KAOYAN SHUXUE

LINIAN ZHENTI MINGSHI JIEXI

考研数学

历年真题名师解析

数学一

薛威 编

11年真题解析，冲刺高分的经典题型盘点

- 分门别类，方便检索，精确定位知识点
- 新东方名师编写，真题解析详尽，思路开阔
- 解析与试卷独立成册，复习训练两不误

化学工业出版社

考研数学
历年真题名师解析

数学一

薛威 编

化学工业出版社

·北京·

《考研数学历年真题名师解析·数学一》根据2008~2018年共11年来考研大纲的知识重点与变化编写而成，对考研数学一的知识点进行了全面的梳理，将其分门别类整理出重点知识，并对11年来的真题进行了详尽的解析，根据题型进行专项训练，帮助考研学生举一反三掌握好相关知识，轻松应对考试。为配合题型讲解进行模拟训练，本书附有《考研数学真题试卷·数学一》，帮助考生全面把握出题形式。

本书解析步骤详尽，方法易懂，是编者近年来教学经验的总结与凝炼，助力考生提高复习效率，冲刺考研高分。

图书在版编目（CIP）数据

考研数学历年真题名师解析. 数学一/薛威编. —北京：化学工业出版社，2018. 8

ISBN 978-7-122-32497-9

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①薛… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第136787号

责任编辑：旷英姿　　装帧设计：关　飞

责任校对：王素芹

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）

印　　装：三河市双峰印刷装订有限公司

787mm×1092mm　1/16　印张26¼　字数500千字　2018年9月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：68.00元

目　　录

第一部分

高等数学

第一章　函数极限连续

本章重点：熟练掌握求极限的常用方法、无穷小量的概念、极限的反问题的解法(已知极限,求表达式中的参数),这些是常考的内容；熟练掌握七种未定式转换、等价无穷小量化简、洛必达法则和泰勒公式求极限的方法；熟练掌握定积分定义求极限、夹逼准则和单调有界原理求数列极限的方法；会处理变限积分形式的极限；了解间断点的类型判断和连续函数的性质.

1.等价无穷小化简常用公式(乘除法可以用,加减法不可以)

当 $x\to0$ 时,有:

$$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3,\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3,\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3,\arcsin x-x\sim\frac{1}{6}x^3,x-\arctan x\sim\frac{1}{3}x^3,$$

$$\arcsin x-\arctan x\sim\frac{1}{2}x^3,a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a,(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2.$$

2.求极限中常用泰勒公式(背熟练)

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3),\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3),e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3),(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2).$$

3.求极限最常用的方法

(1)幂指转换 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$.

(2)等价无穷小化简.

(3)洛必达法则和泰勒公式(近年题目要求熟练掌握泰勒公式).

4.无穷小的阶的概念

当 $x\to x_0$ 时,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$:

(1)$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$,称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小,记为 $f(x)=o(g(x))$.

(2)$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$,称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C\neq 0$,称$f(x)$是$g(x)$的同阶无穷小,记为$f(x)=O(g(x))$.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,称$f(x)$是$g(x)$的等价无穷小,记为$f(x)\sim g(x)$.

(5) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g^k(x)}=C\neq 0$,称$f(x)$是$g(x)$的$k$阶无穷小.

5. 极限反问题的两个重要定理

(1)已知 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

(2)已知 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=B\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

这两个重要定理多用于无穷小量的阶的问题,反求表达式中的参数.

6. 定积分定义求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

7. 间断点解题步骤

(1)找出无定义的间断点(例如分母为零的点).

(2)求间断点的左右极限.

(3)判断间断点的类型.

题型 1.1.1　函数的概念和性质

(2002 年,数学二/数学四)

设函数$f(x)$连续,则下列函数中,必为偶函数的是(　　).

