



High Dimensional Information Geometry and
Geometric Invariants

高维信息几何与 几何不变量

曹文明 刘 宁 梅艳萍/著



科学出版社

高维信息几何与几何不变量

High Dimensional Information Geometry and Geometric Invariants

曹文明 刘 宁 梅艳萍 著



科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书针对具有人工智能的内容搜索产生的信息几何与几何不变量问题,探索一种新的内容搜索方法,从信息学角度出发,给出几何不变量,并研究其几何不变量的性质,为内容搜索问题提供有效的解决方案。本书包含高维信息几何的数据相似性度量、非标准同源连续性、图像夹角特征提取方法以及交互式图像内容信息几何搜索方法、基于高维信息几何的手势识别、图像特征提取方法、视频人脸检测与预处理、几何代数不变量、共形几何代数不变量、空间点元素结构的不变量和空间线元素结构的不变量。

本书适合从事智能信息处理、人工智能、计算机视觉等领域工作的学者和研究人员阅读和参考,也可以作为理工院校相关专业研究生的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高维信息几何与几何不变量/曹文明,刘宁,梅艳萍著. —北京:科学出版社, 2018.8

ISBN 978-7-03-055663-9

I. ①高… II. ①曹… ②刘… ③梅… III. ①微分几何 IV. ①O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 292823 号

责任编辑:周 涵/责任校对:杨 然
责任印制:张 伟/封面设计:无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京虎彩文化传播有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 8 月第 一 版 开本:720×1000 B5

2019 年 1 月第二次印刷 印张:10 1/2 彩插:6

字数:212 000

定价:78.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

近年来,随着移动互联网与大数据技术的不断发展与普及,图像与视频采集设备不断增多。如何对海量视频图像数据进行高效智能的分析和处理,对视频图像的内容进行筛选和过滤,对特定的目标进行快速精准的检测和搜索,从海量的视频图像数据中发现重要而有价值的线索,使计算机逐渐具有与人类类似的视觉智能,已成为亟待解决的重要问题,而这些问题的解决,在很大程度上都依赖于图像与视频识别技术的改进与发展。为此,本书在高维信息几何相关理论的基础上,根据需求分别在高维信息几何、图像特征提取、人脸检测与预处理以及信息几何不变量理论方面进行研究。

本书共 11 章,内容编排如下。

第 1 章介绍了基于高维信息几何的图像内容搜索研究背景,以及国内外研究进展状况。主要介绍了高维信息几何理论和仿生模式识别的相关理论,对其应用作简单介绍,并且提出了“非标准同源连续性”的概念。

第 2、3 章介绍了传统的图像代数特征提取方法,并且提出了基于夹角的特征提取方法。比较了 EUD 和 CAD 的不同,并且介绍了在主成分分析中两者的区别。

第 4、5 章主要介绍了基于高维信息几何的图像内容搜索算法,提出了一种基于高维信息几何的图像搜索方法。该方法是建立在感兴趣的片面性方面的,也就是如何从一幅复杂的图片中截取出用户感兴趣的区域。在截取感兴趣的区域之后,对该区域应用高维信息相关原理进行处理,得到该区域的高维特征向量。最终进行高维特征向量的相似性度量,进而实现图像的搜索。通过和传统方法对比,显示了该方法在查准率以及运算时间方面的优势,并给出了高维信息几何在手势识别方面的应用。通过前景提取、高维空间映射等方法,实现了手势区域的检测和指尖点的精确定位。实验结果也展示了高维信息几何在指尖定位方面的优势。

第 6、7 章分别提出了采用图像主要区域的长宽比特征、图像分块区域代表点间的位置关系特征以及图像环状区域内像素分布向量特征进行图像识别,并在此基础上取长补短,通过组合这三种几何结构的权值,提出了一种基于图像结构与分布的多特征图像识别方法,在视频数据中得到了良好的应用。

