俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions

平稳随机函数导论

[苏] 雅格洛姆 著　　梁之舜 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

平稳随机函数导论

An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions

[苏] 雅格洛姆 著

梁之舜 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书共分两章.第一章介绍了平稳随机函数的一般理论;第二章介绍了平稳随机函数的线性外推及滤过.内容详尽.

本书适合大学师生及数学爱好者阅读学习.

图书在版编目(CIP)数据

平稳随机函数导论/(苏)雅格洛姆著;梁之舜译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.7

ISBN 978-7-5603-5483-5

Ⅰ.①平… Ⅱ.①雅… ②梁… Ⅲ.①随机函数 Ⅳ.①O211.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 101695 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　李　欣
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨圣铂印刷有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 11.25　字数 212 千字
版　　次　2016 年 7 月第 1 版　2016 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5483-5
定　　价　48.00 元

◎序　言

本书[①]的主要目的是给予平稳随机函数(序列或过程)的外推和滤过问题以尽可能初等的,而且在数学上严格的叙述.由于力求做初等的叙述,因而对于这问题最简单的特别情形——有理的(对 $e^{i\lambda}$ 或对应地对 λ)谱密度存在的情形,将予较多的注意.至于 A·H·柯尔莫哥洛夫(Колмогоров)关于一般情形的深入理论[21,22],本书仅将其结果做简短浏览.

本书第一章,包含平稳随机函数分谱理论相当全面的叙述.这一理论是以 A·Я·辛钦(Хинчин)的著作[20]为基础发展起来的,在今天已构成这领域中差不多全部研究的基础.这一章即使不和外推与滤过理论联系在一起,独立研究也很有趣味.

对读者只要求具有概率论与复变函数论的基础.要理解第二章,还要求知道希尔伯特空间几何的简单事实,例如在Н·И·阿

①原载 Успехи математических наук,Tom VII,выпуск 5(51),1952.

希耶泽尔(Ахиезер)与 И·М·格拉斯曼(Глазман)的书[92]第一章所讲的;否则读者只能承认某些关于这方面的论断了.

作者把 1948~1949 年在莫斯科国立大学对数学力学系的学生及研究生小组所讲的讲义,及 1951 年在该系由 E·Б·迪金(Дынкин)所主持的学生习明纳尔中所做的几个报告作为本书主要内容. 与 A·H·柯尔莫哥洛夫的多次谈话,对作者在随机函数领域的全部研究中起着重大的影响. 在这些论题上作者与 A·M·奥布可夫(Обухов)亦曾做过一些有结果的讨论. 在本书写作过程中,A·C·芒年(Монин)对作者有重要的帮助,他的有力的帮助大大加快了论文的完成进度. A·H·柯尔莫哥洛夫及 A·M·奥布可夫在阅读手稿后提出很多宝贵意见. 作者很高兴乘此机会向 A·H·柯尔莫哥洛夫、A·M·奥布可夫及 A·C·芒年表示诚挚的感谢.

A·M·雅格洛姆

◎ 引言

概率的数学理论研究大量现象，即考虑那些可以在同样的条件下重复多次的观察（实验，经验）. 同时，古典概率论的研究对象常常是所研究现象的数的特征，即依赖于观察结果而可取各种不同的值的变量，这种变量称为随机变量. 可以作为随机变量的例子有：(1) 掷骰子所掷出的点数；(2) 在确定时间内在某一电话站电话响动的次数；(3) 电灯泡从工厂出产后的寿命；(4) 用仪器测量某一个量所发生的误差，等等. 在概率论里，随机变量 ξ 将当作已给出的，如果已知它的分布函数

$$F(x) = P\{\xi < x\} \tag{1}$$

（我们将恒以符号 $P\{\cdots\}$ 表示满足括号内所写关系的概率）.

当观察的结果确定 n 个不同的数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 的情形，这些数可以考虑为一个多维的随机变量 $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$. 在概率论中也常考虑这种多维的量. 为了给出这些量，要应用多维的分布函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \cdots, \xi_n < x_n\} \tag{2}$$

它是一个多元函数.

