



普通高等教育“十三五”规划教材

# 高等数学

(第二版)

(上册)

唐月红 刘 萍 王东红 主 编  
曹荣美 王正盛 曹喜望 赵一鶚 副主编



科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

普通高等教育“十三五”规划教材

# 高等数学(上册)

(第二版)

唐月红 刘 萍 王东红 主编  
曹荣美 王正盛 曹喜望 赵一鶚 副主编

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书是按照新形势下教材改革的精神,结合国家工科类本科数学课程教学基本要求,以及国家重点大学的教学层次要求,汲取国内外教材的长处编写而成,本书分上、下两册.上册内容包括函数与极限,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用,空间解析几何与向量代数.内容与中学数学相衔接,满足“高等数学课程教学基本要求”,还考虑到了研究生入学考试的需求.书中各章配制了二维码,读者可以通过扫码看授课视频来学习和巩固对应知识,同时,视频有助于教师的翻转课堂教学.

本书注重教学内容与体系整体优化,重视数学思想与方法,适当淡化运算技巧,充分重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力,安排数学实验,使数学教学与计算机应用相结合.

本书可作为高等院校非数学专业本科生的“高等数学”课程教材,还可供从事高等数学教学的教师和科研工作者参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/唐月红,刘萍,王东红主编.—2版.—北京:科学出版社,2018.6

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-054889-4

I. ①高… II. ①唐…②刘…③王… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第254909号

责任编辑:张中兴 梁清 孙翠勤/责任校对:杜子昂

责任印制:师艳茹/封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

石家庄继文印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2008年6月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2018年6月第 二 版 印张:21

2018年6月第十二次印刷 字数:423 000

定价:45.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

## 第二版前言

本书自 2008 年第一版与读者见面以来已印刷 11 次，使用了约 3 万册。我们通过使用该教材开展教学已取得了良好的教学效果。

本书第二版按新的工科类本科数学基础课程教学基本要求，组织长期从事高等数学教学和研究的骨干教师对第一版进行多次讨论，收集第一版的使用意见，确定了修订内容，在保持第一版的优点和特色基础上，主要对高等数学内容作了进一步锤炼、整合和必要增减，对定积分及其应用中的一些内容进行必要的补充和调整，对空间解析几何中内容作适当精简和合并；修改数学实验案例；降低曲线曲面积分中习题的难度，增加微分方程中习题量，增加微积分方面的应用题；加强了场论和广义积分知识，满足有关专业需要，授课时可侧重讲解，因材施教，以满足不同层次、不同潜质和不同兴趣的学生的要求。在第二版中，编者尝试录制了短的教学视频，在各章加入了对应二维码，方便学生学习与复习，也有助于教师翻转课堂的教学。

本书修订工作的第 1、11 章由曹喜望完成，第 2、8 章由王东红完成，第 3、12 章由曹荣美完成，第 4、9 章和附录 4 由刘萍完成，第 5、6、7、10 章和附录 1、2、3 由唐月红完成，数学软件和实验部分由王正盛编写。全体高等数学教学组老师参与完成视频录制，刘萍在审阅方面做了大量工作。全书由唐月红组织协调编写工作。

在本书第二版即将出版之际，特向关心本书出版和对第一版提出宝贵意见和建议的领导、教师和读者表示衷心的感谢，欢迎广大读者对第二版中存在的问题继续给予批评指正。

编者

2017 年 8 月

## 第一版前言

本教材根据教育部颁发的工科类本科数学基础课程教学基本要求编写而成，兼顾了“研究生入学数学的考试大纲”的内容，分上、下两册。上册内容为一元函数微分学、一元函数积分学、空间解析几何学；下册内容包括多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程，极限理论贯穿整个高等数学始终。每章除了配有一定数量的练习题外，还配备了作为内容归纳、总结的总复习题和作为检查的自测题，书末对这些题目给出了答案和提示，在教材的最后给出了四个附录，绝大部分内容是一些中学未学过，但又是高等数学不可缺少的预备知识。编写这部分的目的是方便读者随时查阅。部分加“\*”的内容可供读者选学，不必讲授。各章还安排了相应内容的数学实验，学生通过学习掌握数学软件的使用完成数学实验课题，可进一步生动直观地深入理解高等数学的基本概念与基本理论，了解相关的数值计算方法，循序渐进地培养数学建模的能力，以培养解决实际问题的意识和能力。本书重点放在基本概念、基本方法和数学知识的应用上，授课以 160~176 学时为宜。

