概率论

主编　蒋家尚　徐维艳　陈　静

苏州大学出版社
Soochow University Press

概　率　论

蒋家尚　徐维艳　陈　静　主编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论/蒋家尚,徐维艳,陈静主编. —苏州:苏州大学出版社,2018.12
ISBN 978-7-5672-2529-9

Ⅰ.①概… Ⅱ.①蒋… ②徐… ③陈… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材 Ⅳ.①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 266176 号

概 率 论
蒋家尚 徐维艳 陈 静 主编
责任编辑 李 娟

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市十梓街 1 号 邮编:215006)
宜兴市盛世文化印刷有限公司印装
(地址:宜兴市万石镇南漕河滨路 58 号 邮编:214217)

开本 787 mm×960 mm 1/16 印张 8.75 字数 148 千
2018 年 12 月第 1 版 2018 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5672-2529-9 定价:24.00 元

苏州大学出版社营销部 电话:0512-67481020
苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

前言

本书是编者根据其20余年教学实践编写的，着眼于介绍概率论的基本概念、基本理论和基本方法，突出概率论的基本思想和应用背景，强调直观性与准确性.本书的表述大多由具体问题导入，由易到难，由浅到深，脉络清晰，具有较强的可读性.

全书分为三部分，第一部分为随机事件及其概率（第1章、第2章），第二部分为随机变量（第3章、第4章），第三部分为随机变量的数字特征（第5章）.本书可作为高等学校理工、农医、经济、管理等各专业有关概率论课程的教材或实际工作者的参考书.书中标“*”部分为选学内容.

本书编写分工如下：第1章由蒋家尚执笔，第2章、第5章由陈静执笔，第3章、第4章由徐维艳执笔，最后由蒋家尚负责统稿.

本书的编写得到了编者所在学校基础学科建设工程（数学）的资助，得到了学校教务处和理学院领导的关心与支持，在此表示衷心感谢！同时还要感谢为本书出版做了大量工作的苏州大学出版社.

尽管编者在编写过程中做了最大的努力，但由于水平有限，时间仓促，书中疏漏与错误在所难免，敬请广大读者指正.

目录

第 1 章
随机事件及其概率

概率论是研究随机现象(偶然现象)的规律性的科学. 20 世纪以来,它已广泛应用于工业、国防等领域. 本章介绍的随机事件及其概率是概率论中最基本、最重要的概念之一.

§1.1 随机事件

一、随机现象

自然现象和社会现象各种各样. 有一类现象,称之为**确定现象**,其特点是在一定的条件下必然发生.

例如,(1) 一枚硬币向上抛出后必然下落;

(2) 一个物体从高 h(m)处垂直下落,则经过 t(s)后该物体必然落到地面,且当高度 h 一定时,可由公式

$$h=\frac{1}{2}gt^2\text{(取 }g=9.8\ \mathrm{m/s^2}\text{)}$$

具体计算出该物体落到地面所需的时间 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$(s).

另一类现象,称之为**不确定现象**,其特点是在一定的条件下可能出现这样的结果,也可能出现那样的结果,且在试验和观察之前,不能预知确切的结果.

例如,向上抛掷一枚硬币,其落地后可能正面朝上,也可能反面朝上;下周的股市可能会上涨,也可能会下跌;等等. 因此,这里的"不确定性"有两方面的含义:一方面是客观结果的不确定性,另一方面是主观猜测或判断的不确定性.

二、随机试验

由于随机现象的结果不能预知，初看似乎毫无规律，然而人们发现同一随机现象大量重复出现时，其每种可能的结果出现的频率具有稳定性，从而表明随机现象也有其固有的规律性. 人们把随机现象在大量重复出现时所表现出的量的规律性称为随机现象的**统计规律性**.

历史上，研究随机现象统计规律最著名的试验是抛掷硬币的试验. 如下表所示是历史上抛掷硬币试验的记录.

试验者	抛掷次数(n)	正面向上次数(r_n)	正面向上频率$\left(\frac{r_n}{n}\right)$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
卡尔·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
卡尔·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

试验表明：虽然每次抛掷硬币事先都无法准确预知将出现正面向上还是反面向上，但大量重复试验时，发现出现正面向上和反面向上的次数大致相等，即各占总试验次数的比例大致为 0.5，并且随着试验次数的增加，这一比例更加稳定地趋于 0.5. 它说明虽然随机现象在少数几次试验或观察中其结果没有什么规律性，但通过长期的观察或大量的重复试验可以看出，试验的结果是有规律可循的，这种规律是随机试验的结果自身所具有的特征.

