普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数

XIAN XING DAI SHU

主编 向修栋 刘丽敏

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育"十三五"规划教材

线性代数

主　编　向修栋　刘丽敏

副主编　李　震　杜彩凤

李晓莎　杨树林

北京邮电大学出版社

·北京·

内容简介

本书以培养创新思维为指导，构建以线性方程组为主题的创新理论体系，通过公式化和叙事性的语言，并吸收国内、外优秀教材的经验编著而成．每章配以应用实例，并应用 Matlab 语言实现，使本书内容丰富、可阅读性强；而且书中配有考研习题，给本书增加了一定的深度．

全书共分为四章，分别为 n 阶行列式、矩阵、向量组的线性相关性和方阵的特征值、特征向量与二次型，把线性方程组判断、求解和应用融合到各章之中．每节配有不同数量的习题．每章都配有考研真题作为复习题．本书的内容符合教育部颁发的工科线性代数课程教学的要求．编写过程中力求简化理论，提炼方法．教学时数为 34 学时左右．

本书采用叙事方法，通俗易懂，可供高等工科院校、师范院校非数学专业、科技工作者以及自学者使用．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 向修栋，刘丽敏主编．-- 北京：北京邮电大学出版社，2017.8
ISBN 978－7－5635－5141－5

Ⅰ．①线… Ⅱ．①向… ②刘… Ⅲ．①线性代数 Ⅳ．①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 159154 号

书　　名	线性代数
主　　编	向修栋　刘丽敏
责任编辑	张保林
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址	www.buptpress3.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京泽宁印刷有限公司
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	13.5
字　　数	257 千字
版　　次	2017 年 8 月第 1 版　2017 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978－7－5635－5141－5　　定价：29.00 元

如有质量问题请与发行部联系

版权所有　侵权必究

前　　言

"线性代数"是一门应用性很强的课程，其研究思想和方法已经贯穿于工程技术、经济、生物技术、航天、航海、医学等各个领域．我们处在改革与发展的新时代，国家一再提倡大学教育应以培养创新型、应用型、研究型人才为目标．"线性代数"作为大学的基础课程，也应以国家需求为目标，从实际出发，进行必要的改革与探究．

本书顺应时代发展的潮流，吸收了国内、外优秀教材的精华，全书渗入历史人物和事件，从生动的事件中发现理论创新点，增加了本书的趣味性；将抽象的语言论述转化成更加直观的数学等式，降低了认知的难度；在章与章、节与节之间做到了相互承接与对应，使全书融为一体，增加可读性；以解线性方程组为主题、以初等变换为方法贯穿全书内容，突出了方法；删减了部分知识点，简化了内容；引入了应用性实例，凸显了线性代数的实用性，有利于培养学生的理论联系实际能力和创新能力；将 Matlab 与应用性实例结合，提高了应用线性代数处理实际问题的效率；每一章都配有总复习题，是从考研真题中选编的，有利于提高对线性代数的进一步认识．

本书坚持由实践到理论，再由理论到实践的辩证规律．从整体上看，由实际中线性方程组的求解引出了行列式和矩阵理论；由线性方程组表达引出向量组的线性相关性，导出了向量空间概念，给出线性方程组的通解；相似矩阵和二次型正是求解线性方程组在实践中的应用．在第一章行列式中，通过低阶线性方程组引出行列式的概念，由概念导出行列式的性质，再回归到低阶线性方程组引出 Cramer(克拉默)法则．同样，利用一般的线性方程组引出第二章矩阵和第三章向量组的线性相关性，而矩阵和向量组线性相关性的应用就是线性方程组的求解和线性方程组解的表达．线性变换是特殊的线性方程组，而

特殊的变换就引出了特征值和特征向量，特征值和特征向量的应用就是矩阵的对角化和二次型的标准形，这就是第四章内容——方阵的特征值、特征向量和二次型．

本书采用叙事方法，通俗易懂，可供高等工科院校、师范院校非数学专业学生、科技工作者以及自学使用．

编 者

2017 年 3 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章 n 阶行列式

行列式是一个古老的概念,是一个数,是某些数乘积的代数和. 同时它也是一个十分有用的工具,主要表现在以下几个方面:(1)利用 n 阶行列式可以表述著名的克拉默(Cramer)法则,求得含有 n 元 n 个方程的方程组的非奇异解;(2) 可以判断 n 阶方阵是否为可逆矩阵,而且可以推导出求逆矩阵的公式;(3) 可以判断含有 n 个 n 维向量的向量组的线性相关性;(4) 可以通过行列式求得矩阵的特征值、特征向量,进而将矩阵对角化或将二次型化成标准形;(5) 还可以利用变量替换的雅可比(Jacobi)行列式来简化微分方程或多重积分计算,等等. 下面通过介绍全排列等知识引出 n 阶行列式的一般概念.