本教材的第 1、11 章由曹喜望编写，第 2、8 章由王东红编写，第 3、12 章由曹荣美编写，第 4、9 章和附录 4 由刘萍编写，第 5、6 章由赵一鹏编写，第 7、10 章和附录 1、2、3 由唐月红编写，数学软件和实验部分由王正盛编写。刘萍和王东红在初稿的排版和审阅方面做了大量工作。全书由唐月红组织协调编写工作，由安玉坤教授统稿。陈芳启教授对本教材的编写给予了直接指导和关心，并提出了很多宝贵的建议。

由于时间仓促及编者水平有限，错误缺点在所难免，欢迎大家批评指正。

编者

2007 年 12 月

# 目 录

第二版前言

第一版前言

第 1 章 函数与极限	1
1.1 集合	1
1.2 函数	3
1.2.1 常量与变量	3
1.2.2 函数的定义	3
1.2.3 函数的几种特性	5
1.2.4 反函数	6
1.2.5 复合函数	7
1.2.6 初等函数	9
1.2.7 双曲函数	12
习题 1.2	13
1.3 函数的极限	14
1.3.1 数列极限	14
1.3.2 收敛数列的性质	17
1.3.3 函数极限	23
习题 1.3	33
1.4 无穷小量与无穷大量	35
1.4.1 无穷小量	35
1.4.2 无穷小量的比较	37
1.4.3 无穷大量	38
1.4.4 数列极限与函数极限的关系	40
习题 1.4	40
1.5 函数的连续性	41
1.5.1 连续性概念	41
1.5.2 间断点及其分类	42
1.5.3 连续函数的性质 初等函数的连续性	43
1.5.4 闭区间上连续函数的性质	45
习题 1.5	47

1.6 数学实验	48
实验一 MATLAB 数学软件入门	48
实验二 在计算机上用 MATLAB 绘制函数的图形	49
实验三 收敛速度与无穷小量	53
实验四 连续复利的数学模型	54
实验五 用二分法求解非线性方程的根	55
实验六 椅子放平稳问题模型	57
习题 1.6	58
总习题 1	58
自测题 1	59
<b>第 2 章 导数与微分</b>	<b>61</b>
2.1 导数的概念	61
2.1.1 导数概念的引入	61
2.1.2 导数的定义	62
2.1.3 函数的可导性与连续性的关系	66
习题 2.1	67
2.2 函数的求导法则	68
2.2.1 四则运算法则	68
2.2.2 反函数求导法则	70
2.2.3 复合函数的求导法则	71
2.2.4 求导法则与导数公式	74
习题 2.2	75
2.3 高阶导数	76
2.3.1 定义	76
2.3.2 运算法则	79
习题 2.3	80
2.4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数	81
2.4.1 隐函数的导数	81
2.4.2 由参数方程所确定的函数的导数	83
习题 2.4	85
2.5 导数的简单应用	85
2.5.1 切线与法线问题	86
2.5.2 速度、加速度问题	87
2.5.3 相关变化率	88

习题 2.5	89
2.6 函数的微分	89
2.6.1 微分的定义	89
2.6.2 微分的几何意义	91
2.6.3 基本初等函数的微分公式	92
2.6.4 微分的运算法则	93
2.6.5 微分的简单应用	95
习题 2.6	97
2.7 数学实验	98
实验一 应用符号运算求极限与导数	98
实验二 应用符号运算求隐函数的导数	100
实验三 应用符号运算求由参数方程所确定的函数的导数	101
习题 2.7	102
总习题 2	102
自测题 2	103
<b>第 3 章 导数的应用</b>	<b>105</b>
3.1 微分中值定理	105
习题 3.1	109
3.2 函数单调性与曲线的凹凸性	110
3.2.1 函数的单调性	110
3.2.2 曲线的凹凸性	112
习题 3.2	115
3.3 函数的极值与最值	116
3.3.1 函数的极值及其判别法	116
3.3.2 最大值、最小值问题	118
习题 3.3	120
3.4 函数图形的描绘	121
习题 3.4	124
3.5 洛必达法则	125
习题 3.5	128
3.6 泰勒公式	129
习题 3.6	134
3.7 数学实验	134
实验一 泰勒公式	134