第 8、9 章介绍了与不变量相关的基础理论知识。首先,介绍了共形空间中点、线、面等几何体的表示;其次,以这些元素为基础介绍了一些基本运算(包括内积、外积和几何积),还介绍了齐次坐标的表示方法和使用优点;再次,详细介绍了目标成像模型和一般不变量技术中用到的双线性约束的基本知识,并简要介绍了已有

的几何代数不变量结构及其算法, 以及空间几何点结构的不变量模型与计算方法; 最后, 对这些基本理论进行了总结。

第 10、11 章首先介绍了空间两相邻平面上八点几何结构的射影不变量, 详细介绍了该不变量的计算方法, 并将该计算方法与共面五点交比不变量和 Zhu 等提出的空间六点不变量计算方法做了比较, 并以此为基础, 提出了三相邻平面上七条直线几何结构所具有的射影不变量, 同时利用本书算法得到了陈柘等提出的三相邻平面五直线结构的不变量, 并通过实验验证了其稳定性和鲁棒性。

本书研究了高维信息几何理论及其应用, 书中许多内容是作者及其团队的最新研究成果, 其中部分研究成果尚未正式发表。借本书出版之际, 要特别感谢本书第一作者的老师王守觉院士, 本书第一作者在他的指导下才进行了高维信息相关研究, 取得了大量的成果, 还要感谢深圳大学原校长谢维信教授和科学出版社周涵老师, 以及其他给本书出版提供帮助的老师与学生们。

本书得到了国家自然科学基金 (No.61375015, 61771322), 深圳市基础研究项目 (No.NCYJ20160307154630057) 的资助, 在此一并表示感谢。

本书疏漏和不足之处在所难免, 恳请广大专家与学者批评指正。

曹文明 刘宁 梅艳萍

2018 年 3 月 6 日于深圳大学

目 录

第 1 章 高维信息几何	1
1.1 高维信息几何相关理论	1
1.1.1 高维信息几何的定理	1
1.1.2 高维信息几何中的数据降维方法	4
1.1.3 数据相似性度量方法探究	8
1.2 仿生模式识别理论	12
1.2.1 仿生模式识别 (BPR) 原理简介	12
1.2.2 非标准同源连续性	13
1.3 本章小结	14
参考文献	15
第 2 章 图像特征提取方法研究	16
2.1 图像代数特征提取	16
2.1.1 线性判别式分析	16
2.1.2 独立成分分析	18
2.1.3 奇异值分解法	19
2.1.4 图像变换系数特征提取	19
2.2 夹角特征提取法	19
2.3 夹角特征提取法的几何解释	23
2.4 本章小结	24
参考文献	24
第 3 章 相似性度量分析	25
3.1 距离度量概述	25
3.2 最近邻查询中欧氏距离和夹角余弦距离的理论分析	26
3.2.1 符号和定义	26
3.2.2 EUD 和 CAD 的比较	27
3.3 主成分分析中欧氏距离和夹角余弦距离的区别	30
3.3.1 基本模型	30
3.3.2 信息相似性或不相似性的评估	31
3.4 实验结果与分析	35
3.4.1 实验平台	35

3.4.2	图片分类的结果	35
3.4.3	两种距离度量方式的人脸识别率对比	39
3.5	本章小结	41
	参考文献	42
第 4 章	交互式图像内容信息几何搜索方法	44
4.1	交互式图像检索算法	44
4.1.1	算法思想	44
4.1.2	具体算法步骤	45
4.2	实验结果与分析	48
4.2.1	实验平台	48
4.2.2	ORL 图片相似检索结果	48
4.2.3	COREL 图片相似检索结果	49
4.2.4	查准率分析	59
4.3	不同相似度实验结果对比	59
4.4	本章小结	60
	参考文献	60
第 5 章	基于高维信息几何的手势识别研究	62
5.1	研究背景	62
5.2	手势识别算法	63
5.2.1	传统算法探究与实现	63
5.2.2	本章算法	66
5.3	实验结果与分析	69
5.3.1	实验平台	69
5.3.2	实验结果	70
5.4	本章小结与展望	74
5.4.1	本章小结	74
5.4.2	展望	75
	参考文献	75
第 6 章	图像特征提取方法研究	77
6.1	图像主要区域的长宽比特征	77
6.2	图像分块区域及其代表点间的位置关系特征	79
6.3	图像环状区域内像素分布特征	81
6.4	三种结构特征的权值组合	83
6.5	实验结果与分析	84
6.5.1	实验平台与数据库	84

