Hochschild同调和上同调

陈 媛 著

科 学 出 版 社

Hochschild 同调和上同调

陈 媛 著

安徽建筑大学
藏书
图书馆

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书分两部分．第一部分介绍代数的 Hochschild 同调与上同调，其中包括三类特殊 Koszul 代数的 Hochschild 同调和上同调群的计算，以及两类代数的 Hochschild 上同调环的结构刻画．第二部分介绍代数的模-相对 Hochschild 同调与上同调及形式光滑性问题，着重介绍几类特殊构造下代数的模-相对 Hochschild (上)同调，以及 Morita 型稳定下代数的模-相对 Hochschild (上)同调，并利用同调方法进一步探讨了代数的形式光滑性问题．

本书可作为代数表示理论研究领域的高年级本科生、研究生、教师和相关科研人员的参考用书．

图书在版编目(CIP)数据

Hochschild 同调和上同调/陈媛著．—北京：科学出版社, 2017.12

ISBN 978-7-03-055768-1

Ⅰ. ①H…　Ⅱ. ①陈…　Ⅲ. ①同调代数　Ⅳ. ①O154

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 298564 号

责任编辑：李静科／责任校对：王萌萌

责任印制：张　伟／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

2017 年 12 月第　一　版　开本: 720 × 1000　B5

2017 年 12 月第一次印刷　印张: 7　1/2

字数: 151 000

定价: 49.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

代数的 Hochschild 同调和上同调理论是 20 世纪 40 年代发展起来的一门重要的数学分支. 近年来, 有限维结合代数的 Hochschild 同调和上同调得到了广泛的研究, 在数学及物理等很多领域扮演着重要的角色. 尤其是低维的 Hochschild 同调群和上同调群, 在代数表示论中有着重要的作用. 同调群与代数的整体维数和定向圈等密切相关, 而上同调群则与代数的单连通性以及形变理论等有着紧密的联系.

模-相对 Hochschild (上) 同调实际上是通常的 Hochschild (上) 同调的一种推广. 它们是 Ardizzoni 等在 2008 年研究代数的形式光滑性以及形式光滑双模时引入的. 这一概念在非交换代数几何中扮演着重要角色, 它给出了可分双模以及形式光滑双模的一种刻画. 目前, 形式光滑对象已成为非交换代数几何的重要研究对象之一. 研究者们不再局限于从非交换几何方面研究光滑代数, 而是进一步地从代数的角度, 利用同调方法如模-相对 Hochschild 上同调来研究形式光滑性问题.

本书分为两个部分, 分别介绍代数的 Hochschild (上) 同调和模-相对 Hochschild (上) 同调. Hochschild (上) 同调方面, 主要侧重于 Hochschild 同调群和上同调群的计算问题, 以及上同调环的乘法结构的刻画; 模-相对 Hochschild (上) 同调方面, 主要侧重于代数间模-相对 Hochschild (上) 同调之间的关系研究. 本书较详细地叙述了最基本的理论和方法, 并力求包括近年的研究进展.

本书第 1~6 章主要探讨代数的 Hochschild 同调和上同调: 利用组合的方法, 给出三类特殊 Koszul 代数的 Hochschild 同调和上同调群的计算, 并分别给出两类重要代数 Hochschild 上同调的 Cup 积和 Gerstenhaber 括号积的刻画, 以期让读者了解到计算代数的 Hochschild 同调和上同调群维数, 以及刻画 Hochschild 上同调乘法结构的一般方法. 第 7~9 章探讨代数的模-相对 Hochschild 同调与上同调: 着重从表示论的角度, 刻画几种特殊构造下代数的模-相对 Hochschild (上) 同调之间的关系; 证明代数的模-相对 Hochschild (上) 同调也是 Morita 型稳定等价下的不变量; 进一步地, 利用同调方法, 探讨代数间的形式光滑性等问题.

目前关于 Hochschild 同调和上同调理论方面的专著还很少. 本书介绍的是我近些年的一些工作, 主要由国家自然科学基金 (No. 11126110, No. 11301161) 资助. 在此, 对所有合作者们表示衷心的感谢! 限于笔者的知识及水平, 书中难免有疏漏之处, 恳请读者批评指正.

陈　媛

2017 年 10 月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章　Hochschild 同调群和上同调群

1.1　基本概念

设 A 是域 k 上的有限维结合代数 (含单位元 1), $A^e = A \otimes_k A^{op}$ 是 A 的包络代数, 其中 A^{op} 是代数 A 的反代数. M 是 k 上有限维 A-A-双模, 则 Hochschild 复形 $C^\bullet = (C^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ 定义如下:

$$C^i = 0,\ \forall\ i < 0;\ \ C^0 = M;\quad C^i = \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes i}, M),\ \forall\ i > 0,$$

其中 $A^{\otimes i}$ 表示 k 上的张量积 $A \otimes_k A \otimes_k \cdots \otimes_k A$(共有 i 次), 映射为

