应用随机过程

朱宁 张茂军 主编

中国统计出版社
China Statistics Press

应用随机过程

朱宁 张茂军 主编

中国统计出版社
China Statistics Press

图书在版编目(CIP)数据

应用随机过程 / 朱宁，张茂军主编. —— 北京 ：中国统计出版社，2018.8
ISBN 978－7－5037－8615－0

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①朱… ②张… Ⅲ. ①随机过程－高等学校－教材 Ⅳ. ①O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 187945 号

应用随机过程

作　　者/朱　宁　张茂军
责任编辑/梁　超
封面设计/李　静
出版发行/中国统计出版社
通信地址/北京市丰台区西三环南路甲 6 号　邮政编码/100073
电　　话/邮购(010)63376909　书店(010)68783171
网　　址/http://www.zgtjcbs.com
印　　刷/北京厚诚则铭印刷有限公司
经　　销/新华书店
开　　本/710×1000mm　1/16
字　　数/260 千字
印　　张/15.75
版　　别/2018 年 8 月第 1 版
版　　次/2018 年 8 月第 1 次印刷
定　　价/68.00 元

前　言

2015 年 1 月教育部《关于改进和加强研究生课程建设的意见》指出：高度重视课程学习在研究生培养中的重要作用。课程学习是我国学位和研究生教育制度的重要特征，是保障研究生培养质量的必备环节，在研究生成长成才中具有全面、综合和基础性作用。重视课程学习、加强课程建设、提高课程质量，是当前深化研究生教育改革的重要和紧迫任务。

教材建设是高校研究生课程建设的一项重要内容，它在发展教育和进行教学改革过程中占有十分重要的地位。作者从 1998 年起一直从事理工科研究生学位课程《随机过程》以及本科阶段相关课程的教学工作。目前，国内使用的随机过程教材偏理论，内容偏多不太适合理工科研究生学位课程专业培养要求，有必要对研究生随机过程课程教材及教学进行建设与改革。希望通过这次改革，分析研究生随机过程课程教学现状和存在的问题，对教学改革思路进行探讨，更好地提高教学效果，培养出合格的创新型应用人才。

作为以理工科为主的综合类本科院校，研究生专业方向差异较大，基础参差不齐。为了鼓励学生将理论知识与专业研究紧密结合起来，培养应用型人才，必须加强学生应用数学的能力，提高学生将专业问题转化为数学模型的能力。

本书是作者在使用多年同名教材的基础上，吸收了国内外优秀教材之长，进行改编而成的。全书共五章，内容包括概率论基础知识、随机过程基本概念、随机分析、平稳过程、马尔可夫过程等。

各章均配有例题和习题，加强了数学建模及其应用。

本书内容由浅入深、通俗易懂，可作为普通高等院校理工科高年级学生、统计与金融专业类学生、研究生的教材和教学参考书。

本书由朱宁教授和张茂军教授主编，各章由朱宁执笔，张茂军老师参加了编写，张朦禹老师和梁栋参加了部分章节的修改和补充。

本书的写作得到了国家自然科学基金（项目编号 71461005）、广西高等教育本科教学改革工程项目“面向理工类高校的应用型金融工程人才培养模式研究与实践”（2016JGA206）和广西高校数据分析与计算重点实验室的资助。在此书的编写过程中，桂林电子科技大学研究生院、数学与计算科学学院的领导和部分教师及研究生给予了帮助和支持。我的夫人李竹梅更是付出了很多。在此，一并表示衷心感谢！

编者水平有限，书中难免存在错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

朱　宁

2018 年 8 月于桂林电子科技大学

目　　录

第 1 章　概率论基础
1.1　随机过程简介　/ 1
1.1.1　问题的提出　/ 1
1.1.2　简史　/ 1
1.1.3　预备知识　/ 1
1.2　补充知识　/ 2
1.2.1　概率论简单回顾　/ 2
1.2.2　随机事件　/ 2
1.2.3　概率的公理化定义　/ 2
1.2.4　概率的部分性质　/ 3
1.2.5　条件概率　/ 3
1.2.6　独立性　/ 4
1.2.7　随机变量　/ 5
1.2.8　多维随机变量及其分布　/ 5
1.2.9　随机向量的独立性　/ 6
1.2.10　数学期望　/ 6
1.2.11　常用不等式　/ 8
1.2.12　复随机变量,数字特征及其独立性　/ 8
1.2.13　举例　/ 8
1.3　特征函数　/ 12
1.3.1　问题的提出　/ 12
1.3.2　特征函数及其性质　/ 12
1.4　多元正态分布及其性质　/ 20
1.4.1　概念　/ 21
1.4.2　基本性质　/ 21
1.4.3　举例　/ 26