若要对随机现象的统计规律性进行研究，则需要对随机现象进行重复观察，我们把对随机现象的观察称为**试验**.

例如，观察某射手对固定目标所进行的射击；抛一枚梗币三次，观察出现正面向上的次数；记录某市 120 急救电话一昼夜接到的呼叫次数等，均为试验. 上述试验具有以下共同特征：

(1) 可重复性：试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 可观察性：每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 不确定性：每次试验出现的结果事先不能准确预知，但可以肯定会出现上述所有可能结果中的一个.

在概率论中,我们将具有上述三个特征的试验称为**随机试验**,记为 E.

三、样本空间

研究某个随机试验,首先要搞清楚其所有可能的基本结果有哪些. 一个随机试验所有可能出现的基本结果所组成的集合,称为随机试验的一个**样本空间**,记为 U(或 Ω). 样本空间中的元素称为**样本点**,记为 u(或 ω).

例如,(1) 掷一枚均匀硬币,可取样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$,其中 ω_1 表示正面朝上,ω_2 表示反面朝上.

(2) 掷一颗均匀骰子,可取样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$,其中 ω_i 表示掷出的点数为 $i(i=1,2,\cdots,6)$.

像上面这样包含有限个样本点的样本空间称为**有限样本空间**.

(3) 考查某电话交换台在一天内收到的呼叫次数,其样本空间 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}$,$\omega_i$ 表示收到的呼叫次数 $i(i=0,1,2,\cdots)$.

(4) 测量某电器元件的使用寿命 T(h),则其样本空间 $\Omega=[0,+\infty)$.

像(3)和(4)中的样本空间称为**无限样本空间**.

(5) 设随机试验为从装有三个白球(记号为 1,2,3)与两个黑球(记号为4,5)的袋中任取两个球.

① 若观察取出的两个球的颜色,则样本点为 ω_{00}(两个白球),ω_{11}(两个黑球),ω_{01}(一白一黑),于是样本空间为

$$\Omega=\{\omega_{00},\omega_{11},\omega_{01}\};$$

② 若观察取出的两个球的号码,则样本点为 ω_{ij}(取出第 i 号与第 j 号球),$1\leqslant i<j\leqslant 5$,于是样本空间有 $C_5^2=10$ 个样本点,样本空间为

$$\Omega=\{\omega_{ij}\mid 1\leqslant i<j\leqslant 5\}.$$

注　上面(5)说明,对于同一随机试验,试验的样本点与样本空间是根据要观察的内容来确定的.

四、随机事件

在随机试验中,可能出现,也可能不出现的事件叫**随机事件**,简称为**事件**,通常用 A,B,C 等大写英文字母表示.

例如,在抛掷一颗骰子的试验中,用 A 表示“掷出的点数为偶数”这一事件,则 A 是一个随机事件.

在每次试验中必然出现的事件叫**必然事件**，用字母 U(或 Ω)表示.

例如，在上述抛掷一颗骰子的试验中，“掷出的点数小于 7”是一个必然事件.

在每次试验中，必然不出现的事件叫**不可能事件**，用空集符号$\varnothing$表示.

例如，在上述抛掷一颗骰子的试验中，“掷出的点数为 8”是一个不可能事件.

五、事件间的关系及运算

由定义知，样本空间 U(或 Ω)是随机试验的所有可能结果(样本点)的集合，每个样本点是该集合的一个元素. 一个事件是由具有该事件所要求的特征的那些结果所构成的，所以事件是对应于 U(或 Ω)中具有相应特征的样本点所构成的集合，它是 U(或 Ω)的一个子集. 于是，**任何一个事件都可以用 U(或 Ω)的某个子集表示**.

我们称仅含有一个样本点的事件为**基本事件**，含有两个或两个以上样本点的事件称为**复合事件**. 显然，样本空间 U(或 Ω)作为事件是必然事件，空集$\varnothing$作为事件是不可能事件.

如果没有特别声明，以下叙述中所有事件均是某个给定样本空间 U(或 Ω)中的事件.

