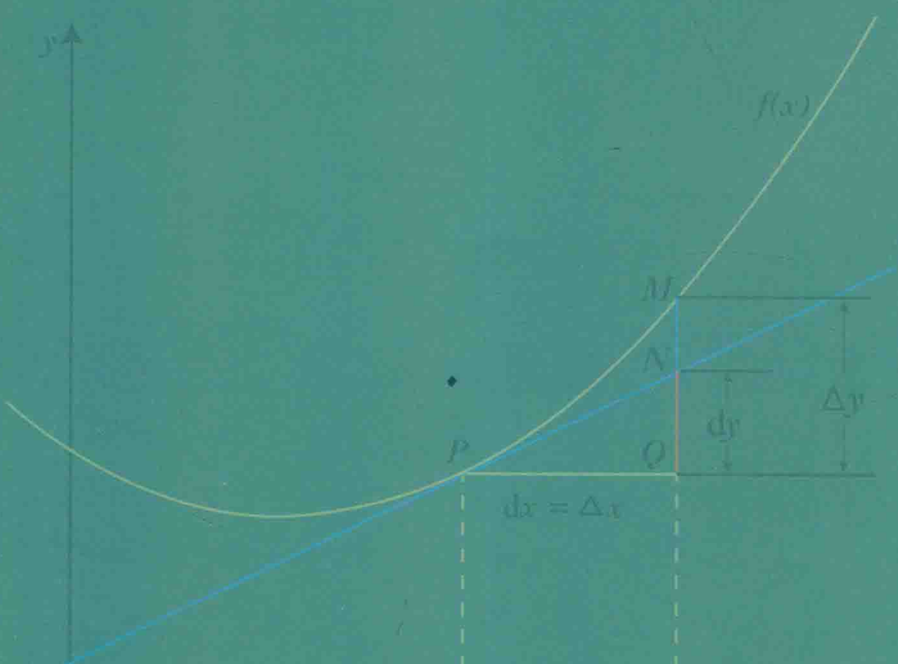
经济应用数学基础（一）

微积分

第四版 学习参考

赵树嫄　胡显佑　陆启良　褚永增 / 编著



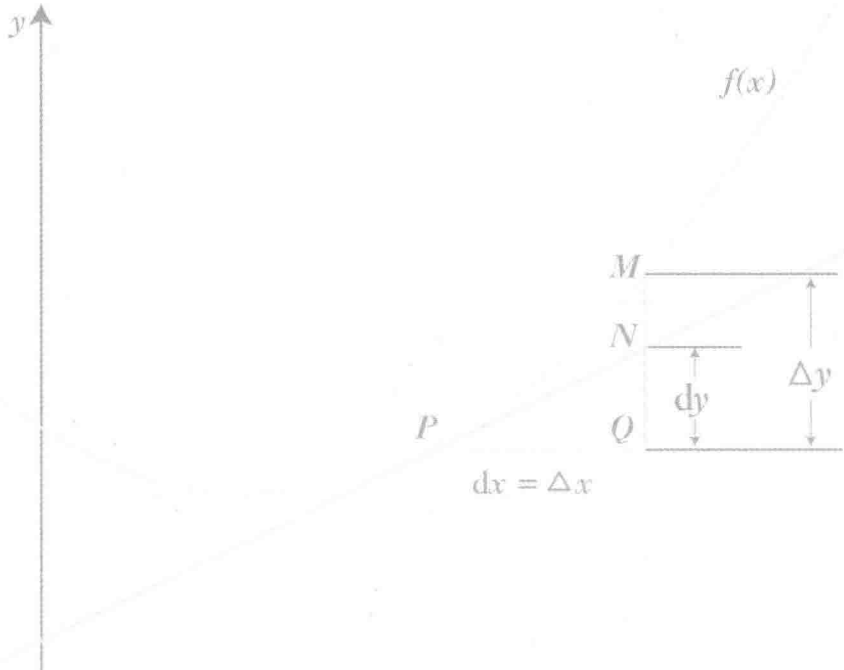
中国人民大学出版社

经济应用数学基础（一）

微积分

第四版 学习参考

赵树嫄　胡显佑　陆启良　褚永增 / 编著



中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目（CIP）数据

微积分（第四版）学习参考/赵树嫄等编著．—北京：中国人民大学出版社，2018.7
（经济应用数学基础）
ISBN 978-7-300-25851-5

Ⅰ．①微… Ⅱ．①赵… Ⅲ．①微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第114814号

经济应用数学基础（一）
微积分（第四版）学习参考
赵树嫄　胡显佑
陆启良　褚永增　编著
Weijifen (Di-si Ban) Xuexi Cankao

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	中煤（北京）印务有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16开本	**版　　次**	2018年7月第1版
印　　张	27 插页1	**印　　次**	2018年8月第2次印刷
字　　数	637 000	**定　　价**	49.00元