1.5 随机变量函数的分布及条件数学期望 / 27
1.5.1 一元随机变量函数及其分布 / 27
1.5.2 多个随机变量的函数及其分布 / 28
1.5.3 条件数学期望 / 29
1.5.4 举例 / 31
习题一 / 32

第 2 章 随机过程基本概念
2.1 问题的提出 / 36
2.2 随机过程的基本概念、分布及其数字特征 / 37
2.2.1 随机过程的定义与分类 / 37
2.2.2 随机过程的有限维分布 / 38
2.2.3 随机过程的数字特征 / 38
2.2.4 举例 / 39
2.3 几种常见的随机过程 / 42
2.3.1 二阶矩过程 / 42
2.3.2 正态过程 / 43
2.3.3 正交增量过程 / 43
2.3.4 平稳独立增量过程 / 44
2.3.5 举例 / 45
2.4 维纳过程与泊松过程 / 46
2.4.1 Wiener(维纳)过程 / 46
2.4.2 Poisson(泊松)过程 / 49
2.4.3 举例 / 52
2.5 到达时间与点间间隔及其分布 / 55
2.5.1 到达时间与点间间隔 / 55
2.5.2 基本性质 / 55
2.5.3 举例 / 57
2.6 复合 Poisson 过程 / 60
2.6.1 概念 / 60
2.6.2 基本性质 / 61

2.6.3 举例 / 62
2.7 更新过程 / 63
2.7.1 补充知识 / 63
2.7.2 概念 / 64
2.7.3 基本性质 / 64
2.7.4 举例 / 64
习题二 / 65

第 3 章 随机分析
3.1 问题的提出 / 70
3.2 随机变量序列的均方极限与性质 / 71
3.2.1 二阶矩随机变量序列的均方极限 / 71
3.2.2 二阶矩随机变量序列的均方极限的性质 / 74
3.2.3 举例 / 76
3.3 二阶矩过程的均方极限 / 77
3.3.1 概念 / 77
3.3.2 基本性质 / 77
3.3.3 举例 / 77
3.4 二阶矩过程的均方连续 / 78
3.4.1 概念 / 78
3.4.2 均方连续准则 / 78
3.4.3 举例 / 79
3.5 二阶矩过程均方导数 / 80
3.5.1 概念 / 80
3.5.2 均方可导准则 / 80
3.5.3 均方导数性质 / 81
3.5.4 举例 / 82
3.6 均方积分 / 84
3.6.1 概念 / 84
3.6.2 均方可积准则 / 85
3.6.3 均方积分性质 / 85

3.6.4　X_T 在$[a, b]$上的变上限均方积分　/ 87
3.6.5　举例　/ 88
3.7　均方随机微分方程　/ 89
3.7.1　n 阶线性均方随机微分方程　/ 89
3.7.2　一阶线性均方随机微分方程均方解及均值函数和相关函数　/ 90
3.7.3　举例　/ 91
3.8　正态过程的随机分析　/ 92
3.8.1　基本性质　/ 92
3.8.2　举例　/ 95
3.9　随机分析在经济领域中的应用　/ 95
3.9.1　资本和劳动力投入的动态随机过程　/ 95
3.9.2　随机微分方程均方解的存在性和唯一性　/ 96
3.9.3　实证分析　/ 99
3.9.4　能源投入的动态经济系统随机过程模型　/ 100
习题三　/ 108

第 4 章　平稳过程
4.1　问题的提出　/ 112
4.2　平稳过程的概念及相关函数的性质　/ 113
4.2.1　概念　/ 113
4.2.2　平稳过程相关函数的性质　/ 114
4.2.3　联合平稳过程及互相关函数的性质　/ 116
4.2.4　举例　/ 117
4.3　平稳过程的功率谱密度　/ 119
4.3.1　谱函数和谱密度　/ 119
4.3.2　谱密度的物理意义　/ 120
4.3.3　谱密度的性质　/ 121
4.3.4　联合平稳过程的互谱密度及其性质　/ 122
4.3.5　举例　/ 124
4.4　线性系统中的平稳过程　/ 125

4.4.1 线性时不变系统的概念 / 125
4.4.2 频率响应与脉冲响应的关系 / 125
4.4.3 线性时不变系统对随机输入的响应 / 126
4.4.4 线性时不变系统的输入与输出的互相关函数与互谱密度 / 128
4.4.5 举例 / 128
4.5 平稳过程的各态历经性 / 131
4.5.1 问题的提出 / 131
4.5.2 平稳过程的各态历经性的概念 / 131
4.5.3 均方连续平稳过程具有各态历经性的条件 / 132
4.5.4 平稳过程具有各态历经性的充分条件 / 135
4.5.5 举例 / 137
附录 相关函数与谱密度的付氏变换性质及计算公式 / 139
习题四 / 140