实验二 拉格朗日中值定理与罗尔定理的关系	135
实验三 一元函数的极值问题	136
实验四 用牛顿迭代法求方程的根	137
实验五 非线性方程(组)的符号解	138
习题 3.7	139
总习题 3	139
自测题 3	141
<b>第 4 章 不定积分</b>	<b>143</b>
4.1 不定积分的概念	143
4.1.1 原函数与不定积分的概念	143
4.1.2 基本积分公式	145
4.1.3 不定积分的性质	146
习题 4.1	147
4.2 换元积分法	148
4.2.1 第一类换元法(凑微分法)	148
4.2.2 第二类换元法	151
习题 4.2	155
4.3 分部积分法	156
习题 4.3	159
4.4 有理函数及三角函数有理式的积分	159
4.4.1 有理函数的积分	160
4.4.2 三角函数有理式的积分	162
习题 4.4	163
总习题 4	164
自测题 4	165
<b>第 5 章 定积分</b>	<b>166</b>
5.1 定积分的概念和性质	166
5.1.1 定积分问题举例	166
5.1.2 定积分的定义	169
5.1.3 定积分的性质	172
习题 5.1	175
5.2 定积分变限的函数和微积分基本公式	176
5.2.1 定积分变上限的函数及其导数	177
5.2.2 牛顿-莱布尼茨公式	179
习题 5.2	181

5.3	定积分的换元法和分部积分法	182
5.3.1	定积分的换元法	182
5.3.2	定积分的分部积分法	184
5.3.3	积分等式	184
	习题 5.3	188
5.4	反常积分	189
5.4.1	无穷区间上的反常积分	189
5.4.2	无界函数的反常积分	191
*5.4.3	$\Gamma$ 函数	193
	习题 5.4	194
5.5	数学实验	195
	实验一 不定积分和定积分的符号运算	195
	实验二 数值积分	197
	习题 5.5	198
	总习题 5	199
	自测题 5	200
<b>第 6 章</b>	<b>定积分的应用</b>	<b>202</b>
6.1	定积分的元素法	202
6.2	平面图形的面积 立体的体积	203
6.2.1	平面图形的面积	203
6.2.2	立体的体积	207
	习题 6.2	209
6.3	平面曲线的弧长与曲率	210
6.3.1	平面曲线弧长的概念	210
6.3.2	曲线弧长的计算	211
6.3.3	平面曲线的曲率	213
	习题 6.3	217
*6.4	旋转曲面的面积	217
	*习题 6.4	219
6.5	定积分在物理上的应用	219
6.5.1	变力做功	219
6.5.2	水压力	220
*6.5.3	平面曲线的质心	221
6.5.4	引力	223
	习题 6.5	224
6.6	数学实验	225
	实验一 平面图形面积的计算	225

实验二 卫星轨道长度问题	226
总习题 6	227
自测题 6	227
<b>第 7 章 空间解析几何与向量代数</b>	<b>229</b>
7.1 空间直角坐标系	229
7.1.1 空间直角坐标系	229
7.1.2 点的直角坐标	230
7.1.3 两点间的距离公式	230
习题 7.1	231
7.2 曲面与空间曲线的一般方程	232
7.2.1 曲面与空间曲线的一般方程	232
7.2.2 球面、柱面、旋转曲面	233
7.2.3 二次曲面	237
习题 7.2	241
7.3 空间曲线与曲面的参数方程	241
7.3.1 空间曲线的参数方程	241
7.3.2 两种曲线方程的互化	242
*7.3.3 曲面的参数方程	243
7.3.4 点的柱面坐标和球面坐标	245
7.3.5 投影柱面和投影曲线	246
习题 7.3	247
7.4 向量的概念和运算	248
7.4.1 向量的概念	248
7.4.2 向量的运算	249
7.4.3 向量及向量运算的坐标表示	256
习题 7.4	260
7.5 平面和直线的方程	261
7.5.1 平面的方程	261
7.5.2 点到平面的距离	264
7.5.3 直线的方程	265
7.5.4 线面间的夹角	268
*7.5.5 点到直线的距离和直线与直线间的距离	270
*7.5.6 平面束	272
习题 7.5	274

