انّى وضعت يا يوقراطيس T؛ سلام: سلم H   5-6 إنّى...اشكالاً: قد وجّهت اليك بالمقالة ة من كتاب المخروطات مع رسالتى هذه وفى هذه المقالة اشكال H, O mg.   6 الخامسة om. T؛ مَن: مَن قد T   7 فى الصغار: بالصغار T   9 للخطوط: للخطوط المستقيمة H   10 الاولى: آ HT   12 لحدوث: الحدوث T   13 لما: اما T   14 فيها: فيه T   16 وضمّنّا: وضممنا H

《Apollonius Conics Books V to Ⅶ》（施普林格出版社 1990）中阿拉伯文卷Ⅴ第1页

陕西科学技术出版社前言

阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论(卷Ⅰ-Ⅳ)》汉译本是由[美]绿狮出版社(Green Lion Press)2000年出版的《Apollonius of Perga Conics Books Ⅰ-Ⅲ》英译本(R. Caresby Taliafro 译)(修订本)和2002年出版的该书卷Ⅳ的英译本(Michael N. Fried 译)为底本合译而成.

美国南阿拉巴马大学(University of South Alabama)张新民教授提供了这两个译本,并与绿狮出版社联系了这两本书的中译本的出版事宜,绿狮出版社欣然授权我出版社出版这两本书的汉译本.

在此我们向张新民教授和[美]绿狮出版社以及这两本书的英译者、修订者、制图者和参与该书出版的工作人员表示感谢! 同时也向汉译本的译者、校对者和参与该书出版的工作人员表示感谢!

阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》共有八卷,其中第八卷早已失传.[美]施普林格出版社(Springer-Verlag)1990年出版了《Apollonius Conics Books Ⅴ to Ⅶ》的阿拉伯文和英文的对照本(G. J. Toomer 译),该书的汉文翻译工作正在进行.

陕西科学技术出版社
2007年12月

如果有人以为这些论述的难以理解是出于我的思维缺乏条理,……我力荐这样的人去读一读阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》.他将会发现,没有哪个有才智的人,不论是多么有天分的,可以将有些问题表述成仅凭粗心的阅读就可以明白的方式,那里需要深思熟虑以及周密思考所说的内容.

开普勒(Johannes Kepler 1571—1630)

摘自"in New Astronmy Chapter 59"

阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论(卷Ⅰ－Ⅳ)》汉译本再版说明

随着2014年6月阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论(卷Ⅴ－Ⅶ)》汉译本的出版发行,古希腊三部经典数学著作《欧几里得几何原本》、《阿基米德全集》、阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》汉译本已全部翻译完成。

三部著作分为四册出版,主要原因在于《圆锥曲线论》Ⅰ－Ⅳ卷和Ⅴ－Ⅶ卷来自三个不同的版本,且Ⅴ－Ⅶ卷内容较多,部分插图较大,为了便于阅读、便于排版,最后选择了16开本简装。此次《圆锥曲线论(卷Ⅰ－Ⅳ)》再版,考虑到应与Ⅴ－Ⅶ卷配套,就将原来的大32开精装,改为16开本简装。

此次再版,译者对该书进行了修订,并将原来的插图适当进行了放大。根据译者建议删除了不属于原书中内容的"汉译者附录"(对门奈赫莫斯关于具有性质 $xy=2a^2$ 的圆锥截线的认识的探讨)。原在卷Ⅲ后的"英译者附录A、附录B"调整至卷Ⅳ末。取消了第一版中各卷序言、插图说明与正文、附录页码分段编排的不便,全书页码统一编排,使阅读感到更为完整。

陕西科学技术出版社

2018年3月

目 录

汉译者序

一、阿波罗尼奥斯及其著作

阿波罗尼奥斯(Apollonius 约公元前262—前190)出生于小亚细亚南部的一个小城市拍加(Perga).他年轻时去亚历山大城向欧几里得的后继者学习数学,嗣后他卜居该地和当地的大数学家合作研究.他的巨著《圆锥曲线论》(Conics)是在前人门奈赫莫斯(Menaechmus,公元前4世纪)、阿里斯泰奥斯(Aristaeus,约公元前340)、欧几里得(Euclid,约公元前330—前275)和阿基米德(Archimedes,公元前287—前212)等前人研究的基础上,加上他自己所独创的成果,以全新的理论,按欧几里得《几何原本》的方式写出,他把综合几何发展到最高水平.这一著作将圆锥曲线的性质网罗殆尽,几乎使将近20个世纪的后人在这方面也未增添多少新内容.直到17世纪笛卡儿(Descartes,1596—1650)、费马(Fermat,1601—1665)创立坐标几何,用代数方法重现了圆锥曲线(二次曲线)的理论;德扎格(Desargues,1591—1661)、帕斯卡(Pascal,1623—1662)创立射影几何,研究了圆锥曲线的仿射性质和射影性质,才使圆锥曲线理论有所突破,发展到一个新的阶段.然而这两大领域的基本思想都可从阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》中找到它们的萌芽.

