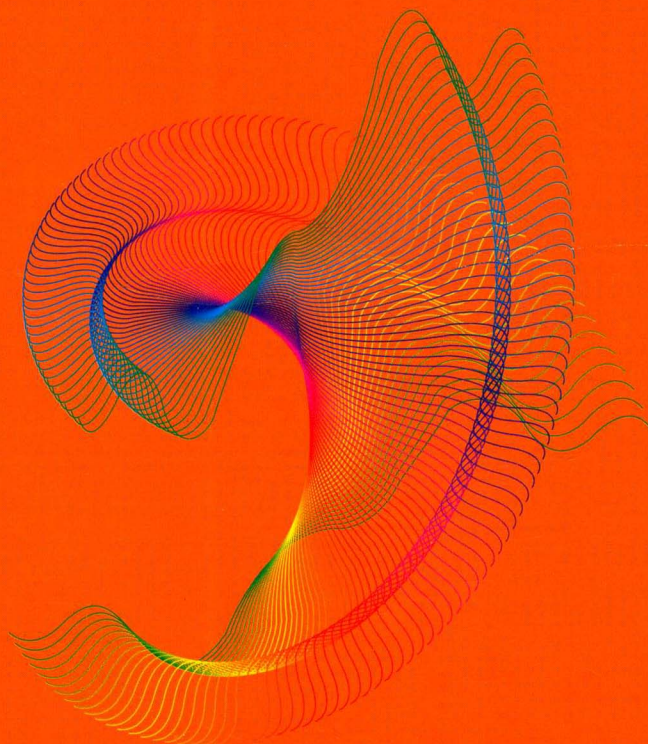


大学生 *D*axuesheng
shuxue jingsai zhinan

数学竞赛指南

主编 王婷婷



陕西师范大学出版总社

大学生数学竞赛指南

主编 王婷婷

参编 刘 帅 杨小锋

王婷婷 姜颖钊

陕西师范大学出版总社

图书代号 JC17N1066

图书在版编目(CIP)数据

大学生数学竞赛指南 / 王婷婷主编. —西安:陕西师范大学出版总社有限公司, 2017.9

ISBN 978-7-5613-9509-7

I. ①大… II. ①王… III. ①高等数学—高等学校—
教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 219495 号

大学生数学竞赛指南

王婷婷 主编

责任编辑 叶向东 刘佳
责任校对 裴黎黎 张微
封面设计 鼎新设计
出版发行 陕西师范大学出版总社
(西安市长安南路 199 号 邮编 710062)
网 址 <http://www.snupg.com>
经 销 新华书店
印 刷 兴平市博闻印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 15
字 数 350 千
版 次 2017 年 9 月第 1 版
印 次 2017 年 9 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5613-9509-7
定 价 36.00 元

读者购书、书店添货如发现印刷装订问题,请与本社高教出版社联系调换.

电 话:(029)85303622(传真) 85307826

序

2009年10月至今,中国数学会普及工作委员会已成功举办了8届全国大学生数学竞赛.该项竞赛在各方面都取得了良好的反响.首先是参加竞赛的院校和学生人数,逐年递增的速度远远地超出始料;其次是各省、市、区对竞赛的组织系统而严密,工作的同志是高度负责的.一些参赛的学生赛后反映说,赛题比预料的容易些、简单些,但又不是仅凭模仿解过习题的方法而易于解出的.一些指导教师反映,赛题与课内教学结合得较为紧密,从赛题的解法上说,需要参赛学生具有灵活运用所学基础知识的能力和技巧.

分析良好反响的原因,首先在于举办全国大学生数学竞赛的宗旨:“激发大学生学习数学的兴趣,培养数学科学素质,提高大学数学教学水平,推动教学改革,发现和选拔数学创新人才.”通过竞赛,我们可以发现有特殊数学才能、对数学有浓厚兴趣的学生,给予一定的培养,将其作为研究数学的后备力量.这对于高等院校理工科的教学发展是绝对有推动作用的.其次随着竞赛的规模越来越大,越来越多的院校的教师和学生参与其中,仅陕西省每年就有近30所高校1万多名本科生参加这项竞赛.这就形成很多院校也积极地组织赛前培训,以达到提高预赛成绩获得决赛奖项的目的.基于以上情况,我一直想为参加全国大学生数学竞赛的学生推荐一本好的参考书,可惜没有看到非常理想的.直到今年,看到这本《大学生数学竞赛指南》,我觉得内容很适合参加比赛的本科生复习使用.这本书是西北农林科技大学理学院应用数学系应用数学教研室主任王婷婷副教授根据各方面对竞赛的反映,并鉴于目前高等数学教育之所需,策划编写的一套既可供开展高等院校数学课外活动参考,也可供高等数学教师与学生参加数学竞赛使用的辅助读物.