$d^0:\ M \to \mathrm{Hom}_k(A, M),\ \ d^0(m) = [-, m],\quad$ 其中 $[-, m](a) = am - ma,\ \ \forall a \in A;$

$d^i:\ C^i \to C^{i+1}$ 由下述法则给出: $\forall f \in C^i,\ a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i+1} \in A^{\otimes(i+1)}$,

$$\begin{aligned}(d^i f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i+1}) = {} & a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{i+1}) \\ & + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_{i+1}) \\ & + (-1)^{i+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \cdot a_{i+1}.\end{aligned}$$

直接代入验证可知 $d^i d^{i+1} = 0$. 由此定义

$$\mathrm{H}^i(A, M) = \mathrm{H}^i(C^\bullet) = \mathrm{Ker} d^i / \mathrm{Im} d^{i-1}, \qquad \forall i \in \mathbb{Z},$$

称为 A 的系数在 M 中的第 i 次 Hochschild 上同调群.

若取 $M = A$, 则记 $\mathrm{HH}^i(A) := \mathrm{H}^i(A, A)$, 称为 A 的第 i 次 Hochschild 上同调群. 此上同调群为 Hochschild 于 1945 年引进的[87].

而 Hochschild 同调群并非 Hochschild 本人所引进, 它首先出现在文献 [38] 中. 考虑 Hochschild 复形

$$\cdots \to A^{\otimes(i+1)} \xrightarrow{d_i} A^{\otimes i} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} A \otimes A \xrightarrow{d_1} A \xrightarrow{d_0} 0,$$

其中

$$d_i(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i+1}) = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j-1} (a_1 \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_{i+1}) + (-1)^i (a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \cdot a_{i+1}.$$

令

$$\mathrm{HH}_i(A) = \mathrm{Ker}d_i/\mathrm{Im}d_{i+1}, \quad i \geqslant 0,$$

则

$$\mathrm{HH}_i(A) \cong \mathrm{Tor}_i^{A^e}(A, A) \cong D\mathrm{Ext}_{A^e}^i(A, D(A)), \quad D = \mathrm{Hom}_k(-, k)$$

称为 A 的第 i 次 Hochschild 同调群.

从而, A 的第 i 次 Hochschild 同调群与上同调群 [108] 也可分别定义为

$$\mathrm{HH}_i(A) = \mathrm{Tor}_i^{A^e}(A, A) \quad 与 \quad \mathrm{HH}^i(A) = \mathrm{Ext}_{A^e}^i(A, A).$$

Hochschild (上) 同调理论, 尤其是低维 (上) 同调群在表示论中具有重要的作用: Gerstenhaber 证明了 $\mathrm{HH}^2(A)$ 与 A 的形变理论有着紧密的联系[70], 而 $\mathrm{HH}^1(A)$ 与代数 A 的 Gabriel 箭图顶点的可分性质与单连通性密切相关[8, 82, 128, 155], Happel 证明了代数闭域上的有限表示型代数是单连通的当且仅当它的 Auslander 代数的一阶上同调群为零[83]. 人们也猜想代数闭域上的有限维代数, 如果它的一阶上同调群消失, 那么它的 Gabriel 箭图没有定向圈. 但这是不正确的, Buchweitz 和 Liu 举出了反例[31], 于是人们又猜想倾斜代数是单连通的当且仅当它的一阶上同调群消失. 这对驯顺倾斜代数证明是正确的[9]. 一阶和二阶 Hochschild 上同调群的消失与代数的表示型也有着紧密的联系[67, 82, 128]. 而同调群则与代数的整体维数及定向圈密切相关[14, 80, 89].

1.2 双模投射分解

计算代数 Hochschild 同调群与上同调群通常有两种方法: 一是利用上述 Hochschild 同调与上同调群的导出函子的定义; 二是利用谱序列的方法[5]. 这里我们重点介绍第一种方法, 欲计算 $\mathrm{HH}^i(A)$ 和 $\mathrm{HH}_i(A)$, 首先需要构造便于应用的 A 在 A^e 上的双模投射分解. 这方面有不少工作, 因为这是一项很基本的工作. 然而给出的投射分解要适合不同的计算是困难的. 常用的投射分解有标准 bar 分解、约化 bar 分解、极小双模投射分解等 (见第 6 章). 其中利用极小分解来计算 Hochschild 同调群与上同调群相对来说是最简便的. 然而, 即便知道代数的极小双模投射分解, 一般情况下想计算其 Hochschild 同调与上同调群也是比较困难的. 关于各种代数的极小双模投射分解, 参见文献 [15, 29, 33, 74, 75, 79, 82, 130, 149]. 这里我们简单介绍其中三种.