§1 行列式的定义

1.1 预备知识:全排列及其逆序数

定义 1.1 把 $1,2,\cdots,n$ 排成有序一列,称这个有序列为这 n 个数的一个 n 级**全排列**,简称 n **级排列**.

易知,n 个不同的数共有 $n!$个全排列.

例 1.1 由 1,2,3 三个数字所组成的 3 级全排列有

$$123,132,213,231,312,321$$

这样的全排列共有 $3!=6$ 个.

定义 1.2 设 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 为一个 n 级排列,若 $p_i>p_j$,则称 p_i 与 p_j 构成一个**逆序**. 排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_n$ 中所有逆序的和称为该排列的**逆序数**,记为

$$\tau(p_1p_2\cdots p_i\cdots p_n)$$

【注】 (1) 若在排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 中与 p_j 构成逆序的个数记为 τ_j,则

$$\tau(p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_i+\cdots+\tau_j+\cdots+\tau_n$$

(2) 若 $\tau(p_1p_2\cdots p_j\cdots p_n)=0$,称排列 $p_1p_2\cdots p_j\cdots p_n$ 为**自然排列**.

(3) 若 $\tau(p_1p_2\cdots p_j\cdots p_n)$为偶(奇)数,称排列 $p_1p_2\cdots p_j\cdots p_n$ 为**偶(奇)排列**.

例 1.2 计算下列排列的逆序数,并指出是奇排列还是偶排列:

(1) 2314;(2) 1324;(3) 1234;(4) $n(n-1)321$.

解 (1) $\tau(2314)=0+0+2+0=2$,为偶排列;

(2) $\tau(1324)=0+0+1+0=1$,为奇排列;

(3) $\tau(1234)=0+0+0+0=0$,为自然排列,偶排列;

(4) $\tau[n(n-1)\cdots321]=0+1+2+\cdots+(n-1)+(n-2)+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$,奇偶排列由 n 确定.

例 1.2(1) 中 2 与 1 对调位置得排列(2),(2) 中相邻的 2 与 3 对调位置得(3),像这样的变换我们称为对换和邻换.

定义 1.3 在一 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 中对调 p_i 与 p_j 两数的位置,这个过程叫作**对换**. 若对调 p_i 与 p_{i+1} 两数的位置,这个对换叫作**邻换**.

从例 1.2(1)、1.2(2)和 1.2(3) 中发现,无论是对换还是邻换,其排列的奇偶性都发生了改变,这不是偶然的结果,而是具有一般规律性.

定理 1.1 经过一次对换,排列的奇偶性改变,即若排列为 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$,则

$$(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}=-(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)} \tag{1-1}$$

证明 先证邻换情形,即对换排列 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}\cdots p_n$ 中的 p_i 和 p_{i+1},则

$$\begin{aligned}\tau(p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_i\cdots p_n)&=\begin{cases}\tau_1+\cdots+\tau_{i-1}+(\tau_i+1)+\tau_{i+1}+\cdots+\tau_n, & p_{i+1}>p_i\\ \tau_1+\cdots+\tau_{i-1}+\tau_i+(\tau_{i+1}-1)+\cdots+\tau_n, & p_{i+1}<p_i\end{cases}\\&=\tau(p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}\cdots p_n)\pm1\end{aligned}$$

所以

$$(-1)^{\tau(p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}\cdots p_n)}=-(-1)^{\tau(p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_i\cdots p_n)} \tag{1-2}$$

故邻换 p_i 和 p_{i+1} 使排列 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}\cdots p_n$ 与 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_i\cdots p_n$ 的奇偶性相反.