这本《指南》适用于赛前突击,也适合平日总结提高.本书以高等数学课程大纲为基础,根据其主要内容整理编排,共分为6章,分别是函数与极限、导数

与微分、积分学、微分方程、无穷级数和向量代数与空间解析几何. 每章中有 4 个部分: 第一部分, 基础知识点. 总结本章中需要掌握的知识点大纲, 读者可以逐条对照, 检测自己整个知识内容体系的掌握程度. 第二部分, 考点解析. 内容涵盖了高等数学配套教材的知识点, 由浅入深, 由易到难, 依次详细叙述. 这部分内容, 不仅提供给学生对课内所学知识再现和复习的机会, 还可使他们对知识深入领悟和理解, 建构系统性认知, 这样对后面接下来的例题讲解就能更好地衔接. 本书的使用人群主要是一些二年级及以上各专业的本科生. 由于院校、年级和专业的不同, 这些学生的基础知识掌握的程度也不一样, 书中给出了相对详细的高等数学内容重述, 且加入了全国大学生数学竞赛和全国硕士研究生入学统一考试中高等数学的内容, 可令学生更为全面、高效地进行赛前复习. 第三部分, 例题详解. 这部分主要针对第一届至第八届的竞赛真题以及一些考研题目做分析详解, 所有的题目对照着相应章节知识点; 对技巧性较强的题目, 不但有解题分析, 而且有解后评注, 起到既广开思路, 又反思总结的作用. 第四部分, 练习题. 配置练习模拟题, 同学们可以进行强化训练. 值得注意的是, 《指南》还收录了 2010~2017 年共 8 届的全国大学生数学竞赛决赛真题. 可以说本书是至今最为全面的一本竞赛指导参考书.

综上所述, 我认为这本《大学生数学竞赛指南》非常适合作为全国本科生竞赛、考研的参考书目. 同时, 对于本书的即将出版, 我向编者表示祝贺.

张文鹏

2017 年 9 月 3 日

前 言

本书是与《全国大学生数学竞赛预赛(非数学类)竞赛大纲》紧密配套的学习辅导书,旨在指导参赛学生的数学竞赛学习,提升数学竞赛技能.

自2009年10月中国数学会普及工作委员会举办首届全国大学生数学竞赛,至今该竞赛已成功举办了8届.这项全国性高水平学科竞赛极大地激发了大学生学习数学的兴趣,对培养数学科学素质,提高大学数学教学水平,推动教学改革,发现和选拔数学创新人才起着重要的作用.

全国大学生数学竞赛预赛(非数学类)的知识内容主要为高等数学.对于学习高等数学课程的学生来说,不仅要掌握微积分的基本概念、基本理论和基本方法,更要通过学习,培养熟练的运算能力和运用数学知识分析和解决问题的能力.高等数学是高等院校极其重要的一门基础课,是几乎所有理工科专业后继课程的基础,在培养具有良好素养的数学及其应用人才方面起着非常重要的作用,而且满足学有余力的学生学习数学的愿望,发展他们的数学才能.因此,“全国大学生数学竞赛”吸引力极强,全国众多高校的本科生和青年教师积极参与、踊跃投入,每年参赛数万人.随着大学生数学竞赛被越来越多的院校教师、学生所重视,我们不断地收到反馈意见——希望能够有一本更加适合同学们赛前强化复习的配套参考书.正是广大学生的这一要求,促使我们编写了这本《大学生数学竞赛指南》.

本书由西北农林科技大学理学院王婷婷副教授主编,内容主要针对全国大学生数学竞赛预赛(非数学专业),对基础知识点、竞赛考点一一分析,并给出例题详解.例题主要取材于往年竞赛初赛和决赛的试题,并且收集了一些典型的或自编的问题.为方便读者学习掌握解题的方法技巧及知识点的精髓,全书分为6章,分别是函数与极限、导数与微分、积分学、微分方程、无穷级数和向量代数与空间解析几何.书中各章节的编写不同于日常教材内容的次序,覆盖了教材的所有内容,且对适用于不同题型较为通用的方法着力侧重,从而使结论更具有普遍意义.

在选材和指导方面,本书精心设计,深入浅出.比如,数论学科的研究与数学竞赛的发展之间都一直有着密不可分的联系.许多竞赛题目和数论题目有着异曲同工之处,它们都看似很简单,可是入手时却有一种无处下手的感觉.