1.2.1 Happel 分解

首先介绍 Happel 给出的一种极小双模投射分解[82], 它本质上是用箭图的语言给出的. 为此, 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 A 的正交本原幂等元的一个完全集. 令

$P(i)=Ae_i$, $S(i)=P(i)/\mathrm{rad}P(i)$, 则 $S(1),\cdots,S(n)$ 是单 A-模的完全集. 于是 $\{e_i\otimes e_j^{'}|1\leqslant i,j\leqslant n\}$ 是 A^e 的正交本原幂等元的一个完全集. 记 $P(i,j^{'})=A^e(e_i\otimes e_j^{'})=Ae_i\otimes(e_jA)^{'}$, 由此得到全体不可分解投射 A^e-模. 令 $S(i,j^{'})=P(i,j^{'})/\mathrm{rad}P(i,j^{'})$. 则有如下结论.

定理 1.1[82] 设 $\cdots\longrightarrow R_n\xrightarrow{d_{n-1}}R_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow R_1\xrightarrow{d_0}R_0\xrightarrow{d_{-1}}A\longrightarrow 0$ 是 A 在 A^e 上的一个极小投射分解, 则

$$R_n=\bigoplus\nolimits_{i,j}P(i,j^{'})^{r_{i,j,n}},$$

其中 $r_{i,j,n}=\mathrm{dimExt}_A^n(S(j),S(i))$.

值得注意的是, Happel 分解中微分映射 d_i 并未给出. 一般情况下 Happel 分解并不能直接用于计算 Hochschild 同调群和上同调群. 然而对于一些特殊代数: 遗传代数[82]、单项半交换的 Schurian 代数[82], 以及截面基本圈代数[153] 等, 利用 Happel 极小双模投射分解, 各阶 Hochschild 上同调群被计算.

1.2.2 Bardzell 分解

Bardzell 在文献 [15] 中构造了单项式代数的一种极小双模投射分解.

定理 1.2[15] 设 Q 是一个有限箭图, $A=kQ/I$ 是一个单项式代数. 进一步地, 假定对某个整数 $N\geqslant 2$, $J^N\subset I\subset J^2$, 则

$$\cdots\longrightarrow P_{n+1}\xrightarrow{\phi_{n+1}}P_n\xrightarrow{\phi_n}\cdots\xrightarrow{\phi_3}P_2\xrightarrow{\phi_2}P_1\xrightarrow{\phi_1}P_0\xrightarrow{\pi}A\to 0,$$

其中

$$P_n=\coprod_{p^n\in AP(n)}Ao(p^n)\otimes_k t(p^n)A,$$

$AP(n)$ 和 ϕ_* 详见文献 [15].

第 4 章我们将利用 Bardzell 极小双模投射分解, 得到对应于根双模的拟遗传代数的一个极小双模投射分解. Butler 和 King 在文献 [33] 中给出了单项式代数的另一种极小双模投射分解.

1.2.3 Koszul 分解

Green 等在文献 [75] 中给出了 Koszul 代数的极小双模投射分解.

定理 1.3[75] 设 Q 是一个箭图, $A=kQ/I$ 是一个 Koszul 代数, 则

$$\cdots\longrightarrow P_{n+1}\xrightarrow{d_{n+1}}P_n\xrightarrow{d_n}\cdots\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{d_0}\Lambda\to 0$$

是 A 在 A^e 上的一个极小投射分解, 这里

$$P_n = \coprod_{i=0}^{t_n} Ao(f_i^n) \otimes_k t(f_i^n)A,$$

f_i^n 和微分映射 d_* 详见文献 [75].

Koszul 极小双模投射分解在第 5 章将用到. 徐运阁和章超在文献 [149] 中进一步给出了 d-Koszul 代数的一种极小双模投射分解.

1.3 Koszul 代数

一般情况下计算代数的 Hochschild 同调与上同调群是比较困难的. 但一些特殊的代数类, 如外代数、截面代数、单项式代数等的同调与上同调群已被计算 (见 [43, 44, 80, 101, 127, 147, 153, 154]); 某些特殊代数的上同调群也已被计算, 如有限维遗传代数[82]、关联 (incidence) 代数[42]、具有狭窄箭图的代数[41, 82]、根方零代数[40]、截面代数[43, 98, 153]、零关系代数[44], 以及具有正规 (normed) 基的特殊双列代数[145] 等. 注意到这些代数都具有乘法基. Zacharia 也证明了拟遗传代数的非零阶同调群均为零[152].

本书第一部分主要介绍几类特殊 Koszul 代数的同调性质. Koszul 代数在交换代数和代数拓扑中起着相当重要的作用[84, 107, 115]. 目前, 它在非交换 Koszul 代数的代数拓扑以及李代数理论和量子群中也都有着重要的应用[18, 112].