可是近年来,在一系列物理与技术的研究中显示,除了考虑一维与多维随机变量外,还必须考虑随机函数,即那些由某些观察结果所确定,而在观察的多次重复中可取不同值的函数. 在布朗运动理论中(参阅[60-65]),我们有类似情况的最重要而又最典型的一例,其中每一个布朗质点的坐标就是这样的一个随机函数(依赖于时间). 电路的起伏现象(参看[65-69]) 亦接近于布朗运动. 严格地说,任一导体之端点的电压和导体的电流强度恒为时间的随机函数,因为电子的热运动引起了这些量的不可控制的脉动(热的噪声). 自从真空管的设计得到广泛的发展以后,电路中特别增加了噪声的作用:检波真空管为噪声的主要来源,这或由于同一时间经过真空管的电子数目的脉动("碎片效应"длробовой эффект) 或者是由于一系列其他原因. 收音机除由它本身的电路所引起的噪声外,常可观察到由于在大气中因曲折系数的不均匀而发生的电波散射和偶然放电的影响(气象的和工业的),而引起的接受讯号的偶然衰减现象. 最后,在最近得到很大发展的"追踪系统(следящие системы)" 具有本身特殊的噪声的来源(例如,参看[70]6 ~ 8 章). 一切上面所讲的都说明了为什么电的(特别是无线电的) 技术的发展,如同在现代所看到的,是对随机函数研究的蓬勃发展的强有力刺激物.

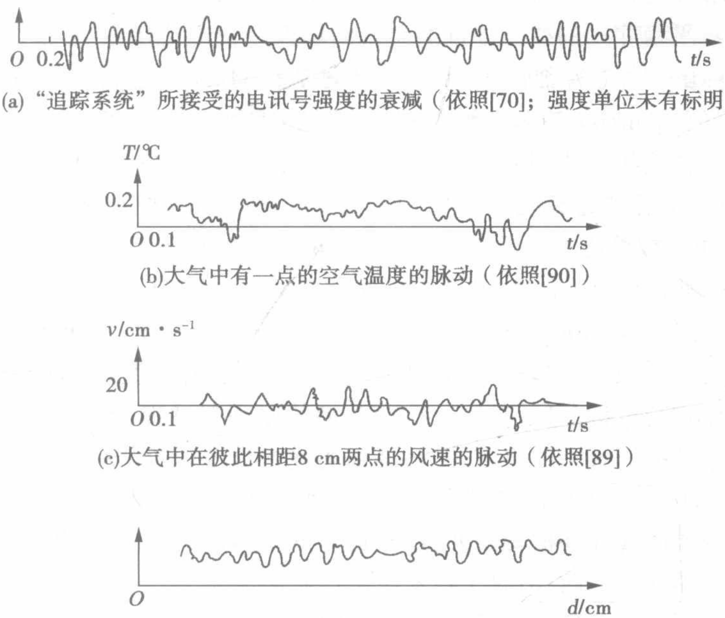
随机函数中电的噪声大概是最重要的一个例子,但当然还不是唯一的例子. 这种函数的另外的例是在湍流的点(特别是大气的质点) 的速度向量坐标,压力与温度;这样的随机函数倚赖于四个变量 —— 三个坐标和时间. 通常的棉纱给出了另一个例 —— 由于一系列不可控制的原因,棉纱常常是不完全均匀的,它的横截面的直径是这一截面的坐标的随机函数. 当考虑另外关于各种技术部门的一系列技术问题时,亦出现类似的随机函数①.

作为随机函数观察值的例,在图 1 中画了一些曲线,它们是由度量下面的值得来的:1)"追踪系统" 所接受的无线电讯号强度;2) 在各不同时间大气中某一点空气的温度;3) 在大气中两邻近点风速之差;4) 棉纱在不同点的直径. 我们强调指出这四个对应于完全不同现象的曲线的性质一致的特性. 这样的观察曲线我们将称为对应的随机函数的现实. 随机函数 $\xi(t)$ 的现实将以 $\xi^{(1)}(t)$, $\xi^{(2)}(t)$ 等表示;显然,对同一现象的各次不同的观测我们可能得到对应于随机函数的不同的现实.