1. 包含与相等

若事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，则称事件 A 是事件 B 的**子事件**，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 显然，$\varnothing\subset A\subset U$.

例如，掷一颗均匀骰子，令事件 A 为“掷出的点数为 4”，事件 B 为“掷出的点数为偶数”，则 $A\subset B$.

若 $A\subset B$ 与 $A\supset B$ 同时成立，则称 A 与 B **相等(或等价)**，记为 $A=B$. 两个相等的事件含有相同的样本点.

2. 并(或和)

称“事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”为事件 A 与事件 B 的**并(或和)事件**，记为 $A\cup B$.

例如，掷一颗均匀骰子，令事件 $A=$“掷出的点数小于等于 3”，事件 $B=$“掷出的点数为偶数”，则事件 $A\cup B=$“掷出的点数为 1,2,3,4,6”，即事件“不出现点数为 5”.

3. 交(或积)

称"事件 A 与事件 B 同时发生"为事件 A 与事件 B 的**交(或积)事件**,记作 $A\cap B$ 或 AB.

例如,掷两枚均匀的硬币,若事件 A 表示"恰有一个正面朝上",事件 B 表示"恰有两个正面朝上",事件 C 表示"至少有一个正面朝上",则有

$$A\cup B=C, AC=A, BC=B, AB=\varnothing.$$

对于任意事件 A,B,有

$$\varnothing\subset A\subset U, A\subset A\cup B, B\subset A\cup B, AB\subset A, AB\subset B.$$

4. 互斥(或互不相容)

若两事件 A,B 不可能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称 A 和 B 是**互斥**的(或**互不相容**的).

例如,掷一颗均匀骰子,事件 A 表示"掷出的点数为 3",事件 B 表示"掷出偶数点",则显然 $AB=\varnothing$,即 A 和 B 是互斥的.

5. 差

称"事件 A 发生而事件 B 不发生"为事件 A 与事件 B 的**差事件**,记为 $A-B$.

6. 对立事件

设 A 为任一事件,称 $U-A$ 为 A 的**对立事件**(或 A 的**余事件**),记作 $\overline{A}$,即 $\overline{A}=U-A$.

例如,掷一颗均匀骰子,若 $A=$"掷出点数为偶数",则 $\overline{A}=$"掷出点数为奇数".

显然,在一次试验中,A 与 $\overline{A}$ 必然有一个发生且仅有一个发生,即 $A\cup\overline{A}=U$, $A\cap\overline{A}=\varnothing$. 显然 $\overline{\overline{A}}=A$,即 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件.

利用对立事件的概念,我们可将差事件表示为

$$A-B=A-AB=A\overline{B}.$$

事件的关系与运算可用以下维恩(Venn)图表示(图 1-1):

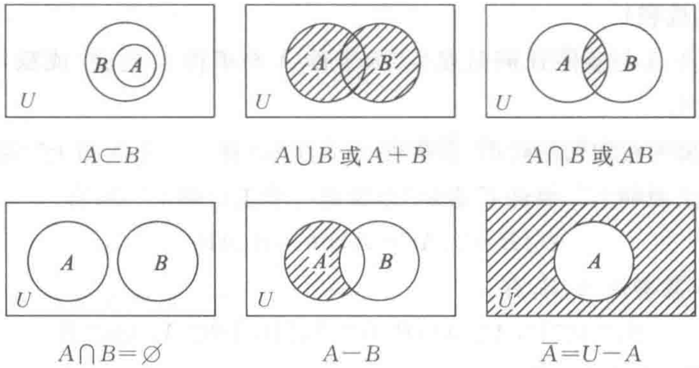

图 1-1

7. n 个事件的关系与运算

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个随机事件，则

(1) 称"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的**并事件**，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$；

(2) 称"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的**交事件**，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$；

(3) 若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件都不可能同时发生，即

$$A_iA_j=\varnothing,\ i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n,$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是**互斥**的.

8. 事件的运算律

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, AB=BA$.

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$.