首先回忆一下 Koszul 代数的定义[76]. 设 k 是一个域, $\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 + \cdots$ 是域 k 上的一个分次代数. 若对每个 $n \geqslant 1$, $\Lambda_n = \Lambda_1 \cdot \Lambda_{n-1}$, 则称 Λ 是由 0 次元和 1 次元生成的. 我们用 $E(\Lambda)$ 表示 Yoneda 代数

$$E(\Lambda) = \coprod_{n\geqslant 0} \mathrm{Ext}_\Lambda^n(\Lambda_0, \Lambda_0),$$

这里乘法结构是通过 Yoneda 积给出的, 则 $E(\Lambda)$ 是域 k 上的一个分次代数, 其中 $E(\Lambda)_n = \mathrm{Ext}_\Lambda^n(\Lambda_0, \Lambda_0)$. 我们称一个分次代数 Λ 是 Koszul 代数, 如果它满足以下三个条件: ① Λ_0 是域 k 上的半单 Artin 代数, 即形为 $k \times k \times \cdots \times k$; ② Λ 是由 0 次元和 1 次元生成的; ③ $E(\Lambda)$ 也是由 0 次元和 1 次元生成的.

Koszul 代数是一类相当好的代数类. 一方面, 它不仅在代数上存在 Koszul 对偶, 在模范畴和导出范畴上也存在 Koszul 对偶[18, 77]; 另一方面, 对任意一个 Koszul 代数, 它的极大半单子代数 Λ_0 的极小投射 Λ-分解以及它的极小投射 Λ-Λ-双模分解我们都已相当清楚[33, 75].

目前, 我们已经知道很多代数都是 Koszul 代数, 如路代数[77]、根方零代数[110]、整体维数为 2 的二次代数[76]、有限表示型的有限维不可分解三次根方零自入射代

数[110], 以及许多预投射代数[73] 等. 而且, 从一个 Koszul 代数出发, 我们可以构造新的 Koszul 代数, 如 Koszul 代数的反代数是 Koszul 代数[18, 77], Koszul 代数的二次对偶等价的 Yoneda 代数是 Koszul 代数[18, 76, 77], 两个 Koszul 代数的张量代数是 Koszul 代数[77]; 也可以通过 Galois 覆盖来构造 Koszul 代数[81], 等等.

接下来的三章主要研究三类特殊的 Koszul 代数的同调性质, 即二元广义外代数、一类自入射 Koszul 特殊双列代数以及对应于根双模的拟遗传代数.

1.3.1 二元广义外代数

设 $A = A_q = k\langle x, y\rangle/(x^2, xy + qyx, y^2)$ 是两个变量的广义外代数, 其中 $q \in k\backslash\{0\}$. 令 $1 < x < y$, 则长度-左字典序给出了 A_q 的一个良序. 易见 $R = \{x^2, xy + qyx, y^2\}$ 是理想 $(x^2, xy + qyx, y^2)$ 的非交换 Gröbner 基, 而且 A 中基元素的正规形为 $\{1, x, y, yx\}$. 由于 A 有一个二次 Gröbner 基, 所以 A 是一个 Koszul 代数.

记

$$\mathrm{hh.dim}A = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \dim\mathrm{HH}_i(A) = 0\text{对所有的 } i > n\}$$

与

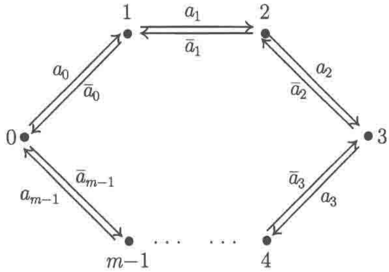
$$\mathrm{hch.dim}A = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \dim\mathrm{HH}^i(A) = 0\text{对所有的 } i > n\}$$

分别为 A 的 Hochschild 同调与上同调维数[80]. Happle 在 1989 年猜想: 如果 A 是代数闭域 k 上的有限维代数, 则整体维数 $\mathrm{gl.dim} < \infty$ 当且仅当 $\mathrm{hch.dim} < \infty$[82]. Buchweitz 等给出了一个反例, 从而否定了这一猜想[29]. 他们发现了一大类"病态"代数 $A_q = k\langle x, y\rangle/(x^2, xy + qyx, y^2)$, 讨论了它们的上同调群, 并证明了如果 $q \neq 0$ 不是单位根, 那么 $\mathrm{gl.dim}A_q = \infty$, 但 $\mathrm{hch.dim}A_q = 2$. 当 $q = 1$ 时, A_1 是含有两个变量的外代数 (因此我们不妨称 A_q 为广义外代数); 当 $q = -1$ 时, A_{-1} 是可换完全交. 事实上, 这些代数在很多方面都呈现出"病态"行为: 对某些特殊的 q 值, Liu-Schulz 通过构造一个没有自扩张的非投射 A_q-模, 否定了 Tachikawa 猜想[123](拟 Frobenius 代数上的没有自扩张的有限生成模是投射模); 当 q 不是单位根时, Liu-Schulz 证明 A_q 的平凡扩张是局部对称代数, 而且它的 AR-箭图包含一个有界无限 DTr-轨道, 从而对 Ringel 的一个问题 (在 AR-箭图的连通分支中, 具有相同长度的模的数目是有限的吗?) 给出了否定的回答[100]; 当 $q' \neq q$ 或 q^{-1} 时, Skowroński-Yamagata 证明 A_q 和 $A_{q'}$ 是底座 (socle) 等价的自入射代数, 但它们不是稳定等价的[129], 等等. 然而韩阳注意到这类代数在 Hochschild 同调方面却并不呈现病态行为, 他证明了 $\mathrm{hh.dim}A_q = \mathrm{gl.dim}A_q = \infty$[80]. 第 2 章就是计算这类代数的各阶 Hochschild 同调群的维数, 从而使读者对广义外代数的同调行为有更清晰的了解.