---

7.6 数学实验	275
实验一 绘制空间曲面图	275
总习题 7	282
自测题 7	284
习题答案与提示	286
附录	309

# 第 1 章 函数与极限

函数是高等数学的主要研究对象，极限是高等数学的基本工具。本章我们将介绍函数的一般定义、函数的简单性质、函数(数列)极限的严格数学定义以及基本性质，最后要介绍连续函数的概念及性质。

本章是整个高等数学的基础，希望读者对这一章要做到深入理解和掌握。

## 1.1 集 合

在中学我们已经知道集合这个概念。所谓集合(简称集)就是指一些特定事物的全体，其中每个事物都称为这个集合的元素。我们常用大写字母  $A, B, C, \dots$  表示集合，用小写字母  $a, b, c, \dots$  表示集合中的元素。如果  $a$  是集合  $A$  的元素，则称  $a$  属于  $A$ ，记作  $a \in A$ ，反之就称  $a$  不属于  $A$ ，记作  $a \notin A$ 。

集合有两种表示方法：

(1) 列举法：可以用列举集合中的元素来表示集合，例如小于 10 的正奇数组成的集合可表示为  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 。

(2) 描述法：用描述集合中元素的特征性质来表示集合。例如  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$  这个集合也可以表示为  $\{x | x \text{ 是正奇数, 并且 } x < 10\}$ 。

数学中常见的一些集合如下：

全体自然数组成的集  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$  称为自然数集，记作  $\mathbf{N}$ ；

全体整数组成的集称为整数集，记作  $\mathbf{Z}$ ；

全体有理数组成的集称为有理数集，记作  $\mathbf{Q}$ ；

全体实数组成的集称为实数集，记作  $\mathbf{R}$ ；

全体复数组成的集称为复数集，记为  $\mathbf{C}$ 。

集合的种类：

如果按照元素个数分，集合可以分为有限集和无限集。如果集  $A$  的元素只有有限个，则称  $A$  为有限集；不含任何元素的集称为空集，记作  $\emptyset$ ；一个非空集，如果不是有限集，就称为无限集。

集合的关系：

如果集  $A$  中的元素都是集  $B$  中的元素，则称  $A$  是  $B$  的子集，记作  $B \supset A$  或

$A \subset B$ , 读作  $B$  包含  $A$  或  $A$  包含于  $B$ . 如果集  $A$  与集  $B$  中的元素相同, 即  $A \supset B$  且  $B \supset A$ , 则称  $A$  与  $B$  相等, 记作  $A = B$ .

集合的运算:

设  $A, B$  是两个集合, 则  $A, B$  的交, 记为  $A \cap B$ , 是由  $A$  与  $B$  的公共元素构成的集合, 即  $A \cap B = \{a | a \in A \text{ 且 } a \in B\}$ .

集合  $A$  与  $B$  的并, 记为  $A \cup B$ , 定义为集合  $A \cup B = \{a | a \in A \text{ 或 } a \in B\}$ . 易知集合的交、并运算满足:

(1) 交换律:  $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$ .

(2) 结合律:  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ .

(3) 分配律:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

集合  $A$  与  $B$  的差, 记为  $A - B$ , 定义为集合  $A - B = \{a | a \in A, a \notin B\}$ . 例如, 若  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ , 则  $A - B = \{1, 3, 5\}, B - A = \{6, 8, 10\}$ .

下面介绍实数集  $\mathbf{R}$  的两类特殊子集——区间与邻域.

### 1) 区间

设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 且  $a < b$ . 我们把  $\mathbf{R}$  的两个子集  $\{x | a < x < b\}$  和  $\{x | a \leq x \leq b\}$  分别称为以  $a, b$  为端点的开区间和闭区间, 并分别记作  $(a, b)$  和  $[a, b]$ , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}, \quad [a, b] = \{x | a \leq x \leq b\},$$

这里  $a, b \notin (a, b)$ , 但  $a, b \in [a, b]$ .

从几何上看, 开区间  $(a, b)$  表示数轴上以  $a, b$  为端点的线段上点的全体, 而闭区间  $[a, b]$  则表示数轴上以  $a, b$  为端点且包括  $a, b$  两端点的线段上点的全体 (图 1.1).