阿波罗尼奥斯在天文方面研究也很有名,他的其他著作还有:

1.《截取线段成定比》(On the Cutting-off of a Ratio);

2.《截取面积等于已知面积》(On the Cutting-off of an Area);

3.《论接触》(On Contacts 或 Tangencies);

4.《平面轨迹》(Plane Loci);

5.《倾斜》(Vergings 或 Inclinations);

6.《内接于同一球的十二面体与二十面体对比》(A work comparing the dodecahedron and icosahedron inscribed in the sphere).

此外还有《无序无理量》(Unordered Irrationals)、《取火镜》(On the burning-mirror)、圆周率计算以及天文学方面的著述等.

《圆锥曲线论》共有八卷,前四卷是基础部分,后四卷是拓广的内容.前四卷(卷Ⅰ-Ⅳ)是从12、13世纪希腊手稿复制出来的,后三卷(卷Ⅴ-Ⅶ)有1290年的阿拉伯译本,卷Ⅷ已失传,该书有拉丁文、阿拉伯文、英文、法文和德文等多种文本.我们的汉译本是采用近期美国的三部英文译本作为底本进行翻译的,它们分别是:

C.托利弗(Catesby Taliaferro)的《Apollonius of Perga Conics Books Ⅰ-Ⅲ》 2000年

Green Lion Press(绿狮出版社)出版;

M. N. 夫莱德(Michael N. Fried)的《Apollonius of Perga Conics Book Ⅳ》 2002 年 Green Lion Press(绿狮出版社)出版;

G. J. 图默(G. J. Toomer)的《Apollonius of Perga Conics Books Ⅴ - Ⅶ》 1990 年 Springer - Verlag(施普林格出版社)出版.

[美]绿狮出版社 2000 年出版的《Apollonius of Perga Conics Books Ⅰ - Ⅲ》是 1952 年不列颠百科全书出版社出版的托利弗所译《Apollonius of Perga Conics Books Ⅰ - Ⅲ》的修订版,这本书采用了一定的数学符号和缩写式,并在第Ⅰ卷前一页有"对本书所用的缩写式和符号的说明",在修订本中将此内容略去了,我们为了使读者阅读方便,还是把它添加在卷Ⅰ的前一页. 另外,我们没有采用原英文译本中图形翻页再出现的方式,而是采用图形在命题中只出现一次.

[美]绿狮出版社 2002 年出版的由 M. N. 夫莱德所译的第Ⅳ卷,命题的证明是用文字叙述的,我们为了与前三卷统一,方便读者阅读,将该卷也依前三卷的方式(使用了数学符号和缩写式)进行了改写.

[美]施普林格 1990 年出版的卷Ⅴ - Ⅶ是阿拉伯文与英文对照的译本,它也引进了数学符号和缩写式,汉译本将只依据英译的内容.

汉译本阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》分两册出版,前四卷合为一册,后三卷合为一册.

二、阿波罗尼奥斯写作的时代背景

在阿波罗尼奥斯之前,圆锥曲线的研究已有一百多年的历史,它是为解决三大几何作图问题之一——"倍立方"而引起的. 希波克拉底(Hippocrates of Chios,公元前 460 年前后)指出倍立方问题可以归结为求线段 a 与 $2a$ 之间的两个等比中项. 这是因为,若设其中比例中项为 x,y,则有

$$a:x = x:y = y:2a,$$

可得

$$x^2 = ay,\ y^2 = 2ax,$$

于是有

$$xy = 2a^2, \text{以及 } x^4 = a^2y^2 = 2a^3x \text{ 或 } x^3 = 2a^3.$$

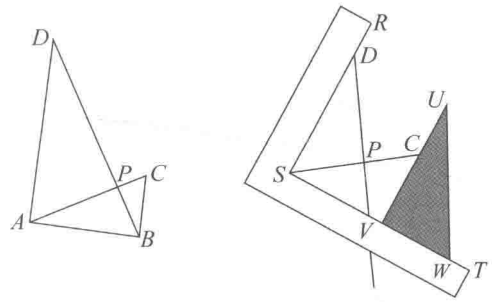
如果 a 是已知立方体的边长,那么 x 便是所求立方体的边长.