出 版 说 明

由赵树嫄教授主编的“经济应用数学基础”系列教材，30多年来深受广大读者喜爱，发行量极大，影响很广。该套教材的读者既有在校师生，也有很多自学读者。为适应读者学习或参考的需要，我社听取了许多方面的意见和建议，为此教材提供配套的学习辅导和教学参考读物。

为适应公共数学教学形势的发展，我社邀请赵树嫄教授主持对《微积分》第三版的修订工作，推出了第四版。同时，为了满足广大读者尤其是自学读者的学习需要，我们邀请赵树嫄、胡显佑、陆启良、褚永增等老师编写了这本《微积分》(第四版)的学习参考读物，本书是一本教与学的参考书。

这里要特别指出的是，编写、出版学习参考书的目的是使读者更加清晰、准确地把握正确的解题思路和方法，扩大知识面，加深对教材内容的理解，及时纠正在解题中出现的错误，克服在一些习题求解过程中遇到的困难，读者一定要本着对自己负责的态度，先自己做教材中的习题，不要先看解答或抄袭解答，在独立思考、独立解答的基础上，再参考本书，并领会注释中的点评，总结规律、加深对基本概念的理解、提高解题能力。

《微积分(第四版)学习参考》各章内容均分为两部分。

(一) 习题解答与注释

该部分基本上对《微积分》(第四版) 中的习题给出了解答，并结合教与学作了大量注释。通过这些注释，读者可以深刻领会教材中的基本概念的准确含义，开阔解题思路，掌握解题方法，避免在容易发生错误的环节上出现问题，从而提高解题能力，培养良好的数学思维。

(二) 参考题 (附解答)

该部分编写了一些难度略大且有参考意义的题目，目的是给愿意多学一些、多练一些的学生及准备考研的读者提供一些自学材料，也为教师在复习、考试等环节的命题工作提供一些参考资料。

本书给出了较多的单项选择题。单项选择题是答案唯一且不要求考核推理步骤的题型，因此，不论用什么方法 (诸如排除法、图形法、计算法、逐项检查法，等等)，只

要能找出正确选项即可。在必须使用逐项检查法时，只要检查到符合题目要求的选项，就可得出答案，停止检查，不必将所有选项全部检查完。但是选择题的各个选项恰恰是概念模糊不易辨别的内容或计算容易出错的环节，恰恰是需要读者搞清楚的问题，所以本书作为辅导书，在使用逐项检查法时，对四个选项均做了探讨，目的是使读者不仅能解答这个题目，而且能对这个题目有更全面、更准确的认识，通过总结规律，提高知识水平与解题技能。必须提醒读者，在参加考试时，一旦辨别出所要求的选项，即可停止探讨，不必继续往下讨论，以免浪费考试时间。

本书是我社出版的《微积分》(第四版）的配套参考书，但它本身独立成书，选用其他微积分教材的读者也可以选做参考书，同时也适合自学读者或准备考研的读者作为自学和练习的读物。

由于多方面原因，书中不妥之处在所难免，我们衷心欢迎广大读者批评指正。

中国人民大学出版社

2018 年 4 月

目　　录

第一章　函　　数

(一)习题解答与注释

(A)

1. 按下列要求举例：

(1) 一个有限集合

(2) 一个无限集合

(3) 一个空集

(4) 一个集合是另一个集合的子集

解： 略.

2. 用集合的描述法表示下列集合：

(1) 大于 5 的所有实数集合

(2) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的根的集合

(3) 圆 $x^2+y^2=25$ 内部(不包括圆周)一切点的集合

(4) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合

解： 下面的 x，y 都是实数.

(1) $\{x \mid x>5\}$

(2) $\{x \mid x^2-7x+12=0\}$

(3) $\{(x, y) \mid x^2+y^2<25\}$

(4) $\{(x, y) \mid y=x^2$ 且 $x-y=0\}$

3. 用列举法表示下列集合：

(1) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的根的集合

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合

(3) 集合$\{x \mid |x-1| \leqslant 5$，$x$ 为整数$\}$

解： (1) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的根为 $x=3$，$x=4$，故方程 $x^2-7x+12=0$ 的根的集合为 $\{3, 4\}$.

(2) 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 的交点，得$(0, 0)$，$(1, 1)$，故抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合为 $\{(0, 0), (1, 1)\}$.

(3) $|x-1| \leqslant 5$，即 $-5 \leqslant x-1 \leqslant 5$，也就是 $-4 \leqslant x \leqslant 6$. 由于 x 为整数，故集合 $\{x \mid |x-1| \leqslant 5$，$x$ 为整数$\}$ 用列举法表示为 $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

4. 写出 $A=\{0, 1, 2\}$ 的一切子集.