随机函数的概念并不在古典概率论范围之内,为了它的研究,要求创立新

---

① 发生于地球物理及联系于它的研究的一系列函数亦可相约地看作随机函数. 例如,表征太阳的活动性的窝路弗(Волоф) 数目在每月的值的总体(太阳黑子数目) 可以考虑为依赖于不连续变元 —— 月数 —— 的随机函数;本书的结论将应用于这一类的函数,只要把数学期望全部代以对时间的均值(参看 Л · В · 卡来[75];并与[59] 比较).



(a)“追踪系统”所接受的电讯号强度的衰减（依照[70]；强度单位未有标明）

(b)大气中有一点的空气温度的脉动（依照[90]）

(c)大气中在彼此相距8 cm两点的风速的脉动（依照[89]）

(d)沿棉纱长度所量度的棉纱直径（依照[91]；未标明比例尺）

图 1　随机函数的观察值

的数学工具. 第一个引导到随机函数概念的概率概型之数学研究的尝试,在我们 20 世纪的最初期就已出现[15],但对应的一般理论的建立则为最近二十年的事,而首先是与莫斯科概率论学派的工作有关. E · E · 斯鲁茨基(Слуцкий) 关于随机函数一般理论的很多重要研究[16],(还可参看[18]) 可作为这工作的基础;但应该承认,最重要的特殊类型随机函数,即马尔柯夫随机过程(A · H · 柯尔莫哥洛夫[19],1931) 和平稳随机函数(A · Я · 辛钦[20],1934) 的巨大理论的创立成就最大. 随后的年代,马尔柯夫随机过程理论和平稳随机函数(过程和序列) 的理论得到了很大的发展;在现代要完全叙述任一理论都需要一本巨著(而对于马尔柯夫过程甚至需要几本著作).

本书给出的平稳随机函数引论,只涉及那些仅需考虑函数的第一、二级矩(相关理论) 的问题. 第一章讲平稳随机函数的一般相关理论的基本事实. 这些函数的谱展式问题在本章占中心地位,无疑地,它将是一般理论的重要部分. 在第一章对于论及的数学命题的物理意义的阐释将予以很大的关注;此外,对更清楚地了解本书以后的内容很为重要的情形,亦加以说明. 第二章的内容是比较专门的 —— 这一章讲一个特殊的但对实际应用非常重要的相关理论的问题,这就是平稳随机序列与过程的外推与滤过问题. 这一问题的研究的主要功

绩,应归功于 A·H·柯尔莫哥洛夫[22],他第一次精确地表述了问题的提出,并给出了任意平稳序列的线性外推的误差的均方差公式. 柯氏的工作为B·H·沙殊欣(Засухин)[23](多维平稳序列的外推法)和M·Г·克莱茵(Крейн)[24]与K·卡鲁宁(Карунен)[25](平稳过程的外推法)等所继续. 这一领域中的问题的实际重要性在近年来特别明显. 这里特别指出维恩那(Wiener)的书[6]的重要作用. 他的著作考虑到无线电技术领域的工程师读者和专家的兴趣①(因此可参看B·B·梭鲁达夫尼柯夫(Солодовников)的长文[71]和内容丰富的书[71a]). 就理论方面来看,维恩那的论述,已尽包含 A·H·柯尔莫哥洛夫的著述[21,22]的内容,在问题的提出方面,书[6]与柯氏的著述相近似. 维恩那没有考虑一般的平稳序列与过程,而是考虑那具有很特殊类型的谱密度的一类非常狭窄的序列与过程. 可是对这一狭窄类型的序列与过程,维恩那不单只成功地找到线性外推的误差的均方差,且得到实施外推的运算的一般(且并不复杂的)表达式,因而大大地简易了实际应用所得结果的可能性. 此外,维恩那除了平稳随机函数的线性外推理论外,还考虑这些函数的线性滤过的理论,理论上虽包含很小很新的东西,但对于技术应用却非常重要.