为此,有人利用两个直角三角形或木工用的直角拐尺去实现它.

对于两个直角三角形 ABC 和 ABD,$\angle ABC$ 和 $\angle DAB$ 都是直角,且 AC 与 BD 垂直相交于 P,若 $\triangle CPB$、$\triangle BPA$ 和 $\triangle APD$ 彼此相似,得知

$$PC:PB = PB:PA = PA:PD.$$

因此,PB 和 PA 是 PC 和 PD 的两个比例中项. 从而,如果能从一个图形,使 $PD = 2PC$,问题就解决了. 可以考虑作两条交于 P 的垂线,使 $PC = a$,$PD = 2a$,然后在图形上放上木工用的直角拐尺,其内边为 RST,使得 SR 过点 D,并且直角顶 S 处于 CP 的延长线



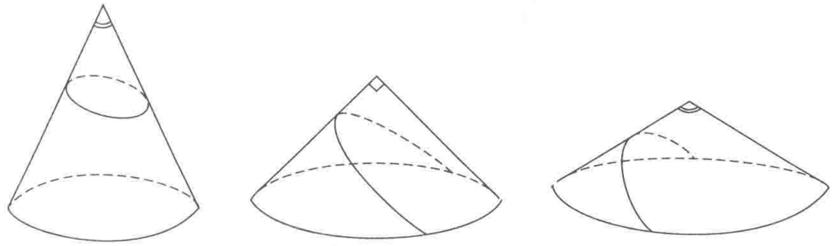
上. 让直角三角形 UVW 的直角边 VW 在 ST 上滑动,而直角边 VU 过 C 点. 最后调整两工具的位置,使 V 落在 DP 的延长线上①,PV 就为之所求.

这种"机械的作图"没有遵从欧几里得尺规的限制,我们知道它最终证明不可能只用圆规、直尺求解②.

根据欧托基奥斯(约公元480)的记载,门奈赫莫斯(约公元前4世纪中叶)曾用两种方法:(i)找出曲线 $x^2=ay$ 和 $y^2=2ax$ 的交点;(ii)找出曲线 $y^2=2ax$ 和 $xy=2a^2$ 的交点. 找出其两个线段之间的两个等比中项,他发现了圆锥曲线,解决了"倍立方"问题.

门奈赫莫斯如何通过圆锥的截线而得到圆锥截线的性质,以及它们的作图,这是数学史家们关心的问题. 但是他的方法已失传,所以后人就只能根据一些史料来进行分析.

根据盖米诺斯(Geminus,约公元前70)的记载,古代数学家用旋转直角三角形(围绕着一条不动的直角边)来产生圆锥面的,不动的直角边叫做轴,斜边叫做母线. 通过轴的平面与圆锥面相交所成的三角形叫做轴三角形. 视轴三角形的顶角为锐角、直角或钝角,分别称圆锥为"锐角圆锥"、"直角圆锥"或"钝角圆锥". 门奈赫莫斯用垂直于一条母线的平面去截这三种锥面,得到三种不同的截线:"锐角圆锥截线"(即椭圆)、"直角圆锥截线"(即抛物线)和"钝角圆锥截线"(即双曲线的一支)③. 如图.



对于这三种圆锥截线的性质,可用几何证明而得到.

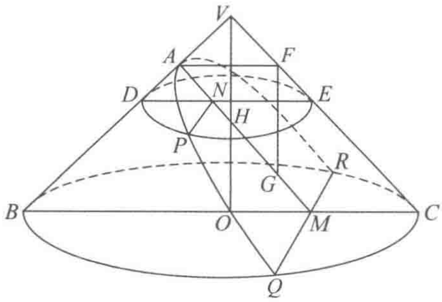
现证明直角圆锥截线的性质.

---

①数学史概论(修订本). [美]H. 伊夫斯著,欧阳降译. 山西经济出版社. 1993. p. 985.

②1837年旺策尔(P. L. Wantzel,1814—1848)首先证明了倍立方和三等分任意角不可能只用尺规作图.

③世界数学通史(上册). 梁宗巨著. 辽宁教育出版社,2001年出版,p. 283－284.



设直角圆锥的轴三角形 VBC 是等腰直角三角形，顶角 V 是直角，过母线 VB 上一点 A 用垂直于 VB 的平面圆锥面，其交线 QAR 为直角圆锥截线.