解： A 的子集有：$\varnothing$，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0, 1\}$，$\{0, 2\}$，$\{1, 2\}$，$\{0, 1, 2\}$.

注释： 不要忘记空集是任何集合的子集，即 $\varnothing \subset A$；任何集合都是它自身的子集，即 $A \subset A$. 这是因为，如果 $A \subset B$，则有"如果 $x \notin B$，则 $x \notin A$"，对于空集 $\varnothing$ 来说，$x \notin \varnothing$ 永远成立，所以对任何集合 A，都有 $\varnothing \subset A$；根据子集的定义，对任何集合，都有 $A \subset A$.

5. 设 $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{1, 3, 5\}$，$C = \{2, 4, 6\}$，求：

(1) $A \cup B$　　(2) $A \cap B$　　(3) $A \cup B \cup C$

(4) $A \cap B \cap C$　　(5) $A - B$

解： (1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

(2) $A \cap B = \{1, 3\}$

(3) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(4) $A \cap B \cap C = \varnothing$

(5) $A - B = \{2\}$

6. 如果 $A = \{x \mid 3 < x < 5\}$，$B = \{x \mid x > 4\}$，求：

(1) $A \cup B$　　(2) $A \cap B$　　(3) $A - B$

解： (1) $A \cup B = \{x \mid x > 3\}$

(2) $A \cap B = \{x \mid 4 < x < 5\}$

(3) $A - B = \{x \mid 3 < x \leqslant 4\}$

7. 设集合 $A = \{(x, y) \mid x + y - 1 = 0\}$，集合 $B = \{(x, y) \mid x - y + 1 = 0\}$，求 $A \cap B$.

解： $A \cap B = \{(x, y) \mid x + y - 1 = 0 \text{ 且 } x - y + 1 = 0\}$.

解方程组 $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$，得 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$，于是有

$$A \cap B = \{(x, y) \mid x + y - 1 = 0 \text{ 且 } x - y + 1 = 0\} = \{(0, 1)\}$$

8. 如果 $A = \{(x, y) \mid x - y + 2 \geqslant 0\}$

$B = \{(x, y) \mid 2x + 3y - 6 \geqslant 0\}$

$C = \{(x, y) \mid x - 4 \leqslant 0\}$

在坐标平面上标出集合 $A \cap B \cap C$ 的区域.

解： 集合 A 在坐标平面上直线 $x - y + 2 = 0$ 的右下方，包括直线上的点；集合 B 在直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的右上方，包括直线上的点；集合 C 在直线 $x - 4 = 0$ 的左方，包括直线上的点.

因此，集合 $A \cap B \cap C$ 是由三条直线围成的、包括边界在内的、用阴影表示的三角形区域，如图 1—1 所示.

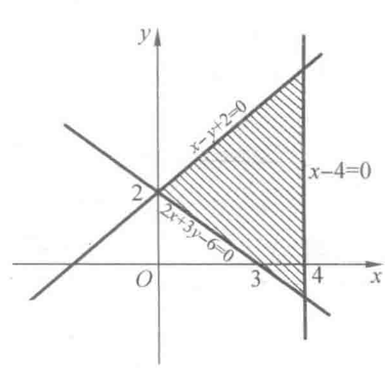


图 1—1

注释： 用下面的方法判断 $Ax + By + C > 0$ (或 < 0) 的解集.

直线 $Ax + By + C = 0$ 将坐标平面分成两个半平面，把原点(0, 0) 代入 $Ax + By + C = 0$，若得 $Ax + By + C > 0$ (或 $<$ 0)，则原点所在的半平面为 $Ax + By + C > 0$ (或 < 0) 的解集，另外一个半平面为 $Ax + By + C < 0$ (或 > 0) 的解集. 不等式为"$<$"或"$>$"时不包括直线上的点，不等式为"$\leqslant$"或"$\geqslant$"时包括直线

上的点. 若直线过原点，另选其他点检验.

9. 设全集$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{2, 4, 6\}$，求：

(1) $\overline{A}$ (2) $\overline{B}$ (3) $\overline{A}\cup\overline{B}$ (4) $\overline{A}\cap\overline{B}$

解：(1) $\overline{A}=\{4, 5, 6\}$

(2) $\overline{B}=\{1, 3, 5\}$

(3) $\overline{A}\cup\overline{B}=\{1, 3, 4, 5, 6\}$

(4) $\overline{A}\cap\overline{B}=\{5\}$

10. 已知$A=\{a, 2, 3, 4\}$，$B=\{1, 3, 5, b\}$，若$A\cap B=\{1, 2, 3\}$，求a和b.