6.5.2 实验结果分析	84
6.6 本章小结	89
参考文献	89
第 7 章 视频人脸检测与预处理	90
7.1 基于 AdaBoost 算法的视频人脸检测	90
7.1.1 Haar 特征与积分图	90
7.1.2 AdaBoost 学习算法	92
7.1.3 级联分类器	94
7.2 人脸图像预处理	95
7.2.1 人眼检测	95
7.2.2 人脸预处理	97
7.3 实验结果与分析	100
7.4 本章小结	101
参考文献	101
第 8 章 几何代数不变量	102
8.1 几何不变量	102
8.2 几何代数不变量的研究现状	105
8.2.1 不变量的研究史	105
8.2.2 几何代数的发展与应用	108
参考文献	109
第 9 章 共形几何代数不变量	114
9.1 共形空间中几何体的表示	114
9.2 共形空间中的基本运算	116
9.2.1 内积	116
9.2.2 外积	117
9.2.3 几何积	118
9.2.4 齐次坐标	119
9.3 目标成像模型与双线性约束	119
9.3.1 目标成像模型	119
9.3.2 双线性约束与基础矩阵	122
9.4 已有的不变量理论	123
9.5 本章小结	126
参考文献	127
第 10 章 空间点元素结构的不变量	128
10.1 三维空间点与二维平面点的射影变换关系	128

10.2 空间两相邻平面上八点几何结构的不变量	129
10.2.1 空间两相邻平面上八点几何结构不变量的计算	129
10.2.2 与其他方法的比较	132
10.2.3 算法设计	135
10.3 实验结果与分析	136
10.3.1 实验平台	136
10.3.2 仿真实验	136
10.3.3 真实图像实验	140
10.4 本章小结	146
参考文献	147
第 11 章 空间线元素结构的不变量	148
11.1 空间两相邻平面三线投影关系	148
11.2 三相邻平面七线几何结构的不变量	150
11.2.1 空间七线几何结构不变量的计算	150
11.2.2 与其他方法的比较	152
11.3 实验结果与分析	152
11.3.1 实验平台	152
11.3.2 仿真实验	153
11.3.3 加噪实验	157
11.4 本章小结	160
参考文献	160

彩图

第 1 章 高维信息几何

高维信息几何是建立在低维几何学的基础上,依托低维几何学的相关公理、性质,进而推广到高维空间,并且结合信息学的相关理论,形成自成一套理论体系的方法。其将不同空间的信息联系到一体,将有助于提高不同维度的信息之间的传递。本章针对高维信息几何中的不足之处,提出了子空间夹角、不同维向量之间的夹角,并在传统相似性度量的基础上,提出了主要角的构建方法。最后对仿生模式识别^[1]中的“同源连续性”进行进一步完善,提出了“非标准同源连续性”的概念。

1.1 高维信息几何相关理论

1.1.1 高维信息几何的定理

1. 基本概念

高维空间: 由于人们接触最多的是三维空间,即一般的由 x, y, z 组成的空间。高维空间一般指维数大于 3 的空间,其数学表示为 $(x_1, x_2, \dots, x_n), n > 3$ 。

点: 高维空间中的点的定义来自于物理学中质点的抽象。点没有大小,没有方向,其在二维空间中面积无限小,在高维空间中体积无限小。

直线: 空间中的某一点沿着特定的方向运动,则其轨迹形成了直线。在平面上,两点可以确定一条直线。

距离: 在物理学上,距离是由起点到终点的向量的位移。在高维空间中,假设存在两点 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 则 X 和 Y 之间的距离被定义为

$$D(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

夹角: 两条直线相交构成四个角,它们是两对对顶角,我们把这两对对顶角中较小的一对角的其中一个叫做夹角。夹角大于等于 0° , 小于等于 90° 。

2. 子空间的夹角

定义 1.1 在向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两条直线 A, B , 其可以被 $\mathbb{R}^n$ 中的单位向量 a, b 表示, 其中 $\|a\| = \|b\| = 1$, 即 $A = \text{span}\{a\}, B = \text{span}\{b\}$, 则 A, B 之间的夹角如图 1.1 所示。

