俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

Smirnov Advanced Mathematics (Volume Ⅲ(2))

斯米尔诺夫高等数学

（第三卷 · 第二分册）

[俄罗斯] 斯米尔诺夫　著　　斯米尔诺夫高等数学编译组　译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

斯米尔诺夫高等数学

（第三卷·第二分册）

Smirnov Advanced Mathematics (Volume Ⅲ(2))

[俄罗斯] 斯米尔诺夫 著

斯米尔诺夫高等数学编译组 译

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08－2016－040 号

内 容 简 介

本书共分三章：复变数函数论的基础，保角变换和平面场，留数理论的应用、整函数和分函数. 理论部分叙述扼要，应用部分叙述详尽，适合力学、物理、电机、航空各专业作为教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

斯米尔诺夫高等数学. 第三卷. 第二分册/(俄罗斯)斯米尔诺夫著；斯米尔诺夫高等数学编译组译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018. 3

ISBN 978－7－5603－6525－1

Ⅰ. ①斯…　Ⅱ. ①斯…②斯…　Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 050803 号

书名：Курс высшей математики

作者：В. И. Смирнов

В. И. Смирнов《Курс высшей математики》

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　刘立娟
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 19.25　字数 364 千字
版　　次　2018 年 3 月第 1 版　2018 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－6525－1
定　　价　58.00 元

第四版序言

在这一版里第三卷被分成两部，现在的第二部包含从前第三卷中复变数函数论的基础那一章以后的内容，其中除若干问题的叙述已有变更外还添加了新的内容. 这些新内容主要是柯西型积分及用最速下降法求积分近似值方面的研究. 关于后一问题彼得拉申教授在行文上给予我极大的帮助，兹于此对他表示衷心的感谢.

书中凡引证以前几卷或本册已证的结果时都用简写符号. 例如，[Ⅲ$_1$,44]表示第三卷第一部§44，[23]表示本册§23.

B. И. 斯米尔诺夫

一九四九年六月一日

目录

复变数函数论的基础

第 1 章

§1 复变数函数

在讲微积分的时候，我们假定自变数和它的函数都只取实数值. 进而，当我们考察最初等的函数，即多项式，以作为研究高等代数的基础时，便要讨论到自变数取复数值时的情形. 本章的目的就是要把解析学的基础推广到复变数函数的情形.

例如，取一多项式

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$$

其中 a_k 都是已知的复数. 假如我们现在让自变数 z 也能取任意的复数值的话，那么对于 z 的任何复数值，函数 $f(z)$ 就是有意义的. 相仿地，对有理函数

$$\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}$$

或具有根号的函数，如

$$\sqrt{z-1}$$

都可以这样去解释它.

在第一卷第六章里我们曾定义了一些当自变数取复数值时的初等超越函数，即对于指数函数有

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$$

借这样定义的指数函数又可以定义复变数的三角函数

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{i2z} - 1}{e^{i2z} + 1}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{i2z} + 1}{e^{i2z} - 1} \tag{1}$$

再回忆复数的自然对数的定义

$$\ln z = \ln |z| + i\arg z \tag{2}$$

其中 $|z|$ 是 z 的模, $\arg z$ 是 z 的辐角. 借此考虑式(1)中诸函数的反函数,就引向复变数的反三角函数

$$\arcsin z, \arccos z, \arctan z, \operatorname{arccot} z$$

不难说明,这些函数能够通过对数来表达.

例如,置

$$z = \tan w = \frac{e^{i2w} - 1}{i(e^{i2w} + 1)}$$

则

$$i(e^{i2w} + 1)z = e^{i2w} - 1$$

或

$$e^{i2w} = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

分子、分母同乘以 i,再取对数,得

$$w = \arctan z = \frac{1}{2i}\ln\frac{i - z}{i + z}$$

完全一样,如果令

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

则得 e^{iw} 的二次方程

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

因此

$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$$

从而

$$w = \frac{1}{i}\ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$$

这里根号应当取正负两种数值.

以后就会看到,所有上述这些复变数的初等函数都有导数,但这些导数也是复变数函数.这就是说,对这些函数,比率

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

当复改变量 Δz 趋向零时有一定的极限值.这一章的全部内容就在替有导数的复变数函数理论奠定一个基础.我们将会看到这套理论一方面是以非常严格和简洁著称,而另一方面在许多自然科学和专门技术的部门中又有它广泛的应用.本章中先说它的理论的大概,在以后各章里面再讲它的应用.我们希望用这个办法可以达到比较严格和简洁的行文.