解：由$A\cap B=\{1, 2, 3\}$可知集合A，B中都必有元素1，2，3，因此可知$a=1$，$b=2$.

11. 用集合的运算律证明：$X\cup\overline{X\cap Y}\cup Y=U$.

证：根据摩根律$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$和结合律$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，得

$$\begin{aligned}X\cup\overline{X\cap Y}\cup Y&=X\cup(\overline{X}\cup\overline{Y})\cup Y\\&=[(X\cup\overline{X})\cup\overline{Y}]\cup Y\\&=(U\cup\overline{Y})\cup Y\\&=U\cup Y=U\end{aligned}$$

12. 如果$A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{a, b, c\}$，求$A\times B$.

解：$A\times B=\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, a), (d, b), (d, c)\}$

13. 如果$X=Y=\{3, 0, 2\}$，求$X\times Y$.

解：$X\times Y=\{(3, 3), (3, 0), (3, 2), (0, 3), (0, 0), (0, 2), (2, 3), (2, 0), (2, 2)\}$

14. 设集合$A=\{$北京，上海$\}$，$B=\{$南京，广州，深圳$\}$，求$A\times B$与$B\times A$.

解：$A\times B=\{$(北京，南京)，(北京，广州)，(北京，深圳)，(上海，南京)，(上海，广州)，(上海，深圳)$\}$

$B\times A=\{$(南京，北京)，(南京，上海)，(广州，北京)，(广州，上海)，(深圳，北京)，(深圳，上海)$\}$

15. 设集合$X=\{x_1, x_2, x_3\}$，$Y=\{y_1, y_2\}$，$Z=\{z_1, z_2\}$，求$X\times Y\times Z$.

解：$X\times Y\times Z=\{(x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_2), (x_1, y_2, z_1), (x_1, y_2, z_2), (x_2, y_1, z_1), (x_2, y_1, z_2), (x_2, y_2, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_1, z_1), (x_3, y_1, z_2), (x_3, y_2, z_1), (x_3, y_2, z_2)\}$

16. 解下列不等式：

(1) $x^2<9$ (2) $|x-4|<7$ (3) $0<(x-2)^2<4$

(4) $|ax-x_0|<\delta$ ($a>0$，$\delta>0$，x_0为常数)

解：(1) $x^2<9$，即$|x|<3$，所以有$-3<x<3$.

(2) $|x-4|<7$，即$-7<x-4<7$，所以有$-3<x<11$.

(3) $0<(x-2)^2<4$，即$(x-2)^2<4$且$(x-2)^2>0$，那么有$|x-2|<2$且$x\neq 2$，也就是$-2<x-2<2$且$x\neq 2$，即$0<x<4$且$x\neq 2$.

(4) $|ax-x_0|<\delta$，即$-\delta<ax-x_0<\delta$，也即$x_0-\delta<ax<x_0+\delta$，又因为$a>0$，

所以有 $\frac{x_0-\delta}{a}<x<\frac{x_0+\delta}{a}$.

17. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合：

(1) $|x|\leqslant 3$ (2) $|x-2|\leqslant 1$

(3) $|x-a|<\varepsilon$ (a 为常数，$\varepsilon>0$)

(4) $|x|\geqslant 5$ (5) $|x+1|>2$

解：(1) 由 $|x|\leqslant 3$，有 $-3\leqslant x\leqslant 3$，故 $x\in[-3,3]$.

(2) 由 $|x-2|\leqslant 1$，有 $-1\leqslant x-2\leqslant 1$，即 $1\leqslant x\leqslant 3$，故 $x\in[1,3]$.

(3) 由 $|x-a|<\varepsilon$，有 $-\varepsilon<x-a<\varepsilon$，即 $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$，故$x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$.

(4) 由 $|x|\geqslant 5$，有 $x\leqslant -5$ 或 $x\geqslant 5$，即 $x\in(-\infty,-5]\cup[5,+\infty)$.

(5) 由 $|x+1|>2$，有 $x+1<-2$ 或 $x+1>2$，也就是 $x<-3$ 或 $x>1$，即 $x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$.

18. 用区间表示下列实数集合：

(1) $I_1=\{x\mid |x+3|<2\}$

(2) $I_2=\{x\mid 1<|x-2|<3\}$

(3) $I_3=\{x\mid |x-2|<|x+3|\}$

解：(1) 由 $|x+3|<2$，有 $-2<x+3<2$，也就是 $-5<x<-1$，即$x\in(-5,-1)$，于是可得 $I_1=(-5,-1)$.

(2) 由 $|x-2|<3$，有 $-3<x-2<3$，即 $-1<x<5$；由 $|x-2|>1$，有 $x-2>1$ 或 $x-2<-1$，即 $x>3$ 或 $x<1$，那么有 $-1<x<1$ 或 $3<x<5$，即 $x\in(-1,1)\cup(3,5)$，于是可得：$I_2=(-1,1)\cup(3,5)$.