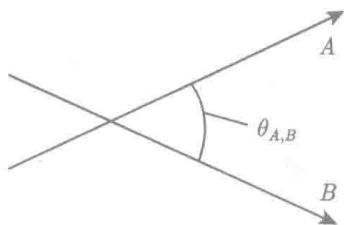


图 1.1 两直线之间的夹角

设 A, B 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的 r 维子空间, 子空间 A, B 可以表示为 r 个线性独立的向量的集合:

$$A = \text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$$

$$B = \text{span}\{b_1, b_2, \dots, b_r\}$$

子空间 A, B 之间的角度关系, 可以用图 1.2 中一系列 r 个主要角 $\theta_k, 1 \leq k \leq r$ 来描述, 这个主要角被表示为两个主要向量 $a_k \in A, b_k \in B$ 之间的夹角。假设 $a_k \in \{a_1, a_2, \dots, a_r\}, b_k \in \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$, 并且, 当 $a_k = b_k$ 时, $\theta_k = 0$; 其他情况时 $0 < \theta_k \leq \pi/2$ 。

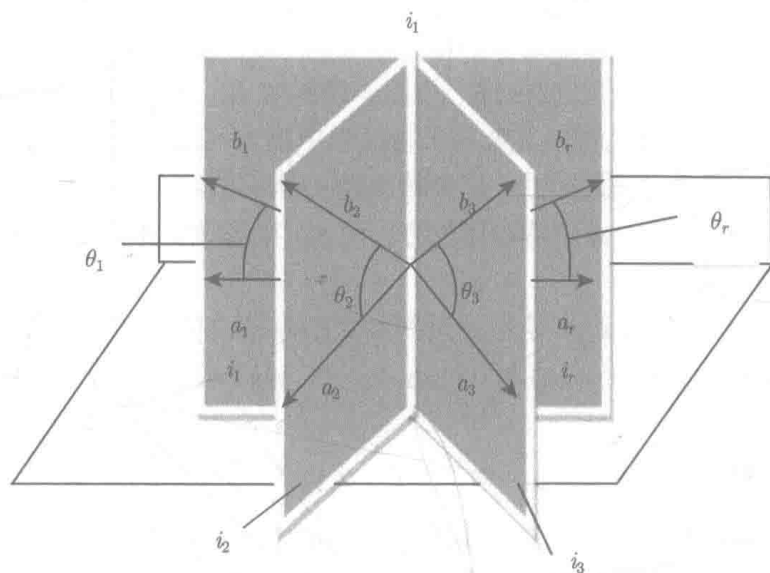


图 1.2 子空间夹角示意图

另外, 当 $\theta_k = 0$ 时, 向量对 $\{a_k, b_k\}, 1 \leq k \leq r$ 包含两条相互正交的线; 当 $0 < \theta_k \leq \pi/2$ 时向量对组成面 i_k 。因此, 如果 $a_k \nparallel b_k$ 且 $a_l \nparallel b_l$, 其中 $1 \leq k \neq l \leq r$, 则面 i_k 和面 i_l 相互正交。因此主要角的余弦值有以下几种情况: 当 $a_k = b_k$ 时, $\cos \theta_k = 1$; $a_k \perp b_k$ 时, $\cos \theta_k = 0$; 其他情况下 $0 < \cos \theta_k < 1$ 。由此, 两个子空间