(3) 分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC),(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

(4) 德·摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

注 上述各运算可推广到有限个事件的情形. 例如，对于 n 个事件，德·摩根律也成立，即 $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_n}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

例 1 甲、乙、丙三人各射一次靶，记 $A=$"甲中靶"，$B=$"乙中靶"，$C=$"丙中靶"，则

(1) 事件"甲未中靶"可表示成 $\overline{A}$；

(2) 事件“甲中靶而乙未中靶”可表示成 $A\overline{B}$；

(3) 事件“三人中恰有一人中靶”可表示成 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；

(4) 事件“三人中至少有一人中靶”可表示成 $A\cup B\cup C$ 或$\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$；

(5) 事件“三人中至少有一人未中靶”可表示成 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$；

(6) 事件“三人中恰有两个人中靶”可表示成 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

(7) 事件“三人中至少有两个人中靶”可表示成 $AB\cup AC\cup BC$；

(8) 事件“三人均未中靶”可表示成 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

注 用其他事件的运算来表示一个事件，方法往往不唯一，读者应学会用不同方法表达同一事件. 特别是在解决具体问题时，往往要根据需要选择一种恰当的表示方法.

例 2 某城市的供水系统由甲、乙两个水源与 1,2,3 三部分管道组成(如图 1-2)，每个水源都足以供应城市的用水.

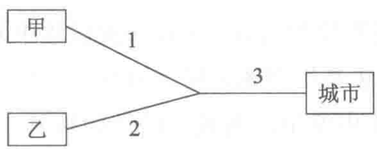

图 1-2

设事件 $A_i=\{$第 i 号管道正常工作$\}(i=1,2,3)$，于是，事件“城市能正常供水”可表示为$(A_1\cup A_2)\cap A_3$，“城市断水”这一事件可表示为

$$\overline{(A_1\cup A_2)\cap A_3}=\overline{A_1\cup A_2}\cup\overline{A_3}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cup\overline{A_3}.$$

§1.2 随机事件的概率

除必然事件和不可能事件外，任一事件在一次试验中可能发生，也可能不发生. 我们希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性的大小. 例如，商业保险机构为获得较大利润，就必须研究个别意外事件发生的可能性的大小，由此计算保险费和赔偿费. 为此，本节首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

一、频率与概率

定义 1 在相同的条件下进行了 n 次试验，若事件 A 在这 n 次重复试验中出现了 n_A 次，则称比值$\frac{n_A}{n}$为事件 A 发生的**频率**，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

由定义可知，频率具有如下性质：

(1) 非负性：$f_n(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：$f_n(U)=1$；

(3) 有限可加性：若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是一组两两互不相容的事件，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i).$$

显然，频率 $f_n(A)$的大小表明了在 n 次试验中事件A 发生的频繁程度. 频率越大，事件 A 发生的频繁程度越大，即 A 在一次试验中发生的可能性就越大；反之，亦然. 因此，直观的想法是用频率来描述概率.

具体分析一下表 1-1 中给出的抛硬币的试验结果，发现这样的想法可行. 若记 A=“出现正面 H”，由表 1-1 知：当 $n=4\ 040$ 时，$f_n(A)=0.506\ 9$；当 $n=24\ 000$ 时，$f_n(A)=0.500\ 5$. 这表明当 n 不同时，得到的 $f_n(A)$常常会不一样. 甚至根据实际经验，即使对同样的 n，当投掷时间、地点和人不一样时，也会得到不同的 $f_n(A)$. 这表明频率具有一定的**随机波动性**. 但另一方面，从表 1-1 又可以看到，随着试验次数 n 的增大，$f_n(A)$总是在 0.5 上下波动，且逐渐稳定于 0.5，这表明频率具有所谓的**稳定性**. 频率具有稳定性的事实说明了刻画随机事件 A 发生的可能性大小的数——概率的客观存在性.

从上面的讨论中得到启发，就可以给出表示任一事件 A 发生的可能性大小的概率的定义.

定义 2(概率的统计定义) 当试验次数 n 逐渐增大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$总能稳定在确定的数值 P 附近摆动，则称 P 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$.

定义 3(概率的公理化定义) 设 E 是随机试验，U 是它的样本空间，对 E 的每个事件 A 赋一个实数，记为 $P(A)$，若 $P(\cdot)$满足下列三个条件：

(1) 非负性：对每个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 完备性：$P(U)=1$；

(3) 可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

并称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

注 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=U$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为完备事件组.

二、概率的性质

由概率的定义，不难推出概率的一些性质.

性质 1 $P(\varnothing)=0$.