(3) 由 $|x-2|<|x+3|$ 可得

$$x+3>|x-2| \quad ①$$

或

$$x+3<-|x-2| \quad ②$$

由式①有 $\begin{cases}x-2<x+3\\ x-2>-x-3\end{cases}$，可得 $x>-\frac{1}{2}$；

由式②有 $|x-2|<-x-3$，即 $\begin{cases}x-2<-3-x\\ x-2>x+3\end{cases}$，无解.

故 $|x-2|<|x+3|$ 的解集为 $x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$，于是可得 $I_3=\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

注释：第 18 题(3) 亦可采用如下解法：

$|x-2|<|x+3|$，即 $\sqrt{(x-2)^2}<\sqrt{(x+3)^2}$，那么有：$(x-2)^2<(x+3)^2$. 化简得 $10x>-5$，所以 $x>-\frac{1}{2}$，即 $x\in(-\frac{1}{2},+\infty)$.

注释：解绝对值不等式时要设法去掉绝对值符号，主要常用的是绝对值的定义与性质，当 $a>0$ 时，$|x|<a\Longleftrightarrow -a<x<a$，$|x|>a\Longleftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$. 有时也可用不等式两边平方.

19. 下列给出的关系是不是函数关系？

(1) $y=\sqrt{-x}$　　(2) $y=\lg(-x^2)$

(3) $y=\sqrt{-x^2-1}$　　(4) $y=\sqrt{-x^2+1}$

(5) $y=\arcsin(x^2+2)$　　(6) $y^2=x+1$

解: (1) $y=\sqrt{-x}$

$-x\geqslant 0$，即 $x\leqslant 0$，所以 $y=\sqrt{-x}$ 是定义域 $(-\infty, 0]$ 上的函数关系.

(2) $y=\lg(-x^2)$

对数的真数要求大于零，但 $-x^2\leqslant 0$，所以 $y=\lg(-x^2)$ 不是函数关系.

(3) $y=\sqrt{-x^2-1}$

偶次根号下要求大于等于零，但 $-x^2-1=-(x^2+1)<0$，所以 $y=\sqrt{-x^2-1}$ 不是函数关系.

(4) $y=\sqrt{-x^2+1}$

$-x^2+1\geqslant 0$，$x^2\leqslant 1$，$|x|\leqslant 1$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，所以 $y=\sqrt{-x^2+1}$ 是定义域 $[-1, 1]$ 上的函数关系.

(5) $y=\arcsin(x^2+2)$

反正弦函数要求 $|x^2+2|\leqslant 1$，但 $|x^2+2|>1$，所以 $y=\arcsin(x^2+2)$ 不是函数关系.

(6) $y^2=x+1$

$y=\pm\sqrt{x+1}$，$x+1\geqslant 0$，$x\geqslant -1$. 对于 $x\in[-1, +\infty)$ 中的每一个 x 值，变量 y 都有两个值与之对应，所以 $y^2=x+1$ 不是(单值) 函数关系.

注释: 讨论给定关系是不是函数关系，要看下列两点:

(ⅰ) 定义域非空;

(ⅱ) 对应规则能使定义域中每一个自变量的值都有唯一确定的因变量的实数值与之对应.

20. 下列给出的各对函数是不是相同的函数?

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$

(2) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$

(3) $y=\sqrt{x^2(1-x)}$ 与 $y=x\sqrt{1-x}$

(4) $y=\sqrt[3]{x^3(1-x)}$ 与 $y=x\sqrt[3]{1-x}$

(5) $y=\sqrt{x(x-1)}$ 与 $y=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$

(6) $y=\sqrt{x(1-x)}$ 与 $y=\sqrt{x}\sqrt{1-x}$

解: (1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域要求 $x\neq 1$，即定义域为 $(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$，$y=x+1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，故二者不是相同的函数.

(2) $y=\lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，$y=2\lg x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$，故二者不是相同的函数.

(3) $y=\sqrt{x^2(1-x)}$ 的定义域为 $(-\infty, 1]$，$y=x\sqrt{1-x}$ 的定义域为 $(-\infty, 1]$，$y=$

$\sqrt{x^2(1-x)}$ 与 $y=x\sqrt{1-x}$ 的定义域虽然相同，但其对应规则不同，$y=\sqrt{x^2(1-x)}$ 的值域为$[0,+\infty)$，而 $y=x\sqrt{1-x}$ 的值域为$(-\infty,\frac{2\sqrt{3}}{9})$，故二者不是相同的函数.