以后我们常要用到复数的几何解释法,这早在[Ⅰ,170]中已讲过.现在再略述其中的一些基本概念.在平面中取直角坐标轴 Ox 和 Oy,那么对平面上每一点就可以用两个实数坐标(x,y)或一个复数坐标 $x+\mathrm{i}y$ 与它对应,后者是我们以后要用到的.在这种意义下,平面称为复平面,Ox 轴称为实轴,Oy 轴称为虚轴.对于复数除了这种点的解释法以外,在以后各章中我们主要还要用到一种向量的解释法,那就是对于复数 $x+\mathrm{i}y$ 以一个在两坐标轴方向的支量为 x 及 y 的向量与它对应.这两种解释之间的关系是很显然的,即如果从原点到点 $x+\mathrm{i}y$ 引一向量,那么它就是对应于复数 $x+\mathrm{i}y$ 的向量了.一般地,如果平面上一向量的起点 A 的坐标是 $a_1+\mathrm{i}a_2$,终点 B 的坐标是 $b_1+\mathrm{i}b_2$,则向量$\overrightarrow{AB}$ 所对应的复数就等于终点坐标与起点坐标之差,即

$$(b_1-a_1)+\mathrm{i}(b_2-a_2)$$

关于复数的加减乘除,可以参看[Ⅰ,170 和 172].两个复数的和所对应的向量是各个复数所对应的向量的和.复数的模就是它所对应的向量的长度,辐角就是这个向量和 x 轴的交角.当复变数 z 变动时,对应点也就在平面上移动.

我们称 $z=x+\mathrm{i}y$ 趋向极限 $\alpha=a+\mathrm{i}b$,这里 a 和 b 是常数,假如 z 和 α 之差的模

$$|\alpha-z|=\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}$$

趋向零.

因为上式根号里面两项都是正的,故知 $|\alpha-z|\to 0$ 实与

$$x\to a, y\to b$$

两式相抵.因此

$$x+\mathrm{i}y\to a+\mathrm{i}b$$

也就和

$$x \to a, y \to b$$

两式相抵了.

由此显然可见坐标为 $z = x + \mathrm{i}y$ 的变动点 M 趋向坐标为 $\alpha = a + \mathrm{i}b$ 的固定点 A 的意义实与通常平面上一点趋向其极限位置的意义符合. 不难证明普通关于极限之加减乘除的定理对于复变数也一样成立,这里我们不详细说了.

又由上述极限的定义容易知道 $z \to 0$ 和 $|z| \to 0$ 相抵. 如果 $z \to \alpha$,则 $|z| \to |\alpha|$.

对复变数,柯西判别极限存在的准则也成立. 例如,设

$$\begin{gathered} z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1 \\ z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2 \\ \vdots \\ z_n = x_n + \mathrm{i}y_n \\ \vdots \end{gathered}$$

为一复数序列. 这个序列极限的存在和两实数序列 x_n 与 y_n 的极限都存在相抵. 但后两极限存在的充要条件是:对所有充分大的 n 和 m, $|x_n - x_m|$ 和 $|y_n - y_m|$ 可任意小,参看[Ⅰ,31].

但由

$$|z_n - z_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2}$$

及根号里面两项皆为正,可知 z_n 的极限存在的充要条件是:对所有充分大的 m 和 n, $|z_n - z_m|$ 可任意小. 严格些说就是:对任一已给正数 ε,存在一正整数 N,使 $|z_n - z_m| < \varepsilon$,只要 n 和 m 都大于 N. 一般地,复变数 z 的行程不一定是如上所设的可数点集,那么我们应该仿照[Ⅰ,25]一样在 z 的全部行程中确定出一个次序来. 而极限存在的充要条件就可以这么说:对任一已给正数 ε,存在 z 之一值 z_0,使得 $|z' - z''| < \varepsilon$,只要 z' 和 z'' 是任意两个在 z_0 后面的 z 的值. 又以后我们称复变数 z 趋向无限,如果 $|z| \to +\infty$.

现在我们回过来看复变数函数

$$w = f(z)$$

并约定几个名词. 函数 $f(z)$ 可以在整个复平面上都有定义,也可以只在平面上某一区域内有定义,如圆、长方形、环等之内. 在所有这些区域里面,我们可以区别它的内点和边界点. 例如,当这个区域是以原点为中心的单位圆时,其内点就是满足条件

$$|z| < 1 \text{ 或 } x^2 + y^2 < 1$$

的点的全体.边界点的全体就是圆周

$$|z|=1 \text{ 或 } x^2+y^2=1$$

区域的内点的特征是:不但它们自己,并且它们有一个邻域全部属于这个区域.换句话说,一点 M 是某区域的内点,假如有一个以 M 为中心的很小的圆全部属于此区域的话.区域的边界点虽然不是它的内点,但在其任意小的邻域中一定有区域的内点存在.此外,还要规定我们的区域并不分为许多分开的小块(区域之连通性).换言之,我们将常假定区域中任何两点都可以用一条线联结起来,这条线上面的点全部属于这个区域.依照惯例,以后我们用到区域这两个字时,就只指它的内点的全体.如果连边界点也在内的话,我们就称它为闭区域.此外,如果一区域中所有的点和原点的距离都小于一个有限数,则此区域称为有界.关于区域的其他特征将在以后补充.