为了证明关于平稳随机函数的外推的基本命题,在著作[21-25]应用了复变函数论和泛函分析的极精细的理论;因此,研究这些著作,要求读者有相当好的数学修养. 在书[6]中,这一类型的结果是借助于解特殊类型积分方程而得到的;这些解法相当复杂,同时没有给出所得公式的严格证明,因为在构成和解这些方程时必须大大地应用数学上无意义的表达式(发散积分类型).

其实书[6]所考虑的那一类随机函数的外推与滤过的理论可以借希尔伯特空间的基本概念和只用复变函数论的简单事实(留数理论)来加以严格的叙述,本书的第二章就将给出这样的叙述②. 此外为了容易了解起见,我们在每一段的叙述都将从分析具体例子开始,只有在其后才进而考虑一般的情形. 读者如对外推和滤过理论特别有兴趣,而且具有稳定随机函数的相关理论的基础知识,例如 A·Я·辛钦的论文[20]或B·B·格涅坚科的书[1]第54节所讲的,可以一开始就读第二章,在阅读第二章的同时,顺便就熟习了那些出现在第一章而为第二章所引用的公式.

本书两章的结尾都有一段讲到所涉及的问题更进一步的发展;在这几节中列举了(并指出了对应的文献)本书的主要部分中没有谈到的一系列平稳随机

---

① 我们指出,对这里所讲到的问题;要创作一本为工程读者实际可了解的著作的这一问题,维恩那的书实际上并未有解决. 关于这一点可参考[81],它试行把书[6]的内容以无线电工程人员所熟习的名词来阐释.

② 对于最简单的特例 —— 平稳序列往后的一步外推,都博(Doob)在[26,8]指出了类似的简化理论陈述的可能性.

函数的基本事实. 特别是在结尾的 §8 的“36. 平稳序列与过程的外推与过滤的一般理论”中,叙述了属于柯尔莫哥洛夫的著述[21,22]的主要部分的,关于平稳函数的外推与滤过一般理论的基本命题;在叙述中加上了若干说明这些理论的例子但不包含任何证明. 包括完全证明的柯尔莫哥洛夫理论的详细叙述,需要长篇的专门著作,本书不打算担起这样的写作任务.

◎ 目 录

第一章 平稳随机函数的一般理论

§1 平稳随机函数的定义及基本性质

1. 随机函数定义

设 T 是元素 $t,s,\cdots$ 的一个任意集合. 我们将称函数 $\xi(t)$ 为 T 的变元 t 的随机函数(或称,T 上的随机函数),它的数值是一个随机变量. 因此 T 上的随机函数是对应于集合 T 的元素 $t,s,\cdots$ 的随机变量 $\xi(t),\xi(s),\cdots$ 的总体. 若集合 T 只含有有限个元素,则随机函数 $\xi(t)$ 是有限数目的随机变量的总体;在这种情况下,它可表为一个多维的随机变量. 古典的概率论就是研究这样的随机变量;它的给定借助于多维分布函数 —— 引言的式(2). 如集合 T 是无穷的,则 $\xi(t)$ 是随机变量的无穷总体;古典的理论并未研究过类似于这样的总体,在这场合,如何给定 $\xi(t)$ 需要特别的定义.

根据E·E·斯鲁茨基,随机函数 $\xi(t)$ 将视为已给定的,如果对于 T 的每一个 t,变量 $\xi(t)$ 的分布函数

$$F_t(x) = P\{\xi(t) < x\} \tag{1.1}$$

是确定的, 对于集合 T 的每一对元素 t_1,t_2, 二维随机变量 $\xi(t_1,t_2) = \{\xi(t_1),\xi(t_2)\}$ 的分布函数

$$F_{t_1,t_2}(x_1,x_2) = P\{\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2\} \tag{1.2}$$

也是确定的；而一般的对于集合 T 的任意 n 个元素 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，变量 $\xi(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \{\xi(t_1), \xi(t_2), \cdots, \xi(t_n)\}$ 的 n 维分布函数

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = P\{\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2, \cdots, \xi(t_n) < x_n\} \tag{1.3}$$

都是确定的. 分布函数(1.3) 自然应该满足下面的条件：

1) 对称条件 —— 对于数目 $1,2,\cdots,n$ 的任意排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 有等式

$$F_{t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_n}}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n}) = F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1.4}$$

2) 一致条件 —— 若 $m < n$，则对于任意 $t_{m+1}, t_{m+2}, \cdots, t_n$，有

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n) = F_{t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_1,x_2,\cdots,x_m) \tag{1.5}$$

反过来也是正确的：任一分布函数族(1.3) 满足条件(1.4) 与(1.5)，可视为给定了 T 上的某一随机函数.