第 5 章 马尔可夫过程
5.1 问题的提出 / 143
5.2 马氏链及其性质 / 144
5.2.1 马氏过程 / 144
5.2.2 马氏链的转移概率及其性质 / 145
5.2.3 举例 / 147
5.3 马氏链的状态分类 / 150
5.3.1 状态类型及性质 / 150
5.3.2 状态分类 / 153
5.3.3 状态类型的判别方法 / 153
5.3.4 举例 / 156
5.4 状态间的关系 / 159
5.5 状态空间分解 / 160
5.5.1 概念 / 160
5.5.2 基本性质 / 161
5.5.3 举例 / 162

5.6 周期链分解 / 164
5.6.1 概念 / 164
5.6.2 基本性质 / 164
5.6.3 举例 / 166
5.7 极限分布与平稳分布 / 168
5.7.1 转移概率的极限 / 168
5.7.2 平稳分布 / 170
5.7.3 举例 / 172
习题五 / 175

习题参考思路及解答 / 180
参考文献 / 241

第 1 章　概率论基础

1.1　随机过程简介

1.1.1　问题的提出

在当今社会，人们经常会关注以下问题：

经济学：道格拉斯生产函数：$Q = Ak^{\alpha}L^{\beta}$

国内生产总值：GDP(Gross Domestic Product)

物理学：某系统中的随机输入与输出信号：X,Y

气象学：降水量 T

等等。虽然以上三个问题有着各自不同的实际背景，但每个量都具有共同的特征：

(1)与时间参数 (t) 有关；

(2)当时间参数 (t) 给定之后，它们都是随机变量。

如果我们关心的对象具有以上两个特征，则可以称其为"随机过程"。在我们的现实社会中存在着大量的随机过程，关注和研究它们的意义不言而喻。

简单地讲，随机过程就是无穷不可数的一族随机变量。

1.1.2　简史

现代概率论为随机过程的研究获得了新的起点。

1902 年 Markov(马尔可夫)提出了一类普通的随机过程——Markov 链；1931 年 Kolmogrov(柯尔莫格洛夫)用分析方法制定了马尔可夫过程的随机基础。之后 Levg(列维)、辛钦、伊藤清等都为随机过程的发展做出了重要贡献。

随机过程的两个代表人物是杜布和伊藤清，前者创立了鞅论，后者创立了布朗运动的随机积分理论。2006 年日本数学家伊藤清先生荣膺首届高斯奖，可见随机过程方向在当今科研领域的重要性。

1.1.3　预备知识

数学分析(或高等数学)、高等代数(或线性代数)、概率论与数理统计、测度论基础等。

1.2 补充知识

1933 年由前苏联数学家柯尔莫格洛夫首先提出了概率论的公理化体系，从而使概率论成为一门严谨的数学分支，随机过程是概率论的一个重要分支。

1.2.1 概率论简单回顾

概率论包括以下基本概念：随机现象、随机试验、样本空间、基本事件、随机事件、概率及其性质、条件概率、随机变量及其分布、条件分布、独立性、数字特征。

1.2.2 随机事件

我们知道，在大学学习期间，随机事件被定义为样本空间的一个子集。例如，

(1)随机试验 E_1：掷均匀骰子。其样本空间为：$\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$。集合 $A=\{1,3,5\}$，由于 $A\subset\Omega$，所以，A 是一个随机事件；

(2)随机试验 E_2：从区间 $[0,1]$ 中任取一个数。样本空间为：$\Omega=[0,1]$。集合 $B=\{$区间 $[0,1]$ 中的全体无理数$\}$，则 $B\subset\Omega$，即 B 是一个随机事件，试求 $P(B)$。显然，利用大学学过的概率论中的方法是无法度量随机事件 B 在一次试验中发生的可能性大小的。即概率 $P(B)$ 是求不出来的。为此，对随机事件给出更为严谨的定义。

定义 1.2.1 设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，$\mathscr{F}$ 是由 Ω 的一些子集组成的集合。它满足以下条件：

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$；

(2)若 $A\in\mathscr{F}$，则 $\bar{A}\in\mathscr{F}$；

(3)若对 $\forall n\in N, A_n\in\mathscr{F}$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$，

则称 $\mathscr{F}$ 是一个随机事件域(或 σ 代数)，简称为事件域。其中 N 为自然数集。

$\mathscr{F}$ 有以下基本性质：

(1) $\varnothing\in\mathscr{F}$；

(2)对 $\forall n\in N, A_n\in\mathscr{F}$，则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$；