1.3.2 自入射 Koszul 特殊双列代数

设 k 是一个域, Q 是如下由 m 个顶点、$2m$ 个箭向构成的有限箭图:

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com



设 N 是正整数, 记 I_N 是由

$$R=\{a_ia_{i+1},\bar{a}_{i+1}\bar{a}_i,(a_{i+1}\bar{a}_{i+1})^N-(\bar{a}_ia_i)^N\mid 0\leqslant i\leqslant m-1,\ a_m=a_0\}$$

生成的路代数 kQ 的理想. 令 $\Lambda_N=kQ/I_N$, 则 Λ_N 是自入射 Koszul 特殊双列代数[130].

这类代数在代数的表示理论中有着重要的应用, 如它们被运用于正特征代数闭域上主块是驯顺型的无穷小群所对应的 Hopf 代数的分类中[64, 65]; 当 $N=1$ 且 m 为偶数时, 这类代数出现在广义 Taft 代数及$U_q(sl_2)$的表示理论的研究中[58, 113, 135, 141]. 特别地, 当 $N=m=1$ 时, Λ_1 及其量子化 (即底座 (socle) 形变) $(\Lambda_1)_q$ 的 Hochschild (上) 同调已被深入地研究[29, 146].

Snashall 和 Taillefer 清晰地描绘了代数 Λ_N 的 Hochschild 上同调环的结构[130], 研究了这类代数 $\Lambda=\Lambda_N$ 的底座形变 Λ_q (即 Λ_q 是自入射的且 $\Lambda_q/\mathrm{soc}(\Lambda_q)\cong\Lambda/\mathrm{soc}(\Lambda)$) 的 Hochschild 上同调性质[131], 并证明了 Snashall-Solberg 猜想对 Λ 与 Λ_q 都成立, 即 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_N)/\mathcal{N}$ 是一个有限生成 k-代数, 其中 $\mathcal{N}$ 是由 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_N)$ 中的齐次幂零元素生成的理想. 注意到 Xu 提供了该猜想的一个反例[142].

很清楚, 如果代数 A 的整体维数 $\mathrm{gl.dim}A<\infty$, 则代数 A 的 Hochschild(上) 同调维数都有限, 即 $\mathrm{hch.dim}A<\infty$, $\mathrm{hh.dim}A<\infty$. Happel 曾猜想如果代数 A 的 Hochschild 上同调维数 $\mathrm{hch.dim}A<\infty$, 则代数 A 的整体维数 $\mathrm{gl.dim}A<\infty$[82]. 然而, Buchweitz 等通过计算二元量子外代数 (即 Λ_1 的底座形变 $(\Lambda_1)_q$) 得到了 Happel 猜想的一个反例[29]. 由此, 韩阳提出了一个对应的猜想, 即代数 A 的整体维数 $\mathrm{gl.dim}A<\infty$ 当且仅当代数 A 的 Hochschild 同调维数 $\mathrm{hh.dim}A<\infty$[80]. 该猜想已被证明对交换代数[14]、零关系代数[80]、余维数为 2 的量子完全交[19]、分次局部代数、特征零域上的胞腔代数[21] 以及由 Solotar 和 Vigué-Poirrier 研究的两类代数[132] 等重要代数都成立. 韩阳等也给出了该猜想成立的一个充分条件[20].

第 3 章将利用组合的方法, 清晰地计算出代数 Λ_N 的各阶 Hochschild 同调群的维数, 从而以计算的方式直观地表明韩阳的猜想对这类自入射 Koszul 特殊双列代数 Λ_N 成立. 综合第 3 章的结果与 Snashall-Taillefer 的工作, 我们能更进一步地了解这类代数的 Hochschild (上) 同调性质.