还可以有其他给定随机函数的方法. 例如，以包含若干个参数的分析公式来给定随机函数常常较方便，这些参数是随机变量(例如，可以考虑具有随机系数的多项式或三角多项式). 这种给定的方法本书亦将用到.

让我们再谈几句关于一个给定随机函数的方法，它最接近于那些在自然科学中在出现这些函数时所引起的观念. 在本书开始时，我们曾强调说，为了可以应用概率论的讨论，必须有某一个实验，它可以在相同的条件下重复很多次，而且可以得出不同的结果. 实验的一切可能结果的集合 Ω(“基本事件”的集合) 在近代概率论公理结构中有基本的作用(参考[3]). 一种可以在实验的不同结果取不同的数值的量 ξ，称为随机变量，换句话说，它是集合 Ω 的点 ω 的数值函数；因此应该更正确地写 $\xi(\omega)$ 以代替 ξ，(前面我们并不这样做，因为在概率论的传统里依赖于 ω 是不明显写出来的) 对所有对应于 T 的元素的随机变量的总体我们曾称之为 T 上的随机函数 $\xi(t)$，用我们新的观点，这将是一个两变数 ω 和 t 的函数 $\xi(\omega, t)$.

在函数 $\xi(\omega,t)$ 中固定变元 ω，我们可得到变数 t 的实函数 $\xi(\omega,t) = \xi^{(\omega)}(t)$，它依赖于参变元 ω. 因此，实验的每一结果 ω 对应变数 t 的一个实函数，这函数称为随机函数 $\xi(t)$ 的现实(参看前面引言)，随机函数 $\xi(\omega,t)$ 可以看作依赖于参数 t 的随机变量 $\xi_t(\omega)$ 的总体，亦可看作它们的现实 $\xi^{(\omega)}(t)$ 的总体，对于后一情形为了给定随机函数，应该定义不同现实的出现概率(或概率密度)，这化为在现实的泛函空间中定义某一特别测试 P(概率测度)；给定了这测度就给定了随机函数.

这里所指出的对随机函数概念的观点，始源于柯尔莫哥洛夫对概率论基础

的著作[3],在理论以后的发展中,得到了很多的成果. 可以指出,借助于对现实的集合给定概率测度以给定随机函数,包括了我们上面所列举的给定随机函数的方法作为一个特殊情形(首先可参看柯尔莫哥洛夫的"基本定理"[3]39页),但比它们更具有优越性. 但是对于这些问题的更详细叙述需要引入更精细的函数论和集合论的工具;既然以后我们不要求这类似的工具,所以这里我们只限制于已讲述的.

2. 平稳性

以后我们的变量 t 只取实数值,而将解释为时间. 关于集合 T,它或者是包含一切实数 t 的连续集合 $-\infty < t < +\infty$(在这里随机函数将称为随机过程),或者只由一切整数 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ 所构成(在这场合 $\xi(t)$ 称为随机序列). 当我们希望同时考虑随机过程和随机序列时,我们就保留随机函数的名称.

随机函数 $\xi(t)$ 将称为平稳的,如果一切定义 $\xi(t)$ 的有限维分布函数(1.3),当全体的点 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 沿时间的轴作任何移动时都不改变,即对于任何 $n, t_1, t_2, \cdots, t_n$,与 τ 有

$$F_{t_1+\tau, t_2+\tau, \cdots, t_n+\tau}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{t_1, t_2, \cdots, t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (1.6)$$

因此,特别地,对于平稳函数,一切一维分布函数(1.1)应该恒等(即 $F_t(x)$ 不依赖于 t),一切二维分布函数(1.2)只依赖于差 $t_2 - t_1$,等等.