其原因就在于这类题目既考查做题人知识基础的牢固程度,又充满了技巧性,与我们平日的期末考试完全不同.期末考试考查的往往是单一知识点,而竞赛中的题目则更注重多个知识点之间的综合应用.譬如求极限的题目,教学大纲要求我们掌握基本的求极限的方法,相信很多同学都能够掌握一些常用方法,例如洛必达法则、等价无穷小的替换等;但是竞赛类的题目技巧性、综合性强,要求学生对解题方法不仅要掌握,更要熟练应用.同学们在看真题、例题的时候,就会发现竞赛中如果遇到求极限的题目,绝不可能只用洛必达法则就能解决,而是需要对所求的式子进行各种变形,多种方法相互作用才能达到效果.所以我们在编写过程中,除了对基础知识的复习之外,更加注重分析题目的思路 and 技巧,使同学们在解答基础题目时就进行能力提升,对知识的掌握也就更加深入.这方面我们采取的策略是对问题的分析和解题后的评注.

我们发现该项竞赛面对全国各院校专业、各年级同学,这样凸现的问题就是参赛考生对基础知识的掌握程度相差很大.所以在编写过程中,我们在每章第一部分给出了基础知识点的掌握要求,便于不同基础的学生在备赛的时候能够有针对性的复习,节省时间,有的放矢.每章第二部分,由西北农林科技大学理学院教师刘帅副教授、杨小锋博士精心编写整理,详尽介绍、总结了《高等数学》上、下册的主要内容,也便于同学们在平时学习高等数学课程的时候,就可以全面复习提高,对知识点逐个扫盲,系统性的复习高等数学课程的内容.每章第三部分,编者整理编写了全国大学生数学竞赛的真题和一些考研题目,并给出了其分析和解法.事实上,有一些例题的解法并不唯一,我们也未能一一罗列,且我们给出的解法也不一定就是最好的或者最简便的.对于一些例题,希望读者在阅读过程中,能够自己先试着做,然后再对照例题解法,这有助于学生对数学知识的融会贯通,快速提高自己的解题能力.在每章最后配套了练习模拟题,并在书后备有参考答案,供大家自测、练习.本书还收录了2010~2017年共8届的全国大学生数学竞赛决赛真题与答案,并将《竞赛大纲》附于书后.可以说本书是一本最为全面的竞赛指导参考书.

在本书的编写过程中,“全国大学生数学竞赛”陕西赛区负责人、西北大学数学学院张文鹏教授向我们提供了很多非常有益的意见和建议,并特为本书写了《序》,这是对我们的极大鼓励,在此,对张教授深表敬意和感谢.尽管我们竭尽全力,但由于水平有限,书中难免存在不妥、错误之处,恳请广大读者给予宝贵的批评和建议,以便我们在下一版中进行改进.

编者

2017年9月10日

目 录

第 1 章	函数与极限	
	一、基础知识点	(1)
	二、考点解析	(1)
	三、例题详解	(8)
	四、练习题	(21)
第 2 章	导数与微分	
	一、基础知识点	(23)
	二、考点解析	(24)
	三、例题详解	(39)
	四、练习题	(57)
第 3 章	积分学	
	一、基础知识点	(59)
	二、考点解析	(60)
	三、例题详解	(84)
	四、练习题	(106)
第 4 章	微分方程	
	一、基础知识点	(111)
	二、考点解析	(111)

	三、例题详解	(119)
	四、练习题	(129)
第 5 章	无穷级数	
	一、基础知识点	(131)
	二、考点解析	(131)
	三、例题详解	(142)
	四、练习题	(156)
第 6 章	向量代数与空间解析几何	
	一、基础知识点	(159)
	二、考点解析	(159)
	三、例题详解	(168)
	四、练习题	(173)
历届决赛真题		
	第一届全国大学生数学竞赛决赛试题	(174)
	第二届全国大学生数学竞赛决赛试题	(175)
	第三届全国大学生数学竞赛决赛试题	(176)
	第四届全国大学生数学竞赛决赛试题	(177)
	第五届全国大学生数学竞赛决赛试题	(178)
	第六届全国大学生数学竞赛决赛试题	(180)
	第七届全国大学生数学竞赛决赛试题	(182)
	第八届全国大学生数学竞赛决赛试题	(183)
练习题参考答案		
	第 1 章	(185)
	第 2 章	(186)

第3章	(188)
第4章	(191)
第5章	(192)
第6章	(193)

历届决赛真题参考答案

第一届	(194)
第二届	(199)
第三届	(203)
第四届	(208)
第五届	(212)
第六届	(216)
第七届	(219)
第八届	(223)