再证一般对换情形,即对换 $p_1\cdots p_ip_{i+1}\cdots p_{j-1}p_j\cdots p_n$ 中的 p_i 和 p_j,这样的对换可以用邻换来实现,即

$$\begin{aligned}&(-1)^{\tau(p_1\cdots p_ip_{i+1}\cdots p_{j-1}p_j\cdots p_n)}\xlongequal[\text{由式(1-2)}]{p_i\text{ 依次向后做}(j-i)\text{次邻换}}\\&(-1)^{j-i}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_{i+1}\cdots p_{j-1}p_jp_i\cdots p_n)}\xlongequal[\text{由式(1-2)}]{p_j\text{ 向前做}(j-i-1)\text{次邻换}}\\&(-1)^{j-i+j-i-1}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_jp_{i+1}\cdots p_{j-1}p_i\cdots p_n)}\\&=-(-1)^{\tau(p_1\cdots p_jp_{i+1}\cdots p_{j-1}p_i\cdots p_n)}\end{aligned}$$

故对换 p_i 和 p_j 使排列 $p_1 \cdots p_i p_{i+1} \cdots p_{j-1} p_j \cdots p_n$ 的奇偶性与排列 $p_1 \cdots p_j p_{i+1} \cdots p_{j-1} p_i \cdots p_n$ 的奇偶性相反.

推论 经过奇数次对换,奇排列调成自然排列;经过偶数次对换,偶排列调成自然排列.

证明 由定理 1.1 知对换的次数就是排列奇偶性变化的次数,而自然排列是偶排列(逆序数是 0),因此得知推论成立.

1.2 行列式的定义

行列式起源于线性方程组的求解,是一种速记表达式,现在已经成为一种非常有用的工具. 早在 1683 年,关孝和(约 1642—1708,日本)在其著作《解伏题元法》中提出了行列式的概念与算法. 1693 年 4 月,莱布尼茨(G. W. Leibniz,1646—1716,德国)在写给洛必达(Marquis de L'Hôpital,1661—1704,法国)的一封信中使用并定义了行列式,给出了方程组的系数行列式为零的条件. 1750 年,克拉默(G. Cramer,1704—1752,瑞士) 在其著作《线性代数分析导引》中,对行列式的定义和展开法进行了比较完整、明确的阐述,并给出了解线性方程组的克拉默法则. 后来,数学家贝祖(E. Bezout,1730—1783,法国)将确定行列式每一项符号的方法进行了系统化,利用系数行列式概念指出了如何判断一个齐次线性方程组有非零解. 现在循着历史发展的轨迹给出行列式的一般定义.

在平面中,考虑两直线的交:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{1-3}$$

利用消元法,解得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = b_2 a_{11} - b_1 a_{21} \end{cases} \tag{1-4}$$

由式(1-4)知,x,y 系数是相同的,为了简便起见,赋予特定的记号,简称为二阶行列式:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中行列式按对角线(主、副对角线元素乘积代数和)形式展开;行列式中元素 a_{ij} $(i,j=1,2)$ 的下角标 i 与 j 分别代表 a_{ij} 所处的行和列,分别称为行指标和列指标.

同理,在空间中考虑平面的交:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \tag{1-5}$$

解得 x,y,z 的系数是相同的,为了简便起见,用三阶行列式表示,并按对角线展

开，形式如下：

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{matrix}\right|\begin{matrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{matrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

上述按对角线展开表示三阶行列式的方法称为沙鲁斯法则(Sarrus's rule)。由上述可知，方程组解的系数(元素乘积的代数和)可用二阶、三阶行列式 D_2，D_3 来表示，并给出按主、副对角线展开来诠释这些元素乘积的代数和. 只可惜这种方法不能向更高阶行列式进行推广(如四阶行列式，出现缺项)，这表明按照主、副对角线展开还不能完全表示“元素乘积代数和”的所有特征. 行列式展开式的特征如下.

(1) 行列式为乘积项的代数和，乘积项的个数等于列指标排列数.

(2) 在行列式的每一乘积项中：①行指标是自然排列，说明各因子处在不同行；②列指标是一排列，说明各因子处在不同列，即每个乘积项是行列式处在不同行、不同列元素的积.

(3) 乘积项的符号与列指标的排列有关，列指标的偶(奇)排列分别对应乘积项的正(负)号. 而排列的奇偶性是由排列的逆序数所确定的，故乘积项的符号就由排列的逆序数来表示，即

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=(-1)^{\tau(12)}a_{11}a_{22}+(-1)^{\tau(21)}a_{12}a_{21}$$

$$=\sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

类似地，有

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

按照上述形式，将行列式定义推广到 n 阶形式，定义如下：

定义 1.4 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

记作 $\det(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为行列式的元素.