现在再回头来考察函数 $w=f(z)$.假设这个函数是在某一区域 B 的内部所定义的,即对 B 内部任一点 z,$f(z)$ 必有一定的复数值(我们只说单值函数).设 z_0 为 B 中一点,如果当 $z\to z_0$ 时,有

$$f(z)\to f(z_0)$$

则称函数 $f(z)$ 在 z_0 处连续.这就是说,对任一已给正数 ε,存在一正数 η,使当 $|z-z_0|<\eta$ 时,有

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

若 $f(z)$ 在 B 中每一点都连续,则称它在 B 中连续.函数 $f(z)$ 有时不但可在 B 中有定义,并且也可以在 B 的边界线 l 上有定义,即 $f(z)$ 在闭区域 B 中有定义.这时若 $f(z)$ 在闭区域 B 中每一点都连续,则称 $f(z)$ 在闭区域 B 中为连续.当定义函数在边界线 l 上一点 z_0 的连续性时,需要注意这时 z 可以用任何方式趋向 z_0,但不能离开闭区域 B.和实变数一样,[Ⅰ,43]的定理仍成立:若 $f(z)$ 在闭有界区域中为连续,则在这个区域中必为一致连续.这就是说,对任一已给正数 ε,存在一正数 η(对全区域只有一个),使当 $|z_1-z_2|<\eta$ 时,有

$$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$$

这里 z_1 和 z_2 是闭区域中任意两点.

把 z 和 $w=f(z)$ 分为实数部分和虚数部分

$$z=x+\mathrm{i}y$$

$$w=f(z)=u+\mathrm{i}v$$

给 z 一值就是给 x 和 y 各一值,给 $f(z)$ 一值就是给 u 和 v 各一值,因此 u 和 v 必定是 x 和 y 的函数

$$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y) \tag{3}$$

对于初等函数，只需用简单的运算就可把实数部分和虚数部分分开. 例如

$$w=z^2=(x+\mathrm{i}y)^2=(x^2-y^2)+2\mathrm{i}xy$$

置 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，由前知 $z\to z_0$ 与 $x\to x_0, y\to y_0$ 两式相抵.

如果函数在点 z_0 连续，那么当 $z\to z_0$，即 $x\to x_0, y\to y_0$ 时，应有

$$f(z)\to f(z_0)$$

或

$$u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\to u(x_0,y_0)+\mathrm{i}v(x_0,y_0)$$

这和

$$u(x,y)\to u(x_0,y_0)$$
$$v(x,y)\to v(x_0,y_0)$$

两式相抵. 因此知道 $f(z)$ 在点 z_0 连续与 $u(x,y), v(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 连续相抵.

把函数分开为实数部分和虚数部分，再用初等实函数的连续性质，我们可以证明多项式 e^z，$\sin z$，$\cos z$ 等都是全平面上的连续函数. 有理分式也是处处连续的，除了那些使它的分母为零的点以外.

要讲更进一步的理论，我们得先讲单值函数，以后再特别考虑多值函数的问题. 多值函数，例如 $\sqrt{z-1}$，$\ln z$ 以及反三角函数等都是.

§2 导　　数

假设 $f(z)$ 在点 z 和它的某一邻域内已有定义. 导数 $f'(z)$ 我们已经按照常例定义为比率

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{4}$$

的极限. 这时极限值必须是有限的，并且不论复改变量 Δz 依照什么规律趋向零，极限值常为一定.

和实变数的情形一样，不难证明求导数时常数因子可以拿到导数符号之外来，并且通常关于和、积、商的微分的定理对于复函数也一样成立[Ⅰ,47]. 此外，用牛顿二项式公式易证关于指数为正整数的幂函数的微分规则[Ⅰ,47] 对于复函数也成立

$$(z^n)'=nz^{n-1} \tag{5}$$

这样我们就可断言多项式在任何一点 z 的导数都存在，而有理分式则除在

使它的分母为零之点以外处处有导数.