平稳性条件的物理意义甚为明显:这条件就是说 $\xi(t)$ 是描写这一类现象的某一数量特性 ξ 在时间中的变化,发生这现象一切可以肯定的条件在时间过程中并不改变. 例如,电路中电流强度和电压的脉动(噪声)就是一种平稳过程,只要这电路是处在一个平稳系统中,就是说,只要引起电流在它内流动的一切条件,在时间过程中并不改变. 同样地,湍流中一点的速度分量也是一个平稳随机函数,如果这流动已经确立;棉纱的截面的直径为截点坐标的齐次①随机函数,如果这棉纱的生产过程不因时间而改变,等等. 一般说来,在实际应用中所碰到的随机函数,常能以极高的准确度视为平稳的②,这一情况确定了平稳随机过程在实用上的重大价值.

3. 矩,相关函数

为了完全描述平稳随机函数,必须给出所有对应的有限维分布函数

---

① 在随机函数所依赖的实变数 t 不是时间的场合,满足条件(1.6)的随机函数不叫平稳的,而称为齐次的,代替述语"平稳随机函数"有时亦可用"对时间为齐次的随机函数".

② 很明显,为了使随机函数 $\xi(t)$ 可看作是平稳的,并不必须使产生这一随机函数的现象的外部性质完全不改变:实际上只需它们在所有 $\xi(t)$ 的观察时间过程,和某一对于过渡过程的消失来说是足够紧接的时距内保持不变.

(1.3)(由(1.6)知它们只依赖于差 $t_i - t_1, i = 1,2,\cdots,n$). 但在理论的实际应用中,有限维的分布函数显示出非常繁复和不方便的性质. 而且在大部分物理和力学的实际问题中,用实验确定这些函数实为极度复杂而耗费的事. 因此在构造平稳函数的理论时,很自然地被限制在(初时,在一切的场合中)研究它们那些只由多维分布(1.3)的某些最简单数量性质所确定的特性. 这种在概率论广泛应用的概率分布最简单的数量性质,就是分布的矩,在分布(1.3)的情形下它具有形式①

$$\mu_{m_1,m_2,\cdots,m_n}(t_1,t_2,\cdots,t_n) = \mathbf{M}\xi(t_1)^{m_1}\xi(t_2)^{m_2}\cdots\xi(t_n)^{m_n} = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}\mathrm{d}^n_{x_1,x_2,\cdots,x_n}F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1.7}$$

(这里字母 $\mathbf{M}$ 恒作为求均值的符号,即 $\mathbf{M}_\eta$ 表示随机变量 η 的数学期望)

矩(1.7)最简情形是一级矩 —— 随机函数 $\xi(t)$ 的均值

$$\mu_1(t) = m(t) = \mathbf{M}\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}F_t(x) \tag{1.8}$$

若 $\xi(t)$ 为平稳的,则分布函数 $F_t(x)$ 不依赖于 t;在这场合 $\xi(t)$ 的均值,显然为

---

① 积分(1.7)的右边是斯蒂吉斯的 n 重积分[98]. 我们记得,一般的斯蒂吉斯积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}F(x)$ 以等式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}F(x) = \lim_{\max|x_k-x_{k-1}|\to 0}\sum_{k=1}^n f(x'_k)[F(x_k)-F(x_{k-1})]$$

来定义,其中 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b; x_{k-1} \leqslant x_k \leqslant x_k$;广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}F(x)$ 照常定义为积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}F(x)$ 当 $a\to-\infty, b\to+\infty$ 的极限. 类似地可以定义斯蒂吉斯的重积分;例如

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}^2_{x,y}F(x,y)$$

是

$$\lim_{\substack{\max|x_k-x_{k-1}|\to 0\\ \max|y_l-y_{l-1}|\to 0}}\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^m f(x'_k,y'_l)[F(x_k,y_l)-F(x_{k-1},y_l)-F(x_k,y_{l-1})+F(x_{k-1},y_{l-1})]$$

的极限,其中 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b; c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d; x_{n-1} \leqslant x'_k \leqslant x_k; y_{l-1} \leqslant y'_1 \leqslant y_l$;而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}^2_{x,y}F(x,y)$ 是 $\int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}^2_{x,y}F(x,y)$ 当 $a\to-\infty, c\to-\infty, b\to+\infty, d\to+\infty$ 的极限.