若记行列式的第 i 行为 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$, $i=1,2,\cdots,n$, 则

$$D_n=\left|\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\right|$$

若记行列式的第 j 列为 $\alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}$, $j=1,2,\cdots,n$, 则

$$D_n=|(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)|$$

行列式是不同行不同列元素的乘积代数和，当行列式各元素有较多的 0 时，行列式的展开式中将有许多乘积项变为 0，这样的行列式用定义就较容易计算.

例 1.3　证明上三角形行列式(对角线以下的元素都为 0 的行列式)

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$$

证明　$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{定义 1.4}}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1}n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nn}\quad(j_n\neq n, a_{nj_n}=0)$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots(n-1)n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots(n-1)n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$$

$$(a_{n-1j_{n-1}}\xlongequal{j_{n-1}\neq n-1,n}0, a_{n-1,n}\text{ 不能取，与 }a_{nn}\text{ 同列})$$

$$=\cdots=\sum_{123\cdots(n-1)n}(-1)^{\tau(123\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$$

同理，有

$$\underset{\text{下三角行列式}}{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \underset{\text{对角形行列式}}{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$= \underset{\text{次上三角行列式}}{\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}} = \underset{\text{次下三角行列式}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$= \underset{\text{次对角形行列式}}{\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

例 1.4　证明分块下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = D_1 D_2$$

其中
$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

证明　$$D \xlongequal{\text{记}} \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} & d_{1,m+1} & \cdots & d_{1,m+n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mm} & d_{m,m+1} & \cdots & d_{m,m+n} \\ d_{m+1,1} & \cdots & d_{m+1,m} & d_{m+1,m+1} & \cdots & d_{m+1,m+n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m+n,1} & \cdots & d_{m+n,m+1} & d_{m+n,m+1} & \cdots & d_{m+n,m+n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{定义 1.4}} \sum_{j_1\cdots j_k j_{k+1}\cdots j_{k+n}} (-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_k j_{k+1}\cdots j_{k+n})} d_{1j_1} d_{2j_2}\cdots d_{kj_k} d_{k+1,j_{k+1}}\cdots d_{k+n,j_{k+n}}$$

$$\left(d_{i,j_i} \xlongequal[m+1\leqslant j_i\leqslant m+n]{1\leqslant i\leqslant m} 0\right)$$

$$= \sum_{\substack{j_1\cdots j_m \\ j_{m+1}\cdots j_{m+n}}} (-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_m)+\tau(j_{m+1} j_{m+2}\cdots j_{m+n})} d_{1j_1} d_{2j_2}\cdots d_{mj_m} d_{m+1,j_{m+1}}\cdots d_{m+n,j_{m+n}}$$

$$(1\leqslant j_1,\cdots,j_m\leqslant m; m+1\leqslant j_{m+1},\cdots,j_{m+n}\leqslant m+n)$$

$$= \sum_{\substack{j_1\cdots j_m \\ m+r_1\cdots m+r_n}} (-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_m)+\tau(m+r_1+\cdots+m+r_n)} a_{1j_1} a_{2j_2}\cdots a_{mj_m} b_{1,r_1}\cdots b_{n,r_n}$$

$$(\text{令 } j_{m+p} = m+r_p,\ d_{m+p,j_{m+p}} = d_{m+p,m+r_p} = b_{p,r_p})$$

$$= \sum_{\substack{j_1\cdots j_m \\ r_1\cdots r_n}} (-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_m)} (-1)^{\tau(r_1\cdots r_n)} a_{1j_1} a_{2j_2}\cdots a_{mj_m} b_{1,r_1}\cdots b_{n,r_n}$$

$$[\tau(m+r_1,\cdots,m+r_n) = \tau(r_1,\cdots,r_n)]$$

$$= \sum_{j_1\cdots j_m} (-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_m)} a_{1j_1} a_{2j_2}\cdots a_{mj_m} \left[\sum_{r_1\cdots r_n} (-1)^{\tau(r_1\cdots r_n)} b_{1,r_1}\cdots b_{n,r_n}\right]$$

$$= \sum_{j_1\cdots j_m} (-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_m)} a_{1j_1} a_{2j_2}\cdots a_{mj_m} D_2 = D_1 D_2$$