(4) $y=\sqrt[3]{x^3(1-x)}$ 与 $y=x\sqrt[3]{1-x}$ 的定义域皆为$(-\infty,+\infty)$，且其对应规则相同，故二者是相同的函数.

(5) $y=\sqrt{x(x-1)}$ 的定义域要求满足$\begin{cases}x\geqslant 0\\x-1\geqslant 0\end{cases}$或$\begin{cases}x\leqslant 0\\x-1\leqslant 0\end{cases}$，即$\begin{cases}x\geqslant 0\\x\geqslant 1\end{cases}$或$\begin{cases}x\leqslant 0\\x\leqslant 1\end{cases}$，亦即 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant 0$. 因此，$y=\sqrt{x(x-1)}$ 的定义域为$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$；而 $y=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$ 的定义域要求满足$\begin{cases}x\geqslant 0\\x-1\geqslant 0\end{cases}$，即$x\geqslant 1$，因此，$y=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$ 的定义域为$[1,+\infty)$，所以二者不是相同的函数.

(6) $y=\sqrt{x(1-x)}$ 的定义域要求满足$\begin{cases}x\geqslant 0\\1-x\geqslant 0\end{cases}$或$\begin{cases}x\leqslant 0\\1-x\leqslant 0\end{cases}$，即$\begin{cases}x\geqslant 0\\x\leqslant 1\end{cases}$或$\begin{cases}x\leqslant 0\\x\geqslant 1\end{cases}$，亦即 $0\leqslant x\leqslant 1$. 因此，$y=\sqrt{x(1-x)}$ 的定义域为$[0,1]$，$y=\sqrt{x}\sqrt{1-x}$ 的定义域为$[0,1]$，二者对应规则亦相同，故二者是相同的函数.

注释：函数的两要素是定义域与对应规则，只有两要素均相同的函数，才是相同的函数，判别两函数是否相同就从这两方面着手：

(ⅰ) 验证定义域是否相同；

(ⅱ) 判别对应规则是否一致.

仅当二者完全相同时，两函数才是相同的函数.

相同函数的定义域相同且对应规则相同，而对应规则相同则值域肯定相同，因为对应规则相同就表现在相同的自变量的值对应相同的函数值上. 因此，如果值域不同，则对应规则肯定不同. 在判别两函数的对应规则是否相同时，能由值域不同得出对应规则不同的结论. 但值域相同，对应规则不一定相同. 例如 $y=x^2$ 与 $y=x^4$，定义域皆为$(-\infty,+\infty)$，值域皆为$[0,+\infty)$，但对应规则不同，所以，不能用值域相同来说明对应规则相同.

21. 已知 $f(x)=x^2-3x+2$，求：$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(-x)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$ $(x\neq 0)$，$f(x+1)$.

解：$f(0)=2$，$f(1)=0$，$f(2)=0$，$f(-x)=x^2+3x+2$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+2\quad(x\neq 0)$$

$$f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+2=x^2-x$$

22. 设 $f(x)=\frac{x}{1-x}$，求：$f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$.

解：$f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{1-f(x)}=\dfrac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\dfrac{x}{1-2x}$

$$f\{f[f(x)]\} = \frac{f[f(x)]}{1-f[f(x)]} = \frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}} = \frac{x}{1-3x}$$

23. 如果 $f(x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$，证明 $f(-x) = -f(x)$.（e 是一个常数，它是无理数，$e \approx 2.71828$.）

证：$f(-x) = \frac{e^{x}-1}{e^{x}+1} = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = -\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = -f(x)$

24. 如果 $f(x) = \frac{1-x^2}{\cos x}$，证明 $f(-x) = f(x)$.

证：$f(-x) = \frac{1-(-x)^2}{\cos(-x)} = \frac{1-x^2}{\cos x} = f(x)$

25. 如果 $f(x) = a^x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$，证明：

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y), \quad \frac{f(x)}{f(y)} = f(x-y)$$

证：$f(x) \cdot f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y} = f(x+y)$

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = f(x-y)$$

26. 如果 $f(x) = \log_a x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$，证明：

$$f(x) + f(y) = f(xy), \quad f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

证：$f(x) + f(y) = \log_a x + \log_a y = \log_a(xy) = f(xy)$

$$f(x) - f(y) = \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

27. 确定下列函数的定义域：

(1) $y = \sqrt{9-x^2}$　　(2) $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$

(3) $y = \frac{-5}{x^2+4}$　　(4) $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$

(5) $y = 1 - 2^{1-x^2}$　　(6) $y = \frac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$

(7) $y = \sqrt{\lg \frac{5x-x^2}{4}}$　　(8) $y = \frac{\arccos \frac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$

(9) $y = \lg[\lg(\lg x)]$

解：(1) $9-x^2 \geqslant 0$，即 $x^2 \leqslant 9$，$|x| \leqslant 3$，所以函数定义域为$[-3, 3]$.