注意到特殊双列代数是一类重要的代数类型, 它们广泛地出现在数学的很多

分支中. 例如, 所有有限表示型的有限群代数以及很多驯顺表示型群代数都是特殊双列代数[57, 118, 122]. Gelfand 和 Ponomarev 利用特殊双列代数构造 Lorentz 群的表示[68]. Baues 和 Hennes 将 $(n-1)$-连通的 $(n+3)$-维多面体 $(n \geqslant 4)$ 的同伦分类问题归结为特殊双列代数的不可分解模的分类问题而加以解决[17]. Drozd 和 Greuel 也观察到射影线的某些构形上的层的分类问题与其对应的特殊双列代数的不可分解模的分类问题密切相关等[54]. 特殊双列代数也常常用来作为重要的测试类, 以便对有限维 k-代数的一般问题有一个好的直觉. 由于 Hochschild (上) 同调是 Morita 等价与导出等价不变量, 所以很多群代数的 Hochschild (上) 同调的研究都被转化为特殊双列代数的 Hochschild (上) 同调进行研究. 例如 A 型的驯顺表示型 Hecke 代数 Morita 等价或导出等价于特殊双列代数, Erdmann 和 Schroll 通过计算一个特殊双列代数的 Hochschild 上同调, 研究了 A 型的驯顺表示型 Hecke 代数的 Hochschild 上同调性质[60]. 然而, 由于至今仍无法给出一般特殊双列代数的极小投射分解的构造, 所以人们对特殊双列代数的 Hochschild (上) 同调群以及上同调环仍知之甚少[144, 145].

1.3.3 对应于根双模的拟遗传代数

拟遗传代数是 Cline, Parshall 和 Scott 为了研究复李代数与代数群的表示理论所引起的最高权范畴而引入的一种重要代数类型[47]. 随后有许多作者对这一领域有较深入的研究. 2000 年, 某些拟遗传代数也出现在一般线性群 GL_n 的抛物子群在幂幺正规子群上的作用的研究中[25, 27]. 这类代数是与所谓的上三角双模相联系的拟遗传代数[26]. 设 M 是 Krull-Schmidt 范畴 K 上的一个上三角双模, Brüstle 和 Hille[26] 证明了 M 的矩阵范畴 $\mathrm{mat}M$ 等价于某个拟遗传代数的 Δ-好模范畴, 这个拟遗传代数是 $\mathrm{mat}M$ 的投射生成子 P 的自同态代数的反代数. 在此基础上, 文献 [148] 着重讨论了遗传代数 Λ 的投射模范畴 $\mathrm{proj}.\Lambda$ 上的双模 $\mathrm{rad}(-,-)$, 并得到了它所对应的拟遗传代数的一个实现, 即 Gabriel 箭图与关系. 进一步地, 文献 [85] 也证明该拟遗传代数是一个 Koszul 代数.

Zacharia 证明了拟遗传代数的非零阶的同调群均为零[152], 但它们的上同调群却大多不为人们所知. 尽管 Hochschild 上同调和同调群之间有一公式: $\mathrm{HH}^i(A,X) \simeq \mathrm{HH}_i(A,DX)$, 其中 X 是任意一个 A-A-双模, $D=\mathrm{Hom}_k(-,k)$ 是平凡对偶. 但这对于计算 Hochschild 上同调没有多大帮助. 一般情况下, Hochschild 同调与上同调既不是向量空间的对偶也不是范畴意义下的对偶, 它们反映了代数不同方面的性质. 目前, 对拟遗传代数的 Hochschild 上同调群的研究和了解还是比较少的. 不过, De la Peña 和 Xi 得到了拟遗传代数与其商代数的 Hochschild 上同调群的长正合序列, 并由此得到了非半单 Temperley-Lieb 代数与表示有限 Schur 代数的 Hochschild 上同调群[50]. 文献 [151] 也得到了对偶扩张代数的 Hochschild 上同调群.

设 A 是有限表示型遗传代数 Λ 的投射模范畴 $\mathrm{proj}.\Lambda$ 上的根双模 $\mathrm{rad}(-,-)$ 所对应的拟遗传代数. 第 4 章将通过对 Bardzell 上链复形的细致分析, 用组合的方法得到该拟遗传代数 A 的 Hochschild 各阶上同调群的维数.

1.4 Hochschild 上同调的乘法结构

设 A 是域 k 上的有限维结合代数 (含单位元 1). Gerstenhaber 在文献 [69] 中, 利用 A 的标准 bar 分解给出了 Cup 积:

$$\smile: \mathrm{HH}^n(A) \times \mathrm{HH}^m(A) \longrightarrow \mathrm{HH}^{n+m}(A)$$

和 Gerstenhaber 括号积:

$$[-,-] : \mathrm{HH}^n(A) \times \mathrm{HH}^m(A) \longrightarrow \mathrm{HH}^{n+m-1}(A).$$

并且证明了 A 的 Hochschild 上同调

$$\mathrm{HH}^*(A) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{HH}^i(A)$$

在 Cup 积下作成分次交换代数; 在 Gerstenhaber 括号积下,

$$\mathrm{HH}^{*+1}(A) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathrm{HH}^i(A)$$

作成分次李代数.

一般来说, 准确地给出一个代数的 Hochschild 上同调的分次交换代数结构和分次李代数结构都是比较困难的. 随着人们的不断研究, 一些特殊代数类的 Hochschild 上同调的 Cup 积得到了描述. Cup 积最初是由标准 bar 分解来定义的, 但它还可以用 Yoneda 积来描述, 这对任意的投射双模分解都可以, 尤其是可以利用极小双模投射分解[137]. 人们利用这种方法, 刻画了一些代数的 Cup 积 (或等价地, Yoneda 积). 如根方零代数[45]、外代数[147]、截面箭图代数[1]、Fibonacci 代数[62]、Koszul 代数[30] 等. 然而, Hochschild 上同调的 Gerstenhaber 括号积却少有这样的组合刻画.