(3)若 $A,B\in\mathscr{F}$，则 $A-B\in\mathscr{F}$；

(4)Ω 的一切子集组成的集类是 Ω 中的一个事件域。

1.2.3 概率的公理化定义

定义 1.2.2 设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，$\mathscr{F}$ 是定义在 Ω 上的事件域，

在 $\mathscr{F}$ 上定义实值集函数 $P(\cdot)$。若满足以下条件：

(1)非负性：对 $\forall A \in \mathscr{F}$，有 $P(A) \geqslant 0$；

(2)归一性：$P(\Omega)=1$；

(3)可列可加性：若对 $\forall n \in N, A_n \in \mathscr{F}$，且它们两两不相容(即对 $\forall i, j \in N$，且 $i \neq j$，有 $A_iA_j=\varnothing$)。则有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

则称 P 是定义在二元组 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率。称 $P(A)(A \in \mathscr{F})$ 为事件 A 的概率，称 (Ω,F,P) 为概率空间。

1.2.4 概率的部分性质

性质 1.2.1 (加法公式)对 $\forall n \in N, A_n \in \mathscr{F}$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j)-\cdots+(-1)^{n-1}P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

性质 1.2.2 (1)对 $\forall n \in N, A_n \in \mathscr{F}, A_n \subset A_{n+1}$，则

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=P(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

(2) $\forall n \in N, A_n \in \mathscr{F}, A_n \supset A_{n+1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)=P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)=P\left(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\right)$。

证：(1)令 $B_1=A_1$，　$B_k=A_k-\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i$，　$k \in N$，则 $B_k \in \mathscr{F}$，且两两不相容，有 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$，　$n \in N$。则有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(A_n)&=\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(B_i)=\sum_{n=1}^{\infty} P(B_i)\\&=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=P(\lim_{n\to\infty} A_n)\end{aligned}$$ ■

1.2.5 条件概率

1　概念

定义 1.2.3 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是概率空间，$A, B \in \mathscr{F}$，且 $P(B)>0$，则称

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 已经发生的条件下事件 A 发生的条件概率，并称 $P(\cdot \mid B)$ 是定义

在 $\mathscr{F}$ 上的一个概率测度，记为 $P_B(\cdot)$。

易验证：$P_B(\cdot)$ 也满足概率公理化定义中的三个公理，即

(1)非负性：对 $\forall A \in \mathscr{F}$，有 $P_B(A) \geqslant 0$；

(2)归一性：$P_B(\Omega) = 1$；

(3)可列可加性：若对 $\forall n \in N, A_n \in \mathscr{F}$，且它们两两不相容，(即对 $\forall i, j \in N$，且 $i \neq j$，有 $A_iA_j = \varnothing$)。则有

$$P_B(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P_B(A_n)$$

所以，$P_B(\cdot)$ 是 $\mathscr{F}$ 上的一个概率，并称 $(\Omega, \mathscr{F}, P_B)$ 为在给定 B 条件下的概率空间。同理，可定义 $P_{A_1A_2}(\cdot), \cdots, P_{A_1A_2\cdots A_n}(\cdot)$ 等。

所以，条件概率也是概率，概率的所有性质对条件概率也都成立。

2　条件概率的部分性质

性质 1.2.3　若 $A, B \in \mathscr{F}, P_A(B) > 0$，则 $P_A(C \mid B) = P(C \mid AB) = P_{AB}(C)$。

性质 1.2.4　(乘法公式)对 $\forall n \in N, i = 1, 2, \cdots, n, A_i \in \mathscr{F}$，且 $P(A_i) > 0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})\cdots P(A_2 \mid A_1)P(A_1)$$

注：乘法公式又可理解为是“复杂事件”的概率。

性质 1.2.5　(全概率公式与 Bayes 公式)设 $A \in \mathscr{F}, B_i \in \mathscr{F}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 两两不相容，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i \supset A, P(B_i) > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$，则有

全概率公式：$P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)$

Bayes (贝叶斯)公式：$P(B_n \mid A) = \dfrac{P(A \mid B_n)P(B_n)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)}$

1.2.6　独立性

1　概念

定义 1.2.4　设 $A_i \in \mathscr{F}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 对 $\forall m(1 \leqslant m \leqslant n)$，及 $1 \leqslant k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_m \leqslant n$，都有

$$P(A_{k_1}A_{k_2}\cdots A_{k_m}) = P(A_{k_1})P(A_{k_2})\cdots P(A_{k_m})$$

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立。

注：当 $n > 2$ 时，相互独立一定是两两独立，但反之不然。

2　相互独立的性质

性质 1.2.6　若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{ik}(2 \leqslant k \leqslant n)$ 也相互独立。