A, B 之间的夹角被定义为

$$\cos \theta_{A,B} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_r$$

3. 不同维向量夹角

令 E^n 是一个 n 维欧氏内积空间, 对于两个信息向量 a 和 b , $a \cdot b$ 表示其内积。符号 ${}^\circ F^p E^n$ 表示由 p ($1 \leq p \leq n$) 个属于 E^n 的实系数向量组成的线性空间。 ${}^\circ F^p E^n$ 中的元素被称作 p -向量。关于 ${}^\circ F^p E^n$ 中的内积定义如下:

对于一对 p -向量, $a = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_p$, $b = b_1 \wedge b_2 \wedge \cdots \wedge b_p$ 。规定 $\langle a, b \rangle = \det(a_i, b_i)$ 。对于 $1 \leq p \leq q \leq n$, 可以得出如下推论。

推论 1.1 对任意的 $\alpha, \beta \in {}^\circ F^p E^n$, 我们有 $\langle a, a \rangle \langle b, b \rangle \geq \langle a, b \rangle^2$, 其中等式成立当且仅当 α 的标量因子不同于 β 。

注 p -向量的长度被定义为 $|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$, 当且仅当 $|\alpha| = 0$ 时, $\alpha = 0$ 。

令 $a = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_p$ 是一个非零可分解的 p -向量, 则其对应于 E^n 中的一个由 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 组成的 p 维子空间 A^p 。反过来, 对应于向量子空间 A^p 的基。

假设 $\alpha = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_p$, $\beta = b_1 \wedge b_2 \wedge \cdots \wedge b_q$, 如果 A 和 B 是相应的 α 和 β 的子空间, $B_\perp$ 是 E^n 中 B 的正交补, 则

$$a_j = a_j^H + a_j^V$$

其中, $a_j^H \in B$, $a_j^V \in B_\perp$, $j = 1, 2, \cdots, p$ 。

我们提出了如下的结论:

$$\begin{aligned} \alpha_H &= a_1^H \wedge a_2^H \wedge \cdots \wedge a_p^H \\ \alpha_V &= a_1^V \wedge a_2^V \wedge \cdots \wedge a_p^V \\ \alpha_M &= \alpha - \alpha_H - \alpha_V \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中, α_H , α_V 和 α_M 分别叫做 α 的水平、纵向和混合部分。通过直接计算, 我们得到如下引理。

引理 1.1 在子空间 A 中, 变换基的公式 (1.1) 的分解是不变的。准确地说, 在线性子空间 A 中, 可以选择另外的基 $\{a_i\}$ 。相应地有 p -向量 α 和其投影 α_H , α_V 和 α_M 以及

$$\alpha = k\alpha, \quad \alpha_H = k\alpha_H, \quad \alpha_V = k\alpha_V, \quad \alpha_M = k\alpha_M$$

k 为非零的尺度因子。

引理 1.2 $\langle \alpha, \alpha_H \rangle \geq 0$, 当且仅当 $\alpha_H = 0$ 时等号成立。

引理 1.3 $|\alpha|^2 = |\alpha_H|^2 + |\alpha_V|^2 + |\alpha_M|^2$ 。

定义 1.2 假设存在 ${}^{\circ}F^p E^n$ 中的子空间 A^p 和 B^q , 其中 $p \leq q$, 则子空间之间的夹角 θ 被定义为

$$\theta = \arccos \frac{|\alpha_H|}{|\alpha|} \quad (1.2)$$

注 (1) 上述 p 维角度的定义是传统自然角度的推广, 比如两条直线之间、一条直线和一个平面, 以及两个平面之间。通过引理 1.3, 我们得知 θ 满足 $0 \leq \theta \leq \pi/2$, 若 $\theta = \pi/2$, 则表明子空间 A 和 B 是正交的。

(2) 当 $p = q$ 时, 公式 (1.2) 可以写为 $\theta = \arccos \frac{|\langle \alpha, \beta \rangle|}{|\alpha| \cdot |\beta|}$ 。在这种情况下, 在 E^n 中, p 维向量 α 和 β 的 p 维夹角和欧氏空间中两向量之间的夹角是相同的。