性质 2(有限可加性) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 3 若事件 A,B 满足 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),$$

$$P(B)\geqslant P(A).$$

性质 4 对任一事件 A，有

$$P(A)\leqslant 1.$$

性质 5 对任一事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 6(加法公式) 对任意事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质 1—4 的证明留给读者，这里仅给出性质 5、性质 6 的证明.

证(性质 5) 因为 $A\cup\overline{A}=U$，且 $A\overline{A}=\varnothing$，由性质 2 可得

$$1=P(U)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}),$$

故

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

(性质 6) 因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，且 $A\cap(B-AB)=\varnothing$，$AB\subset B$，故由性质 2 和性质 3 得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

注 性质 6 可推广到 n 个事件并的情形，如 $n=3$ 时，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

一般地，对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}^{n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

特别地，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 为完备事件组，则 $\sum_{i}P(A_i)=1.$

例 1 设 A,B 为两个事件，且设 $P(B)=0.3,P(A\cup B)=0.6$，求 $P(A\overline{B})$.

解 因为 $\quad P(A\overline{B})=P[A(U-B)]=P(A-AB)=P(A)-P(AB),$

而 $\quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$

所以 $\quad P(A\cup B)-P(B)=P(A)-P(AB),$

于是 $\quad P(A\overline{B})=P(A\cup B)-P(B)=0.6-0.3=0.3.$

例 2 某城市发行 A,B 两种报纸，经调查，在这两种报纸的订户中，订阅 A 报纸的有 45%，订阅 B 报纸的有 35%，同时订阅 A,B 两种报纸的有 10%，求只订一种报纸的概率 α.

解 记事件 $A=$“订阅 A 报”，$B=$“订阅 B 报”，则事件“只订一种报纸”$=(A-B)\cup(B-A)=A\overline{B}\cup B\overline{A}$，又 $A\overline{B}$ 与 $B\overline{A}$ 这两个事件是互不相容的，由概率的性质知

$$\begin{aligned}\alpha&=P(A\overline{B})+P(B\overline{A})=P(A-AB)+P(B-AB)\\&=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)\\&=0.45-0.1+0.35-0.1=0.6.\end{aligned}$$

三、古典概型(等可能概型)

在前面讨论的随机试验的例子中，有一些具有如下两个特征：

(1) 随机试验只有有限个可能的结果，即

$$U=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\};$$

(2) 每一个结果发生的可能性大小相同，即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\}).$$

具有以上两个特征的随机试验称为**古典概型**，也称为**等可能概型**.

设试验是古典概型，由于基本事件两两互不相容，因此

$$1=P(U)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{\omega_i\}\right)=\sum_{i=1}^{n}P(\{\omega_i\})=nP(\{\omega_i\}),$$

从而
$$P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n}\ (i=1,2,\cdots,n).$$

若事件 A 含有 k 个基本事件，即 $A=\{\omega_{i_1}\}\cup\{\omega_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{\omega_{i_k}\}$，这里 i_1，$i_2,\cdots,i_k$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中某 k 个不同的数，则有

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(\{\omega_{i_j}\})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{U\text{ 中基本事件总数}}.$$

称此概率为**古典概率**. 这种确定概率的方法称为古典方法，这就把求古典概率的问题转化为基本事件的计数问题.

例 3　有 100 件产品，其中 5 件是次品，现在从这些产品中任取 1 件检验，求取到的恰为正品的概率.

解　设事件 A 为"抽检的 1 件恰为正品"，这里 $n=100$，$k=100-5=95$，所以

$$P(A)=\frac{95}{100}=0.95.$$

例 4　在上例中，如果任意抽检 3 件，求 3 件全是正品的概率.

解　设事件 A 为"抽检的 3 件都为正品"，这里 $n=C_{100}^3$，而 $k=C_{95}^3$，所以

$$P(A)=\frac{C_{95}^3}{C_{100}^3}\approx 0.856\ 0.$$

注　在古典概率问题中，一般要用到排列组合的知识，这里简单介绍几个排列组合公式.

C_n^m 表示在 n 个元素中任意取 m 个元素的方法数；A_n^m 表示在 n 个元素中任意取 m 个元素，再将这 m 个元素排成一列的方法数. 我们有

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!},\ A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

例 5　将 3 个球随机放入 4 个杯子中，问杯子中球的个数最多为 1，2，3 的概率分别是多少？

解　设事件 A,B,C 分别表示杯子中球的个数最多为 1，2，3，我们认为球是