近些年来, 对于几类零关系代数的 Hochschild 上同调的 Gerstenhaber 括号积的研究取得了一些进展. Strametz 在文献 [133] 中研究了零关系代数的一阶 Hochschild 上同调群. Sánchez-Floress 在文献 [120] 中通过 Gerstenbhaber 括号积刻画了根方零代数的 Hochschild 上同调的李模结构, 而 Cibils 在文献 [45] 中刻画了其 Cup 积. Bustamante 在文献 [32] 中证明了二次三角串 (string) 代数的 Hochschild 上同调环的乘法结构是平凡的. 进一步地, 对三角 gentle 代数, 其李代数结构也是平凡

的. Shepler 和 Witherspoon 从形变的角度发展了扭群代数的 Hochschild 上同调的 Gerstenhaber 括号积公式[124]. 对截面箭图代数, 文献 [1, 149] 和 [150] 用平行路的语言分别刻画了其 Cup 积和 Gerstenhaber 括号积. 然而, 对于大多数有限维代数, 我们对其 Hochschild 上同调的两种乘法结构都知之甚少.

第 5 章和第 6 章将分别研究两类重要代数 (Temperley-Lieb 代数和二次三角零关系代数) 的 Hochschild 上同调的乘法结构.

Temperley-Lieb 代数是文献 [136] 在 1971 年研究冰模型以及 Potts 模型中的单边界传递矩阵时引入的. 随后 Jones 在研究次因子 (subfactors) 时又独立地引进了这类有限维结合代数[91]. 这类代数在 Jones 的纽结和连接的新的多项式不变量发现中[92], 以及随后四十年纽结理论、拓扑量子场理论、统计物理学[93] 的发展中起到了核心作用. 它们同纽结理论之间的关系在 Jones 多项式的定义中扮演着重要角色. 连接的量子不变量理论如今已涉及许多研究领域. 所以许多与辫不变量或者连接不变量相关的重要代数类, 如 Birman Wenzl 代数[22]、Hecke 代数以及 Brauer 代数等, 都引起了数学和物理界的极大兴趣. 它们都是某些群代数或者其他著名代数的形变.

第 5 章将利用平行路的语言, 刻画 Temperley-Lieb 代数的 Hochschild 上同调 $\mathrm{HH}^*(A)$ 的 Cup 积, 并用生成元和关系, 给出 Hochschild 上同调 $\mathrm{HH}^*(A)$ 的一个实现.

第 6 章将通过对 Hochschild 上同调的不同李括号积之间的转化, 利用平行路的语言给出二次三角零关系代数 Gerstenhaber 括号积的显式表达. 进一步地, 应用所得结果, 给出 Fibonacci 代数的 Hochschild 上同调李代数结构的更为精细的刻画.

第 2 章　二元广义外代数的 Hochschild 同调群

设 $A = A_q = k\langle x, y\rangle/(x^2, xy + qyx, y^2)$ 是两个变量的广义外代数, 其中 $q \in k\backslash\{0\}$. A 是一个 Koszul 代数. 本章计算这类代数的各阶 Hochschild 同调群的维数, 从而使读者对广义外代数的同调行为有更清晰的了解.

2.1　极小投射分解

本章总假定 $A = A_q = k\langle x, y\rangle/(x^2, xy + qyx, y^2)$ 是两个变量的广义外代数, 其中 $q \in k\backslash\{0\}$. 设 $A^e = A \otimes_k A^{op}$ 是 A 的包络代数, 文献 [29] 中构造了 A 的一个极小投射 A^e-分解. 令 $f_0^0 = 1$, $f_0^1 = x$, $f_1^1 = y$, 则对 $n \geqslant 0$, 我们可由

$$f_i^n = f_{i-1}^{n-1} \otimes y + q^i f_i^{n-1} \otimes x$$

归纳地定义 $\{f_i^n \mid n \geqslant 0, 0 \leqslant i \leqslant n\}$, 其中 $f_{-1}^{n-1} = 0 = f_n^{n-1}$. 易见, f_i^n 是 $n-i$ 个 x 与 i 个 y 的所有可能的张量积的线性组合. 而且

$$f_i^n = x \otimes f_i^{n-1} + q^{n-i} y \otimes f_{i-1}^{n-1}.$$

令 $P_n = \coprod_{i=0}^n A \otimes_k f_i^n \otimes_k A \subseteq A^{\otimes_k (n+2)}$, $n \geqslant 0$. 设 $\widetilde{f_0^n} = 1 \otimes f_i^n \otimes 1$, $n \geqslant 1$, 且 $\widetilde{f_0^0} = 1 \otimes 1$, 定义 $\delta_n : P_n \longrightarrow P_{n-1}$,

$$\delta_n(\widetilde{f_i^n}) = x\widetilde{f_i^{n-1}} + q^{n-i} y \widetilde{f_{i-1}^{n-1}} + (-1)^n \widetilde{f_{i-1}^{n-1}} y + (-1)^n q^i \widetilde{f_i^{n-1}} x.$$

命题 2.1[29]　设 $A = A_q$ 是一个二元广义外代数, 则复形 $(\mathbb{P}_\bullet, \delta_\bullet)$

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} P_n \xrightarrow{\delta_n} \cdots \xrightarrow{\delta_3} P_2 \xrightarrow{\delta_2} P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \longrightarrow 0$$

是 A^e-模 A 的极小投射分解.