1.1.2 高维信息几何中的数据降维方法

直观上认为, 掌握的特征信息越多, 分类、识别、检索的效果越好。然而, 实际上, 随着数据维数的增加, 读者有理由怀疑数据之间是否存在相关性, 这种相关性不仅会使数据计算的复杂度增加, 也给分类带来不利的影响。

在实际的分类问题中, 随着特征维数的增加, 存在一个最大值, 当特征数目超过这个最大值时, 其对分类是不利的, 使分类效果下降, 这在模式分类中也被称作维数灾难。比如, 想要区分苹果和梨子, 其表面的颜色和纹理可能是比较好的视觉特征。但是当加入体积和重量之后, 其对分类可能是无益的, 反而会对分类造成干扰, 使分类产生错误。基于以上原因, 数据特征的降维是很有意义的。通过选择好的特征, 舍弃对分类没有太大帮助的“多余的”特征, 进而使分类效果得到改善。在实际应用中, 降维又存在特征选择和特征抽取两种方法。如图 1.3 所示, 特征选择是指选择全部特征的一个子集作为特征向量; 特征抽取是指通过已有特征的组合建立一个新的特征子集。

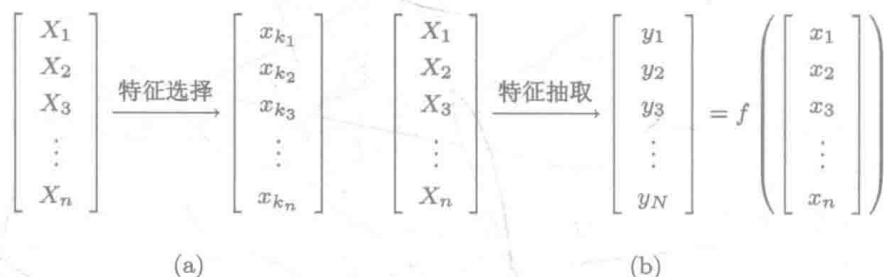


图 1.3 特征选择和特征抽取

在人脸识别中, 文献 [1] 通过人脸特征选择来实现数据降维。其首先通过双眼点, 然后在不同方向选取不同的点, 进而将数据降维到 512 维上进行处理。

特征抽取最常用的方法之一便是主成分分析 (Principal Component Analysis, PCA), 其目的旨在去除数据之间的相关性, 将不重要的数据剔除, 进而提取出能

够代替原始数据的“简要”数据。

对于 d 维空间中的 n 个样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 如何用低维空间来代替它们? 对于 0 维的情况, 即如何仅仅用一个 d 维向量 x_0 就能代替这 n 个样本, 使得该向量到各个样本 $x_k, k = 1, \dots, n$ 之间的距离平方和达到最小。在这里, 可以将误差函数 $D_0(x_0)$ 定义为

$$D_0(x_0) = \sum_{k=1}^n \|x_0 - x_k\|^2$$

假设用 $m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ 表示样本的均值, 则有

$$\begin{aligned} D_0(x_0) &= \sum_{k=1}^n \|(x_0 - m) - (x_k - m)\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \|x_0 - x_k\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n (x_0 - m)^T (x_k - m) + \sum_{k=1}^n \|x_k - m\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \|x_0 - x_k\|^2 - 2 (x_0 - m)^T \sum_{k=1}^n (x_k - m) + \sum_{k=1}^n \|x_k - m\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \|x_0 - m\|^2 + \sum_{k=1}^n \|x_k - m\|^2 \end{aligned}$$

因为上式的第二项与 x_0 无关, 因此 $D_0(x_0)$ 在 $x_0 = m$ 时取得最小值。这表明, 在最小均方意义下最好的代表原来 n 个样本的 d 维向量就是这 n 个样本的均值。