(2) $\begin{cases} 1-x^2 \neq 0 \\ x+2 \geqslant 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \geqslant -2 \end{cases}$，所以函数定义域为$[-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(3) $x^2 + 4 \neq 0$，x 可取任意实数，所以函数定义域为$(-\infty, +\infty)$.

(4) $\left|\frac{x-1}{2}\right| \leqslant 1$，即$-1 \leqslant \frac{x-1}{2} \leqslant 1$，亦即$-2 \leqslant x-1 \leqslant 2$，因此有$-1 \leqslant x \leqslant 3$，所以函数定义域为$[-1, 3]$.

(5) x 可取任意实数，所以函数定义域为$(-\infty, +\infty)$.

(6) $\begin{cases} 3-x>0 \\ |x|-1>0 \end{cases}$，即$\begin{cases} x<3 \\ x<-1 \text{ 或 } x>1 \end{cases}$，所以函数定义域为$(-\infty, -1) \cup (1, 3)$.

(7) $\lg \frac{5x-x^2}{4} \geqslant 0$，即$\frac{5x-x^2}{4} \geqslant 1$，即$x^2-5x+4 \leqslant 0$，即$(x-1)(x-4) \leqslant 0$. 只要$\begin{cases} x-1 \leqslant 0 \\ x-4 \geqslant 0 \end{cases}$或$\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ x-4 \leqslant 0 \end{cases}$，即$\begin{cases} x \leqslant 1 \\ x \geqslant 4 \end{cases}$或$\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \leqslant 4 \end{cases}$，因此有 $1 \leqslant x \leqslant 4$，所以函数定义域为$[1, 4]$.

(8) $\begin{cases} \left|\frac{2x-1}{7}\right| \leqslant 1 \\ x^2-x-6>0 \end{cases}$，即$\begin{cases} |2x-1| \leqslant 7 & \text{①} \\ (x+2)(x-3)>0 & \text{②} \end{cases}$.

由式 ① 有 $-7 \leqslant 2x-1 \leqslant 7$，即$-6 \leqslant 2x \leqslant 8$，即$-3 \leqslant x \leqslant 4$.

由式 ② 有$\begin{cases} x+2>0 \\ x-3>0 \end{cases}$或$\begin{cases} x+2<0 \\ x-3<0 \end{cases}$，即$\begin{cases} x>-2 \\ x>3 \end{cases}$或$\begin{cases} x<-2 \\ x<3 \end{cases}$，只要$x>3$或$x<-2$.

因此有$\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 4 \\ x<-2 \text{ 或 } x>3 \end{cases}$，即$-3 \leqslant x<-2$ 或 $3<x \leqslant 4$，所以函数定义域为$[-3, -2) \cup (3, 4]$.

(9) $\begin{cases} x>0 \\ \lg x>0 \\ \lg(\lg x)>0 \end{cases}$，即$\begin{cases} x>0 \\ x>1 \\ \lg x>1 \end{cases}$，亦即$\begin{cases} x>0 \\ x>1 \\ x>10 \end{cases}$，所以函数定义域为$(10, +\infty)$.

注释： 对应规则由公式表示的函数的自然定义域是使因变量有唯一确定实数值与之对应的全体自变量数值的集合，求函数定义域要考虑：

(ⅰ) 分式的分母不等于零；

(ⅱ) 负数不能开偶次方；

(ⅲ) 对数的真数大于零；

(ⅳ) 正切函数的定义域 $x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \cdots)$；

(ⅴ) 余切函数的定义域 $x \neq k\pi$ $(k=0, \pm 1, \cdots)$；

(ⅵ) 反正弦函数$(\arcsin x)$和反余弦函数$(\arccos x)$要求$|x| \leqslant 1$.

注释： 函数的运算仅在相同的区域内才能进行，因此如果函数表达式由若干项代数和、差、积组成，则其定义域是各项定义区间的交集.

复合函数的定义域:根据基本初等函数的定义域列出满足复合函数表达式中各部分要求的不等式组，解不等式组即可得到复合函数的定义域.

28. 如果函数 $f(x)$ 的定义域为$(-1, 0)$，求函数 $f(x^2-1)$ 的定义域.

解：因 $f(x)$ 的定义域为$(-1, 0)$，那么 $f(x^2-1)$ 的定义域要求满足 $-1 < x^2-1 < 0$，即 $0 < x^2 < 1$，因此有 $|x| < 1$ 且 $x \neq 0$，故$f(x^2-1)$ 的定义域为$(-1, 0) \cup (0, 1)$.