过交线 QAR 上任一点 P 作平面垂直于轴 VO，它与轴截面 VBC 交于 DE，与圆锥交于以 DE 为直径的圆 DPE，由于平面 DPE 和 AQR 均垂直于平面 BVC，故交线 $PN \perp DE$. 于是

$$NP^2 = DN \cdot NE.$$

作 $AF /\!/ DE$，$FG \perp DE$，如图.

因为 $$\triangle AFG \backsim \triangle NAD,$$

于是 $$FA \cdot ND = AG \cdot AN,$$

又 $$NE = AF,$$

于是 $$NP^2 = DN \cdot NE = DN \cdot AF = AG \cdot AN.$$

记 $AN = x$，$NP = y$，AG 是与点 A 位置有关的定线段记为 b. 于是上式可写为

$$y^2 = bx.$$

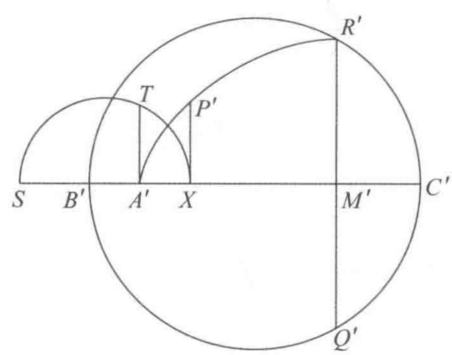
用解析几何的说法便是：曲线上任意一点的纵坐标的平方等于相应的横坐标乘上一个正数（正焦距），这正是抛物线的性质.

若设 $VA = a$，那么 $AG = \sqrt{2}AF = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}VA = 2a$. 这样就得到

$$y^2 = 2ax,$$

这也正是解决“倍立方”问题所需的曲线之一.

该直角圆锥截线的作图.



利用前面图形以及直角圆锥截线的性质可以作出它的图形，作图如下：

1. 作 $B'C' = BC$，以 $B'C'$ 为直径作图；

2. 在 $B'C'$ 上取一点 M'，使 $M'C' = MC = \sqrt{2}a$；

3. 过 M' 作 $Q'R' \perp B'C'$，且交圆于 Q'、R'，（显然 $Q'R' = QR$）；

4. 在 $B'C'$ 上取一点 A'，使 $A'M'=AM$；

5. 在 $A'B'$ 的直线上取一点 S，使 $SA'=2a$；

6. 在 $A'M'$ 上取一点 X，以 SX 为直径画圆与过 A' 作垂直于 SX 的垂线交于点 T（显然 $A'T^2=SA'\cdot A'X=2a\cdot A'X$）；

7. 作 $XP' \underline{\parallel} A'T$，则 P' 为截线上一点；

8. 在 $A'M'$ 上取不同的点，同样由“6”和“7”就得到截线上不同的点，这些点连接起来，就得到直角圆锥截线的图形（其另一半可对称作出）.

若设 $A'X=x$，$XP'=y$ 就得到直角圆锥截线具有性质 $y^2=2ax$ 的图形.

若取 $VA=\frac{1}{2}a$，类似地，可作出直角圆锥截线具有性质 $x^2=ay$ 的图形.

若设有横、竖交于点 O 的直线，从点 O 向横、竖直线分别作截线具有性质 $y^2=2ax$ 和 $x^2=ay$ 的图形. 设交点为 P，则线段 OP 在横、竖直线上的垂直射影 OX 和 OY 就是所求的 a 与 $2a$ 之间的两个比例中项，OX 就是所求立方体的边长，这样依(i)就解决了“倍立方”问题.

若作以线段 a 和 $\sqrt{2}a$ 为两直角边的三角形，设 $\sqrt{2}a$ 所对的角为 φ，取一个钝角为 2φ 的钝角圆锥，在其一母线上取一点到顶点的距离为 $\sqrt{2}a$，过该点垂直于该母线的平面与该钝角圆锥面的交线为一钝角圆锥截线 Γ，则钝角圆锥截线 Γ 具有性质：

$$xy=2a^2.$$

其中 x,y 为该钝角圆锥截线 Γ 上一点到钝角圆锥截线 Γ 的渐近线的距离. 这样，也可以由(ii)解决“倍立方”问题.

到公元前 4 世纪末，已有两本涉及圆锥曲线的论著，它们分别是阿里斯泰奥斯的五卷本《立体轨迹》（Solid Loci）和欧几里得的四卷本《圆锥曲线论》，这两本著作已失传，而阿基米德有关圆锥截线的研究却保留了下来①.