(A) $\int_0^x f(t^2)\,dt$　　(B) $\int_0^x f^2(t)\,dt$

(C) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\,dt$　　(D) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\,dt$

【解析】 设$F(x)=\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\,dt$,则

$$F(-x)=\int_0^{-x} t\,[f(t)+f(-t)]\,dt$$

$$\xlongequal{\text{令 } u=-t}\int_0^x(-u)[f(-u)+f(u)]\,d(-u)$$

$$=\int_0^x u[f(u)+f(-u)]\,du=F(x).$$

即 $F(x)$ 是偶函数,(D)是正确的.

类似方法可以证明(A)(C)均为奇函数.对于(B)选项,因为

$$\int_0^{-x} f^2(t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{u=-t} \int_0^{x} -f^2(-t)\,\mathrm{d}t \text{ 不是偶函数.}$$

(2005 年,数学一/数学二)

设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,"$M \Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N",则必有(　　).

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数　　(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数　(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

【解析】 当取 $f(x)=\cos x+1$, $F(x)=\sin x+x+1$ 时,可判断(B)(C)(D)不正确. 故选项(A)正确.

(2005 年,数学三/数学四)

以下四个命题中,正确的是(　　).

(A)若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(B)若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(C)若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(D)若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界,则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

【解析】 若取 $f(x)=\ln x$,则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$,可知选项(A)和(B)都不正确.若取 $f(x)=\sqrt{x}$,则 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,可知选项(D)是不正确的.故(C)是正确的.

(2014 年,数学一/数学二)

设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数,且 $f'(x)=2(x-1)$, $x\in[0,2]$,则 $f(7)=$ ________.

【解析】 因为 $f(x)$ 是周期为 4 的奇函数,所以 $f'(x)$ 是周期为 4 的偶函数.如图 1.1.1 所示,$y=f'(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的图像,其在第三象限中与坐标轴围成的三角形的面积为 1.

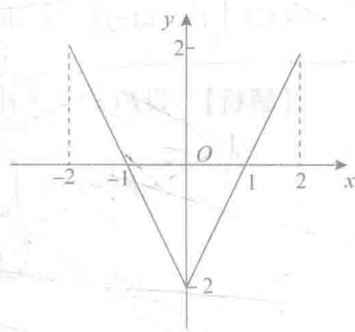

图 1.1.1

因为 $f(-1)-f(0)=\int_0^{-1} f'(x)\,\mathrm{d}x=1$,且 $f(0)=0$, $f(x)$ 的周期为 4,所以

$$f(7)=f(7-2\times 4)=f(-1)=1.$$

题型 1.1.2 极限的概念和性质

(2014 年,数学三)

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,且$a\neq0$,则当$n$充分大时有( ).

(A)$|a_n|>\frac{|a|}{2}$ (B)$|a_n|<\frac{|a|}{2}$ (C)$a_n>a-\frac{1}{n}$ (D)$a_n<a+\frac{1}{n}$

【解析】 由题设知 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$,当$n$充分大时,有 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|>\frac{|a|}{2}$,故选(A).

(2015 年,数学三)

设$\{x_n\}$是数列,下列命题中不正确的是( ).

(A)若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$

(B)若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

(C)若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$

(D)若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

【解析】 例证法,设 $x_{3n}=1+\frac{1}{3n}$,$x_{3n+1}=1+\frac{1}{3n+1}$,$x_{3n+2}=2+\frac{1}{3n+2}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=1$,但$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+2}=2$,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq1$.故选(D).

(2017 年,数学二)

设数列$\{x_n\}$收敛,则( ).

(A)当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(B)当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(C)当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(D)当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

【解析】 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=\sin a=0$,$\sin a=0$,有无穷多个解,不收敛.

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=a+\sqrt{|a|}=0$,则 $a=0$ 或 $a=-1$,不收敛.

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=a+a^2=0$,则 $a=0$ 或 $a=-1$,不收敛.

于是(A)(B)(C)被排除.故选(D).

题型 1.1.3　数列极限的计算

(2008 年,数学一/数学二)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是(　　).