类似地，分块上三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = D_1 D_2$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 1.2

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\substack{i_1 i_2\cdots i_n \\ j_1 j_2\cdots j_n}} (-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)+\tau(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_n j_n}$$

证明 $\sum\limits_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_n}} (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n)+\tau(j_1 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_p j_p} \cdots a_{i_q j_q} \cdots a_{i_n j_n}$

$$= \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_n}} (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n)} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_p j_p} \cdots a_{i_q j_q} \cdots a_{i_n j_n}$$

$$\xlongequal{\text{定理 1.1}} \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_n}} -(-1)^{\tau(i_1 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n)} (-1)(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_q \cdots j_p \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_q j_q} \cdots a_{i_p j_p} \cdots a_{i_n j_n}$$

$$= \sum_{\substack{i_1 \cdots i_n \\ j_1 \cdots j_n}} (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n)+\tau(j_1 \cdots j_q \cdots j_p \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_q j_q} \cdots a_{i_p j_p} \cdots a_{i_n j_n}$$

（交换乘积项各因子，其符号没变，将行指标调整为自然顺序）

$$= \sum_{\substack{12 \cdots n \\ j_1 \cdots j_n}} (-1)^{\tau(12 \cdots n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{k j_k} \cdots a_{n j_n} \xlongequal{\text{定义 1.4}} D_n$$

推论 $$D_n = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

习 题 1

1. 求下列各排列的逆序数：

(1) 341726859

(2) $n(n-1)\cdots 543121$

(3) $13\cdots(2n-1)246\cdots(2n-2)(2n)$

(4) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 42$

2. 写出 4 阶行列式中含有因子 $a_{12}a_{34}$ 的项.

3. 在 6 阶行列式中，下列各项应带什么符号？

(1) $a_{23}a_{31}a_{52}a_{46}a_{14}a_{65}$

(2) $a_{42}a_{33}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$

4. 证明

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{次上三角行列式}} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{次下三角行列式}}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{次对角形行列式}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

5. 用行列式定义计算：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$

6. 写出行列式 $f(x)=\begin{vmatrix} 3x & 0 & 2 & 1 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 3x \end{vmatrix}$ 的展开式中包含 x^3 和 x^4 的项和常数项.

§2　行列式的性质

在上一节中，利用行列式定义求出(分块)上、下三角形行列式的值，那么能否利用一些行列式性质将一般行列式化为(分块)上、下三角形行列式来求得行列式的值呢？如果可以的话，那么探求行列式的性质就十分必要. 不仅如此，行列式性质也是行列式的理论基础.

2.1　行列式的基本性质

定义 2.1　$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，记 $D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

行列式 D' 的各行(列)是由 D 的同次序的列(行)旋转所得，称 D' 为 D 的**转置行列式**.

性质 1 $D=D'$(行列式和它的转置行列式相等)

证明

$$D' \xlongequal{\text{记}} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{定义 1.4}} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} b_{3j_3} \cdots b_{nj_n}$$

$$\xlongequal{a_{ij}=b_{ji}} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} \xlongequal{\text{定理 1.2 的推论}} D$$

性质 1 说明行列式中行与列具有同等的地位，行列式的行具有某种性质，行列式的列也具有相同的性质，故行列式以下性质的证明中只以行或列推证.

性质 2 $D \xlongequal[(c_i \leftrightarrow c_j)]{r_i \leftrightarrow r_j} -D_1$，其中 $r_i \leftrightarrow r_j$ $(c_i \leftrightarrow c_j)$ 表示行列式 D 中交换第 i 和第 j 行(列)的位置，即行列式 D 交换两行(列)，所得行列式 D_1 与 D 反号.

证明 仅以交换两行证明

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} D_1 = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\xlongequal{\text{定义 1.4}} \sum_{p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}$$

$$= -\sum_{p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} = -D$$

推论 $D \xlongequal[(c_i=c_j,\, i\neq j)]{r_i=r_j,\, i\neq j} 0$，即若行列式 D 中有两行(列)相同，则 $D=0$.

证明

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i \leftrightarrow r_j} -D \Rightarrow D = 0$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com