附

全国大学生数学竞赛(预赛非数学类)考试大纲	(227)
-----------------------	-------

第1章 函数与极限

一、基础知识点

1. 理解函数的概念.
2. 了解函数奇偶性、单调性、周期性和有界性.
3. 理解复合函数的概念,了解反函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.
5. 会建立简单实际问题中的函数关系式.
6. 理解极限的概念.
7. 掌握极限四则运算法则.
8. 了解两个极限存在准则,会用两个重要极限求极限.
9. 了解无穷小、无穷大,以及无穷小的阶的概念,会用等价无穷小求极限.
10. 理解函数在一点连续的概念.
11. 了解间断点的概念,并会判定间断点的类型.
12. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质.

二、考点解析

2.1 映射与函数

1. 映射与函数的定义

(1) **映射概念** 设 X, Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f ,使得对 $\forall x \in X$,通过 f ,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射(或算子),记作

$$f: X \rightarrow Y,$$

并称 y 为 x (在映射 f 下) 的像, 并记作 $f(x)$, 即

$$y = f(x),$$

x 称为 y 的原像.

(2) **函数概念** 设数集 $D \subset R$, 则称映射 $f: D \rightarrow R$ 为定义在 D 上的函数, 通常简记为

$$f(x) = y, x \in D.$$

定义中, 如果对 $\forall x \in D$, 按对应法则 f , 总有唯一确定的值 y 与之对应, 这个值称为函数 f 在 x 处的函数值, 记作 $f(x) = y$, 函数值 $f(x)$ 的全体组成的集合称为函数 f 的值域, 记作 R_f 或 $R_f(D)$, 即

$$R_f = f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\}.$$

2. 函数的性质

(1) **有界性** 设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若存在常数 $M > 0$, 使得对所有 $x \in I$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有界. 若这样的 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

(2) **单调性** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 如果对 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加; 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 如果对 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少.

(3) **奇偶性** 设 D 关于原点对称, 对于 $\forall x \in D$, 有 $f(-x) = f(x)$, 称 $f(x)$ 为偶函数; 设 D 关于原点对称, 对于 $\forall x \in D$, 有 $f(-x) = -f(x)$, 称 $f(x)$ 为奇函数.

(4) **周期性** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个正数 l , 使得 $\forall x \in D$ 有 $(x+l) \in D$, 且总有 $f(x+l) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是周期函数. l 称为 $f(x)$ 的周期. 通常称周期函数的周期是指最小正周期.

注 函数有界等同于既有上界又有下界.

六个常见的有界函数 $\sin x / \cos x / \arcsin x / \arccos x / \arctan x / \operatorname{arccot} x$.

3. 基本初等函数

幂函数 $y = x^\mu$ ($\mu \in \mathbf{R}$ 是常数);

指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$);

对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$);

三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 等;

反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$ 等.

初等函数 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算(加、减、乘、除)和有限次的函数复合步骤所构成,并可用一个式子表达的函数.

2.2 极限

1. 数列的极限

(1) 数列极限的概念 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N},$ 当 $n > N$ 时,有

$$|x_n - A| < \epsilon.$$

(2) 收敛数列的性质

性质 1(唯一性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A , 则其极限 A 是唯一的.

性质 2(有界性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 为有界数列.

性质 3(保号性) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A > 0 (< 0)$, 则 $\exists N \in \mathbf{N},$ 当 $n > N$ 时, 有

$$x_n > 0 (< 0).$$

2. 函数的极限

对于数列, 即整标函数 $x_n = f(n)$, 其自变量的变化只有一种情形. 而对于一般函数 $y = f(x)$ 来说, 有:

(1) 函数在无穷远点的极限

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的定义: $\forall \epsilon > 0, \exists X > 0,$ 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon.$

注(几何意义) 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C$, 则直线 $y = C$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的水平渐近线.

另两种情形 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$

(2) 函数在一点的极限

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的定义: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

(3) 左、右极限(单侧极限)

性质 4 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0^+) = f(x_0^-) = A.$

此性质常用于判断分段函数当 x 趋近于分段点时的极限.

(4) 函数极限的性质

性质 5(唯一性) 若在自变量的某种变化趋势下, $f(x)$ 有极限, 则极限值必唯一.

性质 6(局部有界性) 若当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 有极限, 则 $f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 上有界; 若当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 有极限, 则存在 $X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 函数 $f(x)$ 有界.