(A)若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　(B)若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C)若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛　　(D)若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛

【解析】　在选项(B)中,因为数列 $\{x_n\}$ 单调,考虑到 $f(x)$ 是一个单调有界函数,所以数列 $\{f(x_n)\}$ 不仅单调,而且有界,由单调有界原理,从而收敛.故选(B).

(2006 年,数学一/数学二)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n (n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ)证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,并求该极限;

(Ⅱ)计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【证明】　(Ⅰ)当 $0<x<\pi$ 时,有 $0<\sin x<x$,当 $0<x_n<\pi$ 时,有

$$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n<\pi.$$

已知 $0<x_1<\pi$,由数学归纳法知对一切 $n=1,2,\cdots$,有 $0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n$,即 $\{x_n\}$ 单调减少且 $x_n>0$.由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,记为 a,且 $a\geqslant 0$.

等式 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边令 $n\to\infty$ 取极限,得 $a=\sin a$.

由于 $f(x)=x-\sin x$,当 $0<x<\pi$ 时,$f'(x)=1-\cos x>0$,易知 $x=0$ 是解且唯一.故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

【解析】　(Ⅱ)因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$,当 $n\to\infty$ 时 $x_n\to 0$,考虑函数极限:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\sin x-x}{x^3}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\cos x-1}{3x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

从而　　　　原式 $=e^{-\frac{1}{6}}$.

(2009 年,数学二)

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx\,dx=$ ________.

【解析】　令　$I_n=\int e^{-x}\sin nx\,dx=-e^{-x}\sin nx+n\int e^{-x}\cos nx\,dx$

$$=-e^{-x}\sin nx-ne^{-x}\cos nx-n^2I_n,$$

所以
$$I_n=-\frac{(\sin nx+n\cos nx)e^{-x}}{n^2+1}+C,$$

即
$$原式=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{(n\cos nx+\sin nx)e^{-x}}{n^2+1}\Bigg|_0^1\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{(n\cos n+\sin n)e^{-1}}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+1}\right]=0.$$

(2011 年,数学一/数学二)

(Ⅰ)证明:对任意的正整数 n,都有$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$成立;

(Ⅱ)设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\quad(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{a_n\}$收敛.

【证明】 (Ⅰ)**【方法 1】** 令 $F(x)=x-\ln(1+x)\,(x>0)$,则 $F'(x)=1-\frac{1}{1+x}>0\,(x>0)$,即当 $x>0$ 时 $F(x)$ 单调增加.又 $F(0)=0$,所以 $F(x)>0\,(x>0)$,从而

$$F\left(\frac{1}{n}\right)>0,即\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

再令 $G(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}\,(x>0)$,则 $G'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}>0\,(x>0)$,$G(x)\,(x>0)$单调增加.又 $G(0)=0$,所以 $G(x)>0\,(x>0)$,从而

$$G\left(\frac{1}{n}\right)>0,\ 即\ \frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

综上可知,有 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

【方法 2】 令 $f(x)=\ln x\,(x>0)$.对任意正整数 n,在$[n,\ n+1]$连续,$(n,\ n+1)$上可导;根据拉格朗日中值定理,得

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(1+n)-\ln n=\frac{1}{\xi},其中\ n<\xi<n+1,$$

所以
$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

(Ⅱ)**【方法 1】** 由(Ⅰ)知,当 $n\geqslant1$ 时,有

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

$$>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n$$

$$=\ln(1+n)-\ln n>0,$$

故数列$\{a_n\}$单调减少且有下界，所以$\{a_n\}$收敛.

【方法2】 因为

$$a_n=\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right],\text{且}\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{2n^2}(n\to\infty).$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以数列$\{a_n\}$收敛.

(2012年，数学二)

设$a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列$\{S_n\}$有界是数列$\{a_n\}$收敛的(　　).