证　设 $X = \{x, y\}$, 由于 A 是一个 Koszul 代数, 故由文献 [33] 知, 只需证明 $\{f_i^n | 0 \leqslant i \leqslant n\}$ 是向量空间 $K_n = \bigcap_{p+q=n-2} X^p R X^q$ 的一组 k-基.

显然, $XK_{n-1} \cap K_{n-1}X \subset K_n$. 另一方面, 由于

$$f_i^n = f_{i-1}^{n-1} \otimes y + q^i f_i^{n-1} \otimes x = x \otimes f_i^{n-1} + q^{n-i} y \otimes f_{i-1}^{n-1},$$

故由归纳可知 $f_i^n \in K_n$. 而且 $\{f_i^n \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}$ 显然是线性无关的, 因为 f_i^n 中的每个单项式 y 恰出现 i 次.

由于 A 的 Yoneda 代数 $E(A)=\mathrm{Ext}_A^*(k,k)\simeq k\langle x,y\rangle/(yx-qxy)$, 所以 A^e-模 A 的极小投射分解的 Betti 数为 $\{b_n=n+1\}_{n\geqslant 0}$. 故 $\dim K_n=n+1$, 即 $\{f_i^n \mid 0\leqslant i\leqslant n\}$ 是 K_n 的一组 k-基.

映射 $\delta_\bullet$ 由文献 [33, 354 页] 决定. □

2.2 Hochschild 同调群

将函子 $A\otimes_{A^e}$-作用于极小投射分解 $(\mathbb{P}_\bullet,\delta_\bullet)$, 可得同调复形 $A\otimes_{A^e}(\mathbb{P}_\bullet,\delta_\bullet)=(\mathbb{M}_\bullet,\tau_\bullet)$, 其中 $M_n=\coprod_{i=0}^n A\otimes f_i^n$, 且对任意的 $\lambda\in A$,

$$\tau_n(\lambda\otimes f_i^n)=\lambda x\otimes f_i^{n-1}+(-1)^n q^i x\lambda\otimes f_i^{n-1}+q^{n-i}\lambda y\otimes f_{i-1}^{n-1}+(-1)^n y\lambda\otimes f_{i-1}^{n-1}.$$

因为 A 有一组基 $\{1,y,x,yx\}$, 故作为向量空间, M_n 有基 $\{1\otimes f_i^n, y\otimes f_i^n, x\otimes f_i^n, yx\otimes f_i^n \mid 0\leqslant i\leqslant n\}$. 定义一个序: $\lambda\otimes f_i^n\prec\lambda'\otimes f_j^n$, 如果 $\lambda<\lambda'$, 或 $\lambda=\lambda'$ 但 $i<j$, 则上述基作成 M_n 的一组定序基. 从而

$$\begin{aligned}
&\tau_n(1\otimes f_i^n)=(1+(-1)^n q^i)x\otimes f_i^{n-1}+(q^{n-i}+(-1)^n)y\otimes f_{i-1}^{n-1};\\
&\tau_n(x\otimes f_i^n)=(-q^{n-i+1}+(-1)^n)yx\otimes f_{i-1}^{n-1};\\
&\tau_n(y\otimes f_i^n)=(1+(-1)^{n+1}q^{i+1})yx\otimes f_i^{n-1};\\
&\tau_n(yx\otimes f_i^n)=0,
\end{aligned}$$

且 $f_{-1}^{n-1}=f_n^{n-1}=0$. 则 τ_n 关于上述定序基的矩阵有如下形式:

$$\begin{pmatrix} 0 & C_1 & C_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & D_1\\ 0 & 0 & 0 & D_2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{4(n+1)\times 4n},$$

其中 C_i, D_i 都是 $(n+1)\times n$ 矩阵, $i=1,2$, 且

$$C=(C_1\quad C_2)=\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
v^0 &&&&&& 0 &&&&&\\
& v^1 &&&&& w^1 &&&&&\\
&& \ddots &&&&& \ddots &&&&\\
&&& v^i &&&&& w^i &&&\\
&&&& \ddots &&&&& \ddots &&\\
&&&&& v^{n-1} &&&&& w^{n-1} &\\
&&&&& 0 &&&&&& w^n
\end{array}\right),$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com