在那些场合,当概率分布(1.3)具有密度

$$f_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \frac{\partial^n F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}$$

积分(1.7)可写为

$$\mu_{m_1,m_2,\cdots,m_n} = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}f_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

在本书全部,完全允许限制在这些简单的场合而不应用斯蒂吉斯积分.

简单的常数

$$\mathbf{M}\xi(t) = m \tag{1.9}$$

均值是随机函数的非常重要的特征,但这一特征只能很粗略地描述 $\xi(t)$ 的性质. $\xi(t)$ 的较为精确的性质的描述由它的二级矩

$$\mathbf{M}\xi(t)\xi(s) = \mu_{11}(t,s) = B(t,s) \tag{1.10}$$

函数 $B(t,s)$ 称为随机函数 $\xi(t)$ 的相关函数,而那种只考虑由它的起首两级矩所确定的随机函数的性质的理论称为随机函数的相关理论. 如果 $\xi(t)$ 是平稳的,则相关函数 $B(t,s)$ 显然只依赖于差 $t-s$,这里

$$\mathbf{M}\xi(t)\xi(s) = B(t-s) \tag{1.11}$$

因此,在随机函数的相关理论中,这些函数表征于常数 m 和一个变数 τ(对随机序列它是整数,对随机过程它是任意实数)的函数 $B(\tau)$.

因为在相关理论中多维概率分布(1.3)并不出现,所以在这些理论中平稳随机函数的定义应加修改,这时很自然地应该把随机函数视为平稳的,只要它们的均值(1.8)是常数,而它们的相关函数(1.10)只依赖于 $t-s$. 满足这两条件①的函数称为广义的平稳随机函数(或 A·Я·辛钦意义上的平稳函数);本文以后“平稳”一词恒取这样的意义. 当然,一般说来广义的平稳函数可能不满足(1.6)(参看著作[20]所引的:已予相关函数的平稳过程一例). 但要注意,在实用上,只是广义的平稳随机函数而不是前面所给定义下的平稳函数,几乎没有碰到. 必须指出,均值和相关函数,当然还不能定义随机函数 $\xi(t)$;因此相关函数的理论不能代替应用多维分布函数(1.3)的随机函数的完全理论. 但在现代只有平稳随机函数的相关理论的研究能到达可以在实际上广泛应用的程度. 而且由于实际上碰到的随机函数常显示为正态的,即对于它们,一切有限维分布(1.3)显示为高斯的多维正态分布(关于这种分布可参看[1,2])②,故相关理论的实际价值仍在增加,对于这种正态随机函数,均值和相关函数完全确定 $\xi(t)$(即确定所有分布函数(1.3));因此对于它们,相关理论可以基本上回答任何关于 $\xi(t)$ 的问题. 可是,如我们下面将会看到的,即使对于非正态的随机

① 我们注意,这些条件的建立假定随机函数具有有限均值与相关函数,即随机函数的一切值,是具有囿离差的随机变量. 在这方面平稳性的新定义,甚至可说是较严格的,因为在旧的定义,起首两个有限的矩可以不存在,以后我们假定有限均值与相关函数恒存在而不做特别声明.

② 在一系列的力学与物理的问题中,概率分布(1.3)可以视为正态的,它或者是由于概率论的中心极限定理(李亚普诺夫定理;例如在联系于“碎片效应”的一系列现象的研究就是这样的情形,比较[27]),或者是由于马克斯威分子速度分布是正态分布(这里特别是“热的骚动”理论可作为一个例). 有若干检验法,可以查验随机函数的正态性,参看 M·A·李安托维奇(Леонтович)与 B·И·布尼摩维奇(Бунимович). 顺便指出,有时在物理的研究中正态分布(1.3)并没有足够的根据,而且有时甚至不需要它.