(A)充分必要条件　　(B)充分非必要条件

(C)必要非充分条件　　(D)既非充分也非必要条件

【解析】 因为$a_n>0(n=1,2,\cdots)$，所以数列$\{S_n\}$是单调增加的.

如果$\{S_n\}$有界，根据单调有界准则，知$\{S_n\}$的极限存在，记$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$.由此可得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0,$$

即数列$\{a_n\}$收敛.可知数列$\{S_n\}$有界是数列$\{a_n\}$收敛的充分条件.

但是，若$\{a_n\}$收敛，$\{S_n\}$却未必有界.例如，取$a_n=1(n=1,2,\cdots)$，则$\{a_n\}$收敛，但$\{S_n\}=n$无上界.可见$\{S_n\}$有界并非是$\{a_n\}$收敛的必要条件.故选(B).

(2012年，数学二)

$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$______.

【解析】

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{1+n^2}+\frac{n^2}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n^2}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

(2012 年,数学二)

(Ⅰ)证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$(n 为大于 1 的整数)在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个实根;

(Ⅱ)记(Ⅰ)中的实根为 x_n,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求此极限.

【证明】 (Ⅰ)令 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1(n>1)$,则 $f(x)$ 在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上连续,且

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-1=-\frac{1}{2^n}<0,\ f(1)=n-1>0,$$

由闭区间上连续函数的零点定理知,方程 $f(x)=0$ 在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内至少有一个实根.

当 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时,$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>1>0$,故 $f(x)$ 在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内单调增加.

综上所述,方程 $f(x)=0$ 在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个实根.

(Ⅱ)由 $x_n\in\left(\frac{1}{2},1\right)$知数列$\{x_n\}$有界,又

$$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n=1,\quad x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n-1}+\cdots+x_{n+1}=1.$$

因为 $x_{n+1}^{n+1}>0$,所以 $x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n>x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n-1}+\cdots+x_{n+1}$,
于是有 $x_n>x_{n+1}$,$n=1,2,\cdots$即$\{x_n\}$单调减少.综上所述数列$\{x_n\}$单调有界,故$\{x_n\}$收敛.

记 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.由于$\frac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}=1$,令 $n\to\infty$ 并注意到$\frac{1}{2}<x_n<x_1<1$,则有$\frac{a}{1-a}=1$,解得 $a=\frac{1}{2}$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

(2013 年,数学二)

设函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的最小值;

(Ⅱ)设数列$\{x_n\}$满足 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$.证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求此极限.

【解析】 (Ⅰ)$f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$,令 $f'(x)=0$,解得 $f(x)$ 的唯一驻点 $x=1$.

又 $f''(1)=\left.\frac{2-x}{x^3}\right|_{x=1}=1>0$,故 $f(1)=1$ 是唯一极小值,即最小值.

(Ⅱ)由(Ⅰ)的结果知 $\ln x+\frac{1}{x}\geqslant 1$,从而有 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1\leqslant \ln x_n+\frac{1}{x_n}$,于是 $x_n\leqslant x_{n+1}$,即数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

又由题设知 $\ln x_n$ 有意义,故 $x_n>0$,于是 $x_{n+1}>0$;故由 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$,知 $\ln x_n<1$,因此 $x_n<\mathrm{e}$.从而数列 $\{x_n\}$ 单调增加,且有上界,故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,可知 $a\geqslant x_1>0$.在 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$ 两边取极限,得 $\ln a+\frac{1}{a}\leqslant 1$,又由(Ⅰ)知:$\ln a+\frac{1}{a}\geqslant 1$,故 $\ln a+\frac{1}{a}=1$,可得 $a=1$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

(2016 年,数学二/数学三)

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)=$______.