即，若有 n 个事件相互独立，则其中若干个事件也相互独立。

性质 1.2.7　若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 也相互独立。其中 $B_i = A_i$ 或 $B_i = \bar{A}_i$，　$i = 1, 2, \cdots, n$。

1.2.7　随机变量

定义 1.2.5　设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间，对 $\forall \omega \in \Omega$，赋于实数 $X = X(\omega)$ 与之对应，对 $\forall x \in R$（实数集），若 $\{\omega \mid X(\omega) \leqslant x, x \in R\} \triangleq \{X \leqslant x\} \in \mathscr{F}$，则称 X 为 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量(random variable)，记为 $r.v\ X$。称 $F(x) \triangleq P(X \leqslant x)$ 为 $r.v\ X$ 的分布函数。$F(x)$ 有以下性质：

(1)单调不减性：若 $x < y$，则 $F(x) \leqslant F(y)$；

(2)右连续性：对 $\forall x \in R, F(x+0) = F(x)$；

(3)有界性：$0 \leqslant F(x) \leqslant 1$，且 $F(-\infty) \triangleq \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) \triangleq \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$。

定理 1.2.1　Kolmogorov（柯尔莫格洛夫）存在性定理

满足以上三条性质的函数，必是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上某个 $r.v$ 的分布函数。

1.2.8　多维随机变量及其分布

定义 1.2.6　(1)对 $\forall i \in N, \omega \in \Omega, X_i = X_i(\omega)$ 是定义在 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的 $r.v$，则称 $X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ 为 n 维 $r.v$，简记为 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$。

(2)称 $F_X(x) \triangleq P\left\{\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i \leqslant x_i)\right\} \triangleq P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n)$，为 n 维 $r.v\ X$ 的联合分布函数。其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$。

(3)若 $r.v\ X$ 只取有限或可数多对向量值，则称 X 为离散型 $r.v$，其联合分布率为：$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n, \cdots)$

(4)若 $\exists n$ 元非负 Lebesgue（勒贝格）可积函数 $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x1} \int_{-\infty}^{x2} \cdots \int_{-\infty}^{xn} p(u_1, u_2, \cdots, u_n) du_1 du_2 \cdots du_n$$

则称 $r.v\ X$ 为连续型 $r.v$，称 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 为 $r.v\ X$ 的联合密度函数。

1.2.9 随机向量的独立性

1 概念

定义 1.2.7 (1)对 $\forall n \in N, X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 n 维 $r.v$，对 $\forall x_i \in R$ $(i=1,2,\cdots,n)$，若有 $P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n)=\prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x_i)$

即 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$。则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立。

(2)设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 n 维 $r.v$，对 $1 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \cdots \leqslant k_m \leqslant n$，且 $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$。若有

$$F_{X_{k_1} X_{k_2} \cdots X_{k_m}}(x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_m})=\prod_{i=1}^{m} F_{X_{k_i}}(x_{k_i})$$

则称 $X_{k_1}, X_{k_2}, \cdots, X_{k_m}$ 相互独立。

2 随机向量的独立性质

性质 1.2.8 若 $r.v$ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则其中 $m(2 \leqslant m \leqslant n)$ 个 $r.v$ 也相互独立。

性质 1.2.9 若 $r.v$ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x)$ 是 Borel(波雷尔)可测函数，则 $g_1(X_1), g_2(X_2), \cdots, g_n(X_n)$ 也相互独立。

特别地，若 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x)$ 均为连续函数，则 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x)$ 均为 Borel 可测函数。

性质 1.2.10 若对 $\forall 1 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \cdots \leqslant k_m \leqslant n$，且 $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$，有 $X_{k_1}, X_{k_2}, \cdots, X_{k_m}$ 相互独立，$G_1(x_{k_1}), G_1(x_{k_2}), \cdots, G_m(x_{k_m})$ 为 Borel 可测函数，则 $G_1(X_{k_1}), G_2(X_{k_2}), \cdots, G_m(X_{k_m})$ 也相互独立。

1.2.10 数学期望

1 概念

定义 1.2.8 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF(x) < +\infty$，则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$ 为 $r.v$ X 的数学期望，该积分又称为 Riemann-Stieltjes(黎曼—斯蒂尔杰斯)积分。

$$E(X) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) = \begin{cases} \sum_i x_i p_i, & X \text{ 为离散型 } r.v \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx, & X \text{ 为离散型 } r.v \end{cases}$$