当维数为 1 时, 可以将所有样本向一维空间 (即一条直线) 进行投影, 并且该直线通过样本的均值, 通过投影便可得到样本的一维空间的直观表达。假设有一条直线通过样本的均值, 并且该直线上的单位向量可以表示为 e , 则这条直线可以用方程式表达为

$$x = m + ae$$

其中, a 是一个常数, 用于表示该直线上, 任意一点到点 m 的距离。如果用 $m + a_k e$ 表示 x_k , 那么其误差函数为

$$\begin{aligned} D_1(a_1, \dots, a_n, e) &= \sum_{k=1}^n \|(m + a_k e) - x_k\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \|a_k e - (x_k - m)\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \|e\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n a_k e^T (x_k - m) + \sum_{k=1}^n \|x_k - m\|^2 \end{aligned}$$

由于 $\|e\| = 1$, 对 a_k 求偏导, 并令结果为 0, 可得

$$a_k = e^T(x_k - m)$$

该结果表明, 只要把 x_k 向样本均值的直线 e 作投影, 就可以得到最小均方误差下的结果。

如何寻找 e 的最优方向, 有如下推导:

$$\begin{aligned} D_1(e) &= \sum_{k=1}^n a_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n \|x_k - m\|^2 \\ &= - \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n \|x_k - m\|^2 \\ &= - \sum_{k=1}^n (e^T(x_k - m))^2 + \sum_{k=1}^n \|x_k - m\|^2 \\ &= - \sum_{k=1}^n e^T(x_k - m)(x_k - m)^T e + \sum_{k=1}^n \|x_k - m\|^2 \\ &= -e^T \left(\sum_{k=1}^n (x_k - m)(x_k - m)^T \right) e + \sum_{k=1}^n \|x_k - m\|^2 \\ &= -e^T S e + \sum_{k=1}^n \|x_k - m\|^2 \end{aligned}$$

上式 $S = \sum_{k=1}^n (x_k - m)(x_k - m)^T$ 被称为散布矩阵, 它实际上等于样本协方差的 $n-1$ 倍。为了使 $D_1(e)$ 最小, 即要使 $e^T S e$ 最大, 可以使用拉格朗日乘子法求解, 其约束条件为 $\|e\| = 1$ 。

令 $v = e^T S e - \lambda(e^T e - 1)$, 其中 λ 为拉格朗日乘数, 对 e 求偏导, 可得

$$\frac{\partial v}{\partial e} = 2S e - 2\lambda e$$

令其梯度为 0, 有

$$S e = \lambda e$$

则可以得到 e 必须为散布矩阵的特征向量。

由此, 可以得到结论, 为了使 $e^T S e$ 最大, 可以将所有样本数据向一条直线进行投影, 且这条直线通过散布矩阵的最大特征值对应的特征向量。故, 在一维的情况下, 为了得到特征提取的数据, 可以将所有样本向经过特征向量的直线进行投影, 并且该特征向量为最大特征值所对应的特征向量。

将上述结论从一维推广至 d' 维, 则可得

$$x = m + \sum_{i=1}^{d'} a_i e_i$$

则新的误差准则函数为

$$D_{d'}(e_1, e_2, \dots, e_{d'}) = \sum_{k=1}^n \left\| \left(m + \sum_{k=1}^n a_{ki} e_i \right) - x_k \right\|^2$$

容易证明 $D_{d'}$ 在向量 $e_1, e_2, \dots, e_{d'}$ 分别为散布矩阵 S 的 d' 个最大特征值对应的特征向量的时候, 其取得最小值。因为散布矩阵是实对称矩阵, 因此这些特征向量都是相互正交的。这些特征向量构成了 x 的基向量。因此任何一个 d' 维空间的向量 x'_i 均可由这组基表示:

$$x'_i = m + \sum_{i=1}^{d'} a_{ki} e_i$$

式中的系数 $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{d'i}$ 被称为主成分。

图 1.4 为采用随机数降维的结果。从降维结果来看, 其保持了数据原有结构, 但是可以用更少的数据来代替原有数据。

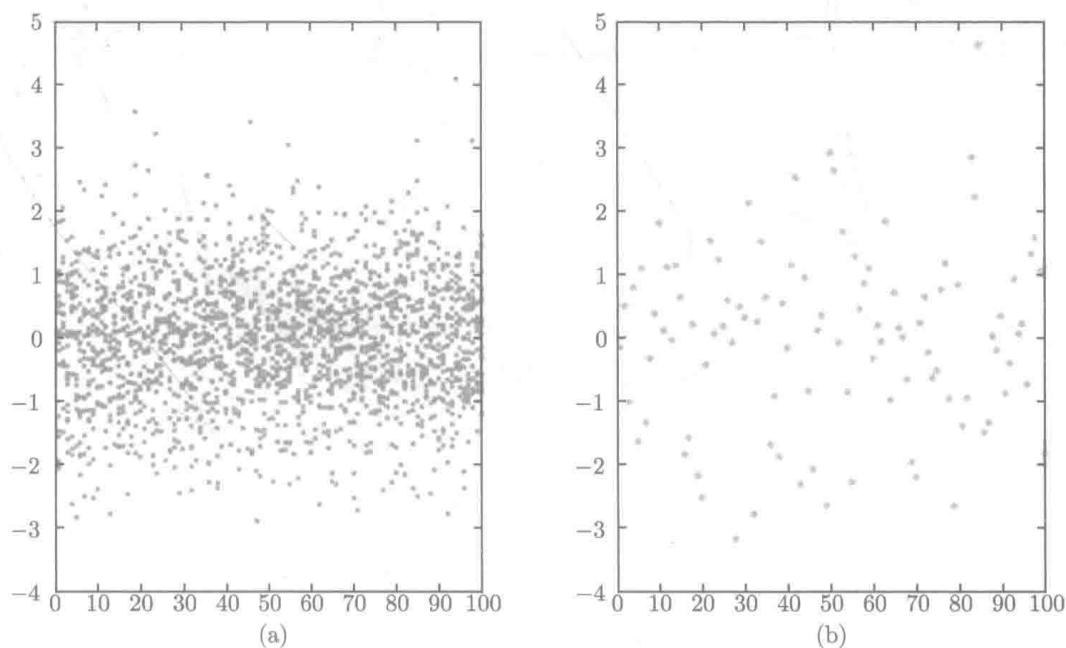


图 1.4 数据降维结果

1.1.3 数据相似性度量方法探究

1. 传统数据度量方法

相似性度量是图像检索的关键步骤, 一个好的度量函数可以减少对特征提取的苛刻要求。同理, 一个好的相似性度量函数也能够降低对特征提取的依赖程度。因此, 如何寻找到一个合适的度量函数, 对于图像检索来说是至关重要的。传统意义上, 图像检索的相似性度量方法一般有距离度量和相似系数度量的方法。本节在探讨传统相似性度量的基础上, 提出了一种以子空间正切方式的度量方法。

(1) 假设存在两个向量 $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 则 Minkowski 距离 (闵氏距离) 被定义为

$$D(x, y) = \left(\sum_{i=0}^n |x_i - y_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

(2) Euclidean 距离 (欧氏距离, 简称 EUD) 是目前最常用的距离度量方式, 其由平面坐标中两点之间的距离演变而来, 目前在图像检索、图像配准中都有很广泛的应用。其公式为

$$D(x, y) = \left(\sum_{i=0}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

由上式可见, 当 $r = 2$ 时, 闵氏距离恰好与欧氏距离相同。

(3) Manhattan 距离 (曼哈顿距离) 也称作街区距离, 其计算简单, 在某些场合效果很好。其公式如下:

$$D(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

(4) Hausdorff 距离。假设存在高维空间中的两个子集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$, 则这两个子集之间的 Hausdorff 距离被定义为

$$H(A, B) = \max \{h(A, B), h(B, A)\}$$

式中, $h(A, B) = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \|a - b\|$, $h(B, A) = \max_{b \in B} \min_{a \in A} \|b - a\|$, $\|\cdot\|$ 表示两点之间的范数。称 $h(A, B)$ 为有向 Hausdorff 距离。

(5) 相关系数。它由卡尔·皮尔逊 (Karl Pearson) 在 19 世纪 80 年代首先提出, 可用于反映两个变量之间的相关程度, 其在各个领域都有很好的应用。其公式