【解析】
$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{k}{n}\sin\frac{k}{n}$$
$$=\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\mathrm{d}\cos x$$
$$=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x\mathrm{d}x=\sin 1-\cos 1.$$

(2018 年,数学一/数学二/数学三)

设数列 $\{x_n\}$ 满足,$x_1>0$,$x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1$.证:数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【证明】 先证 $\{x_n\}$ 有界性.设 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x$,$x>0$,则有
$$f'(x)=\mathrm{e}^x-1>0.$$
因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 取最小值,故 $f(x)>f(0)=0$,$\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}>1$,易证得
$$\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\frac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n}>1.$$
即 $x_{n+1}>0$.故 x_n 有下界.

再证 $\{x_n\}$ 的单调性,由拉格朗日中值定理得

$$e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}=\frac{e^{x_n}-e^0}{x_n-0}=e^{\xi},\xi\in(0,\ x_n).$$

故 $x_{n+1}=\xi<x_n$，数列$\{x_n\}$单调减.由单调有界原理可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则有 $ae^a=e^a-1$；又因为当 $x>0$ 时，$g(x)=xe^x-e^x+1$ 的导数$g'(x)=xe^x>0$，故 $g(x)$只有唯一的零点 $x=0$，所以 $a=0$.

题型 1.1.4 函数极限的计算

(2008 年，数学一/数学二)

求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【解析】

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2x}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

(2008 年，数学三)

计算$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

【解析】

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

(2009 年，数学二)

求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4x}$.

【解析】

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{\sec^2x}{1+\tan x}}{4x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\tan x-\sec^2x}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\tan^2x}{4x}=\frac{1}{4}.$$

(2009 年,数学三)

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$______.

【解析】 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\dfrac{1}{3}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}\sin x}{\dfrac{2}{3}x}=\dfrac{3}{2}e.$

(2010 年,数学一)

极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=($　　$).$

(A) 1　　(B) e　　(C) e^{a-b}　　(D) e^{b-a}

【解析】 当 $a=b$ 时,

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a^2}{x^2-a^2}\right)^{\frac{x^2-a^2}{a^2}\cdot\frac{a^2}{x^2-a^2}\cdot x}=e^0=1;$$

当 $a\neq b$ 时,

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x+ab}\cdot\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\cdot x}=e^{a-b}.$$

故选(C).

(2010 年,数学三)

设 $f(x)=\ln^{10}x,g(x)=x,h(x)=e^{\frac{x}{10}}$,则当 x 充分大时有(　　).

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$　　(B) $h(x)<g(x)<f(x)$

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$　　(D) $g(x)<f(x)<h(x)$

【解析】 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln^{10}x}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{10}}}{x}=+\infty,$$

所以当 x 充分大时,有 $f(x)<g(x)<h(x)$.故选(C).

(2010 年,数学三)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【解析】 设 $y=(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$,则 $\ln y=\dfrac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}=\dfrac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}$,

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^{\frac{\ln x}{x}}}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-\ln x}{x}}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2+\ln x}{x^2}}{e^{\frac{\ln x}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2+\ln x}{1-\ln x}=-1.$$

所以 原式$=e^{-1}$.

(2011 年,数学一)

求极限$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

【解析】 因为 $\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}=\left\{1+\left[\dfrac{\ln(1+x)-x}{x}\right]\right\}^{\frac{x}{\ln(1+x)-x}\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{x}\cdot\frac{1}{e^x-1}}$,

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right]\cdot\frac{1}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2},$$

所以 原式$=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

(2011 年,数学二)

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

【解析】 原式$=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{2^x-1}{2}\right)^{\frac{2}{2^x-1}\cdot\frac{2^x-1}{2x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{2^x-1}{2x}}=e^{\frac{\ln2}{2}}=\sqrt{2}$.

(2011 年,数学三)

设$f(x)=\lim\limits_{t\to0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$,则$f'(x)=$ ________.

【解析】 由于$f(x)=\lim\limits_{t\to0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}=x\lim\limits_{t\to0}\left[(1+3t)^{\frac{1}{3t}}\right]^{3x}=xe^{3x}$,

所以 $f'(x)=e^{3x}+3xe^{3x}=(1+3x)e^{3x}$.