图 1.1

在图 1.1 中, 区间的端点不包括在内时, 把端点画成空点, 包括在内时, 把端点画成实点. 类似可以定义下面一些区间:

$$\begin{aligned} (a, b] &= \{x | a < x \leq b\}, & [a, b) &= \{x | a \leq x < b\}, \\ (-\infty, b) &= \{x | -\infty < x < b\}, & (-\infty, b] &= \{x | -\infty < x \leq b\}, \\ (a, +\infty) &= \{x | a < x < +\infty\}, & [a, +\infty) &= \{x | a \leq x < +\infty\}, \\ (-\infty, +\infty) &= \{x | -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}. \end{aligned}$$

这里  $-\infty$  和  $+\infty$  只是一个记号，分别是负无穷大和正无穷大。

**注意** 无穷大不是一个数。

上述各种区间统称为区间，常用字母  $I$  来表示某个给定的区间。

## 2) 邻域

设  $a, \delta \in \mathbf{R}$ ，且  $\delta > 0$ 。我们把以  $a - \delta, a + \delta$  为端点的开区间  $(a - \delta, a + \delta)$  称为点  $a$  的  $\delta$  邻域，记作  $U(a, \delta)$ 。 $a$  和  $\delta$  分别称为这邻域的**中心**和**半径**。由定义容易看出有

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

如果再把这邻域中的中心  $a$  去掉，就称它为点  $a$  的**去心邻域**，记作  $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ ，即

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

## 1.2 函 数

### 1.2.1 常量与变量

自然界中有一些不同的量，如长度、面积、体积、时间、速度、温度等一些物理量。这些量一般可以分为两种，一种是在过程进行中一直保持不变的量，这种量称为**常量**。另一种却在过程中不断变化着的量，这种量称为**变量**。注意常量与变量是相对于一个特定的过程而言的。例如，一个物体如果做匀速直线运动，则速度是常量，而时间与位移的大小都是变量。如果做变速直线运动，则速度是变量。

### 1.2.2 函数的定义

**定义 1** 设  $D$  是实数集  $\mathbf{R}$  的非空子集， $f$  是一个对应法则。如果对于  $D$  中的每一个  $x$ ，按照对应法则  $f$ ，都有唯一确定的实数  $y$  与之对应，则称  $f$  为定义在  $D$  上的**函数**。集  $D$  称为函数  $f$  的**定义域**。与  $D$  中  $x$  相对应的  $y$  称为  $f$  在  $x$  的**函数值**，记为  $y = f(x)$ 。全体函数值所成的实数集

$$Y = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数  $f$  的**值域**。

函数的定义域和对应法则为函数的两要素。如果两个函数  $f(x), g(x)$  的两要素对应相同，那么就称这两个函数是相等的，记为  $f = g$ 。例如  $f(x) = 1, x \in (-\infty, +\infty)$  与  $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, x \in (-\infty, +\infty)$  就是同一个函数，虽然它们的表达形式不一样。

函数的三种表示法：

(1) 解析法: 直接写出函数的解析式, 以及自变量  $x$  的取值范围, 即定义域.

例如:  $y = x^2$ ,  $x \in (0, +\infty)$  就表示一个函数, 其中  $(0, +\infty)$  是它的定义域. 这里要注意如果给定了自变量的取值范围  $D$ , 那么  $D$  就是函数的定义域. 如果没有给定自变量的取值范围, 那么函数的定义域是指使得函数有意义的自变量的取值范围.

(2) 图形法: 一般地, 我们可以把函数  $y = f(x)$ ,  $x \in D$  看作一个有序数对的集合:

$$C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\},$$

集  $C$  中的每一个元素在坐标平面上表示一个点, 从而点集  $C$  就描出这个函数的图形.

(3) 表格法: 把函数的自变量与因变量(函数值)列成一张表, 从表中可以看出定义域和值域以及对应关系. 所以这样一张表也可以表示一个函数. 例如, 中学里见到的三角函数表就是一些函数.

以上表示函数的三种方法各有其特点, 表格法可以直接查用; 图形法来得直观; 解析法形式简明, 便于作理论研究和函数值计算.