阿基米德在他的《劈锥曲面体与旋转椭圆体》中证明任一椭圆都可看作一个圆锥的截线，该圆锥不一定是直圆锥，其顶点的选择有很大的任意性. 阿基米德还知道，与斜圆锥的所有母线都相交的平面可在其上截出椭圆. 但是，阿波罗尼奥斯是第一个根据同一个（直的或斜的）圆锥被各种位置的截面所截来研究圆锥截线系统理论的人，也是第一个发现双曲线有两支的人. 他在前人的基础上把圆锥截线研究得既全面又深入，他的《圆锥曲线论》是古希腊继欧几里得《原本》、《阿基米德全集》之后又一部经典的著作，他被称为是那个时代的“伟大的几何学家”.

欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯合称为亚历山大前期的三大数学家.

阿波罗尼奥斯从一个一般圆锥面（斜的或直的）上用平面截得三种曲线，他称其为齐

① 见《阿基米德全集》. T. L. 希思编，朱恩宽，李文铭等译，叶彦润，常心怡等校. 陕西科学技术出版社，1998，10.

曲线、超曲线和亏曲线①;同时在对顶的两个圆锥面上截得两个曲线(即两个超曲线)称为二相对截线. 它们分别就是抛物线、双曲线的一支、椭圆和双曲线. 在汉文译本阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》正文中,圆锥截线的名称采用了阿波罗尼奥斯的命名,这是因为一方面它是历史的真实反映,另一方面也是该书理论体系的需要.

三、《圆锥曲线论》的内容概述

卷Ⅰ有两组共11个定义和60个命题. 它包含了三种截线和二相对截线的形成和它们的主要性质.

在定义1中给出了圆锥曲面的定义:如果从一点到一个与它不在同一平面内的圆的圆周连一直线,这直线向两个方向延长,又若这个点保持固定,而这直线沿着这个圆的圆周旋转,直到它回到开始的位置,于是形成一个由两个对顶的锥面组成的曲面. 当这两个锥面的每一支随着生成直线的无限延长都将无限地延展扩大,我们称这一曲面为圆锥曲面,这个固定点称为顶点,从顶点到这个圆的圆心连成的直线称为轴,该圆称为圆锥的底.

在首批8个定义后,有10个预备命题. 其中命题8证明了圆锥截线平行弦中点的连线在一直线上,该直线叫作圆锥截线的直径. 命题11~14给出了一个平面在圆锥曲面一支上截得的三种截线,即齐曲线(抛物线)、超曲线(双曲线的一支)、亏曲线(椭圆)以及一个平面同时在圆锥曲面对顶二支上截得的二相对截线(双曲线),并给出了它们的基本性质.

阿波罗尼奥斯把截线为圆的图形,看作是不同于前三种截线的另一种截线,显然平行于圆锥底的平面在圆锥面上截得一个圆(Ⅰ.4);另外,若一平面垂直于过圆锥轴且垂直于底面的平面,而且该平面在轴三角形上截出一个与其反相似的三角形,则该平面在圆锥面上也截得一个圆(Ⅰ.5),该平面叫做底平面的反位面. 仅次而已(Ⅰ.9).

现在我们从命题13(即Ⅰ.13)来了解阿波罗尼奥斯证明该命题的思路.

设有以 A 为顶点,以 S 为圆心的圆为底的斜圆锥,任作一个不过圆锥顶点、不平行于圆锥底面、也不是底面的反位面且与圆锥所有母线都相交的平面. 它与圆锥交出一个封闭的图形,设它与圆锥底交于直线 TF. 过圆心 S 作直线垂直于 TF,交圆于 B、C,交 TF 于 G. 设轴三角形 ABC 与截线交于 E、D. 且 ED 为该截线的直径(Ⅰ.6).

在圆锥截线上任取一点 L,作 $ML /\!/ GF$,交 ED 于 M,过 M 作 $PR /\!/ BC$,则 PR 与 ML 所确定的平面与底平面平行(Eucl. Ⅺ. 15),因此它与圆锥面的交线是一圆(图中未画出). P、L 和 R 是该圆上的点,且 PR 是直径,而 $ML \perp PR$.

于是
$$LM^2 = PM \cdot MR. \tag{1}$$

① 见[美]M·克莱因著《古今数学思想》中译本(第一册). 张理京,张锦炎译. 上海科学技术出版社,1979年10月,p. 104.