注释：设函数 $f(x)$ 的定义域为$[a, b]$，则 $f[\varphi(x)]$ 的定义域满足 $a \leqslant \varphi(x) \leqslant b$，从中解出 x，即得出 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

29. 确定下列函数的定义域，并作出函数的图形.

(1) $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ 1, & x<0\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x| \leqslant 1\\ x-1, & 1<|x|<2\end{cases}$

解：(1) $f(x)$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$，图形如图 1—2 所示.

(2) $f(x)$ 的定义域为$(-2, 2)$，图形如图 1—3 所示.

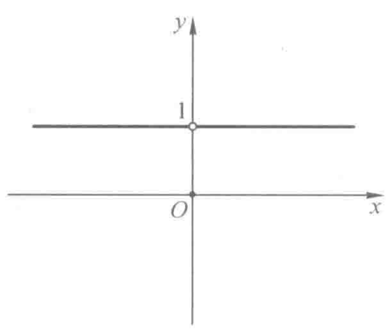


图 1—2

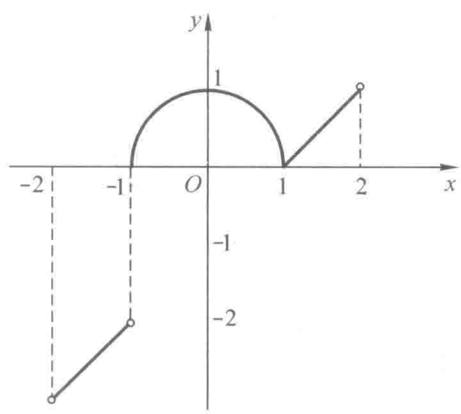


图 1—3

注释：对应于不同的区间，函数有不同的表达式，这样的函数称为分段函数. 分段函数表示一个函数而不是几个函数，分段函数的定义域是各分段区间的定义区间的并集.

30. 设 $f(x)=\begin{cases}x+3, & x \geqslant 1\\ x^2-1, & x<1\end{cases}$，求：$f(0)$，$f(2)$，$f(x-1)$.

解：$f(0)=-1$，$f(2)=5$

$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+3, & x-1 \geqslant 1\\ (x-1)^2-1, & x-1<1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x+2, & x \geqslant 2\\ x^2-2x, & x<2\end{cases}$$

31. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$，求：$f(x+1)$，$f(x^2-1)$.

解：$f(x+1)=\begin{cases}1, & x+1<0\\ 0, & x+1=0\\ 1, & x+1>0\end{cases}$

$=\begin{cases}1 & x<-1\\ 0, & x=-1\\ 1, & x>-1\end{cases}$

$f(x^2-1)=\begin{cases}1, & x^2-1<0\\ 0, & x^2-1=0\\ 1, & x^2-1>0\end{cases}$

$=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

32. 设 $\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求 $\varphi(x)$.

解：令 $t=x+1$，则 $x=t-1$.

$\varphi(t)=\begin{cases}(t-1)^2, & 0\leqslant t-1\leqslant 1\\ 2(t-1), & 1<t-1\leqslant 2\end{cases}$

$=\begin{cases}(t-1)^2, & 1\leqslant t\leqslant 2\\ 2(t-1), & 2<t\leqslant 3\end{cases}$

即 $\varphi(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 3\end{cases}$

注释：由 $f(x)$ 的表达式求 $f[\varphi(x)]$ 的表达式时将 $\varphi(x)$ 代入 $f(x)$ 的表达式中所有的 x 处，整理一下即可，注意不要忽略了定义区间的变化. 由 $f[\varphi(x)]$ 的表达式求 $f(x)$，令 $t=\varphi(x)$. 解出 $x=\varphi^{-1}(t)$，代入 $f[\varphi(t)]$ 中可得出 $f(t)$ 的表达式，然后利用"函数关系与用什么字母表示无关"，将 $f(t)$ 中所有的 t 改为 x，即可得出 $f(x)$ 的表达式.

33. 将函数 $y=5-|2x-1|$ 用分段形式表示，并作出函数图形.

解：当 $2x-1\geqslant 0$ 时，$|2x-1|=2x-1$；当 $2x-1<0$ 时，$|2x-1|=1-2x$. 所以有 $y=\begin{cases}5-2x+1, & 2x-1\geqslant 0\\ 5+2x-1, & 2x-1<0\end{cases}$

$=\begin{cases}6-2x, & x\geqslant \dfrac{1}{2}\\ 4+2x, & x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$

函数图形如图 1—4 所示.

34. 作 $x^2+(y-3)^2=1$ 的图形，并求出两个 y 是 x 的函数的单值支的显函数关系.

解：$x^2+(y-3)^2=1$，即 $(x-0)^2+(y-3)^2=1^2$，其图形是以 $(0, 3)$ 为圆心，以 1 为半径的圆周，如图 1—5 所示.