性质 7(局部保号性)

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则在 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 内, 有 $f(x) > 0$ 或 $(f(x) < 0)$;

(2) 若在 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 内有 $f(x) \geq 0$ 或 $(f(x) \leq 0)$, 则必有 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

3. 无穷小量

(1) 极限为零的变量称为无穷小量, 简称无穷小.

(2) 无穷小与函数极限的关系

定理 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

(3) 无穷小的运算性质

性质 8 在同一过程中, 有限个无穷小的代数和仍为无穷小;

性质 9 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小.

注 无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

4. 无穷大量

(1) 绝对值无限增大的变量称为无穷大.

(2) 在同一过程中, 无穷大的倒数为无穷小, 恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

5. 极限存在法则

(1) 夹逼准则

I. 如果数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足:

$$\textcircled{1} y_n \leq x_n \leq z_n (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a,$$

那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

II. 如果

$\textcircled{1}$ 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, r)$ (或 $|x| > M$), 有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$,

$$\textcircled{2} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = A,$$

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x) = A$, 那么 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A$.

(2) 单调有界准则

单调有界数列必有极限.

6. 极限运算法则

(1) 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则有

$$\begin{cases} \lim [f(x) \pm g(x)] = A \pm B; \\ \lim [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B; \\ \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, B \neq 0. \end{cases}$$

(2) 设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$,

那么

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = A \pm B; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B} \text{ (当 } y_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots) \text{ 且 } B \neq 0 \text{ 时)}. \end{cases}$$

(3) 如果 $\varphi(x) \geq \psi(x)$, 而 $\lim \varphi(x) = a, \lim \psi(x) = b$, 那么 $a \geq b$.

(4) 复合函数的极限运算法则

设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = g(x)$ 复合而成, $y = f[g(x)]$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 有定义, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0, \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 且存在 $\delta_0 > 0$, 当

$x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta_0)$ 时, 有 $g(x) \neq u_0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$.

7. 极限求法
- 利用无穷小与无穷大互为倒数的关系
 - 利用无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小的性质
 - 消去零因子法
 - 无穷小因子分出法
 - 根式转移法
 - 直接利用无穷大的概念判断
 - 利用左右极限求分段函数极限
 - 利用夹逼定理
 - 利用连续函数的性质
 - 利用等价无穷小代换
 - 利用未定式求极限法
 - 利用两个重要极限 $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \end{cases}$

8. 无穷小的比较

设两个量 α, β 为某一变化过程中的无穷小,

若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 0$, 则称 α 是 β 的高阶无穷小, 记为 $\alpha = o(\beta)$;

若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \infty$, 则称 α 是 β 的低阶无穷小;

若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow c (c \neq 0, c \in \mathbf{R})$, 则称 α 是 β 的同阶无穷小, 特别地, 当 $c = 1$ 时,

称 α 是 β 的等价无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta (x \rightarrow a)$;

若 $\frac{\alpha}{x^k} \rightarrow c (c \neq 0, k > 0)$, 则称 α 是 x 的 k 阶无穷小. 此时 $\alpha \sim cx^k$, 称 cx^k 为 α 的无穷小主部.

2.3 函数的连续性与间断点

1. 函数的连续性定义

(1) 定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内有定义, 若

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0,$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 并称 x_0 为函数 $f(x)$ 的连续点.

设 $x = x_0 + \Delta x, \Delta y = f(x) - f(x_0)$,

$\Delta x \rightarrow 0$ 即为 $x \rightarrow x_0, \Delta y \rightarrow 0$ 即为 $f(x) \rightarrow f(x_0)$.

定义 2 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

(2) 左、右连续

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续;

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 \Leftrightarrow 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续. (通常用于判断分段函数在分段点处的连续性)

2. 函数的间断点及其分类

(1) 若 $f(x)$ 在 x_0 处, 无定义或有定义无极限或有定义有极限, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, 则 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

(2) 函数间断点的分类

函数间断点	{	第一类间断点	{	可去间断点 (左极限 = 右极限)
		(左、右极限都存在)		跳跃间断点 (左极限 \neq 右极限)
		第二类间断点	{	无穷间断点 (若其中有一个为 ∞)
		(左、右极限不全存在)		振荡间断点 (若其中有一个为振荡)

2.4 连续函数的运算与初等函数的连续性

1. 四则运算的连续性

若函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处连续, 则

(1) 和(差)函数 $f(x) \pm g(x)$ 在 x_0 处连续;

(2) 乘积函数 $f(x) \cdot g(x)$ 在 x_0 处连续;

(3) 如果 $g(x) \neq 0$, 则商函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 x_0 处连续.

2. 反函数与复合函数的连续性

(1) 单调的连续函数必有单调的连续反函数.