一个函数也可以在其定义域的不同部分用不同的解析式来表示, 通常称这种形式的函数为**分段函数**. 例如符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

和取整函数  $[x] = n$ ,  $n \leq x < n+1$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  都是分段函数. 它们的图形分别如图 1.2 和图 1.3 所示.

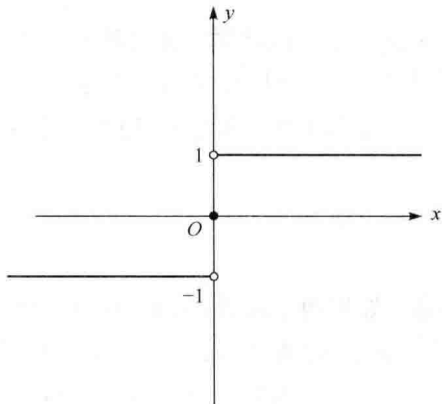


图 1.2

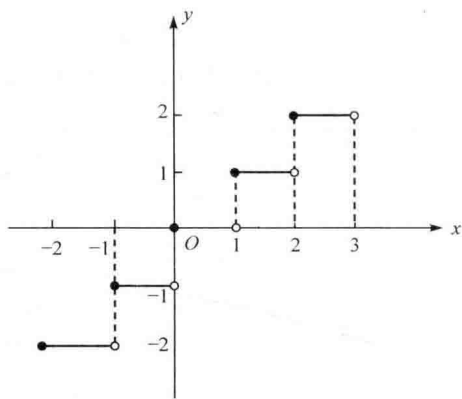


图 1.3



### 1.2.3 函数的几种特性

#### 1. 有界性

设函数  $f(x)$  在集  $D$  上有定义, 若存在常数  $M_1$  (或者  $M_2$ ), 使对一切  $x \in D$  有

$$f(x) \leq M_1 \quad (\text{或 } f(x) \geq M_2),$$

则称  $f(x)$  在  $D$  上有上界(或有下界). 若存在正数  $M$ , 使对一切  $x \in D$  有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称  $f(x)$  在  $D$  上有界. 如果这样的  $M$  不存在, 就称  $f(x)$  在  $D$  上无界, 即对任给的正数  $M$ , 总存在某个  $x_1 \in D$ , 使  $|f(x_1)| > M$ .

**注意** 函数的有界性与集  $D$  有关. 例如函数  $f(x) = x^2$  在区间  $[-1, 1]$  上是有界的, 因为对任意  $x \in [-1, 1]$  都有  $f(x) = x^2 \leq 1$ , 而函数  $g(x) = x^2, x \in (-\infty, +\infty)$  是无界的.

一个函数如果在其定义域上有界, 就称它为有界函数. 从图形上看, 有界函数的图形必位于两条直线  $y = M$  与  $y = -M$  之间. 例如,  $y = \sin x$  是有界函数, 因为在它的定义域  $(-\infty, +\infty)$  内,  $|\sin x| \leq 1$ , 它的图形夹在直线  $y = -1$  和  $y = 1$  之间.

#### 2. 单调性

设函数  $f(x)$  在集  $D$  上有定义, 如果对  $D$  中任意两个数  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 总有

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) \geq f(x_2)),$$

则称函数  $f(x)$  在集  $D$  上单调增加(或单调减少). 若当  $x_1 < x_2$  时, 总有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称函数  $f(x)$  在集  $D$  上严格单调增加(或严格单调减少). 单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数.

**注意** 函数的单调性也是相对于定义域  $D$  而言的. 不同的定义域, 函数的解析式可能一样, 但是它的单调性可能不同. 例如函数  $f(x) = x^2$  在  $(-\infty, 0)$  内严格单调减少, 在  $(0, +\infty)$  内严格单调增加.

#### 3. 奇偶性

设函数  $y = f(x)$ ,  $x \in D$ , 其中  $D$  关于原点对称, 即当  $x \in D$  时, 有  $-x \in D$ . 如果对任意  $x \in D$ , 总有

$$f(-x) = -f(x) \quad (\text{或 } f(-x) = f(x)),$$

则称  $f(x)$  为奇函数(或偶函数).

例如, 当  $x \in \mathbf{R}$  时,  $f(x) = x^3$  是奇函数,  $g(x) = x^2$  是偶函数, 因为对任意  $x \in \mathbf{R}$ ,