进而,通常关于复合函数的微分规则也成立

$$F'_z(w)=F'_w(w)\cdot w'_z \tag{6}$$

当然,这时等式右边两个导数都要存在. 又和实变数一样,如果 $f(z)$ 在某点的导数存在,那么它在这点必为连续[Ⅰ,45].

如果函数 $f(z)$ 在某区域 B 中已有定义,而且在 B 里面的每一点都有导数,就简称 $f(z)$ 在区域 B 中有导数. 这个导数也是 B 中的单值函数.

现在引进一个新的重要的定义. 我们称 $f(z)$ 在 B 中为正则,如果它在 B 中为单值而且有连续的导数 $f'(z)$. 由前所述,可知这时 $f(z)$ 在 B 中当然为连续. 有时也称 $f(z)$ 在一点 z_0 为正则,这是指 $f(z)$ 在包含 z_0 的某一区域中为正则的意思.

回到式(3),在那里 z 和 $f(z)$ 都被分开成实数部分和虚数部分,我们问:函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 应该满足什么条件时,$f(z)$ 才能在 B 中为正则. 现在先假设 $f(z)$ 在 B 中为正则,看由此可以引出关于 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的什么结果来.

我们早已说过,当导数存在时,其值与复改变量 $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y$ 趋向零的方式无关. 今在 B 中任取一点 M,坐标为 $z=x+\mathrm{i}y$,又取一动点 N,坐标为

$$z+\Delta z=(x+\Delta x)+\mathrm{i}(y+\Delta y)$$

且 N 趋向 M. 现在试看 N 趋向 M 的两种不同方式. 第一种方式是:N 沿一平行于 x 轴的直线趋向 M. 这时有

$$\Delta y=0 \text{ 而 } \Delta z=\Delta x \tag{7}$$

第二种方式是:N 沿一平行于 y 轴的直线趋向 M. 这时有

$$\Delta x=0 \text{ 而 } \Delta z=\mathrm{i}\Delta y \tag{8}$$

现在对这两种情形来求 $f'(z)$. 在一般情形下,我们有

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{[u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)]+\mathrm{i}[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)]}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y} \tag{9}$$

因此当 N 按照第一种方式趋向 M 时,有

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+\mathrm{i}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right]$$

这样,等式右边的实数部分和虚数部分就都应该有极限,这就是说,函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 应该有关于 x 的偏导数,并且下式成立

$$f'(z)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \tag{10}$$

同样,如果 N 按照第二种方式趋向 M 的话,则由(8) 和(9) 应有

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\mathrm{i}}\left[\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}+\mathrm{i}\,\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}\right]$$

或

$$f'(z)=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}-\mathrm{i}\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \tag{11}$$

比较(10) 和(11) 的右边,就得到 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 应满足的条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}=-\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\end{cases} \tag{12}$$

注意:由 $f'(z)$ 的连续性和(10)(11) 两式可知 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 有连续的一阶偏导数. 由以上的论断我们得到下面的结果:要使 $f(z)$ 在 B 中为正则,必须 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 B 中有关于 x 和 y 的连续一阶偏导数,并且这些偏导数要满足式(12) 中的两个关系.

现在再证明这些条件对 $f(z)$ 在 B 中为正则不但是必要而且也是充分的. 为此,我们假定上面的条件已经成立,再来证明 $f'(z)$ 的存在和连续. 由假设 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 关于 x 和 y 的一阶偏导数都是连续的,所以可写[Ⅰ,68]

$$u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

$$v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)=\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_3\Delta x+\varepsilon_4\Delta y$$

其中 ε_k 和 $\Delta x,\Delta y$ 一齐趋向零. 利用上两式求出函数 $f(z)$ 的改变量 $f(z+\Delta z)-f(z)$,代入式(4) 得

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$\frac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)+\mathrm{i}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+(\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_4)\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$$

利用式(12) 的条件,上式可改写为

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)+\mathrm{i}\,\dfrac{\partial v}{\partial x}(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}+\varepsilon_5\,\frac{\Delta x}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}+\varepsilon_6\,\frac{\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$$

其中

$$\varepsilon_5=\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3,\varepsilon_6=\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_4$$

和 Δz 一齐趋向零.

易知上面的等式右边最后两项也趋于零.例如

$$\left|\varepsilon_5\frac{\Delta x}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}\right|=|\varepsilon_5|\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

右边第一个因子趋于零,而第二个因子不大于一.

这样我们就有

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}+\varepsilon_7$$

其中 ε_7 和 Δz 一齐趋向零,而等式右边前面两项和 Δz 无关.因此,式(4)的比率就趋向一定的极限,恰如式(10)所定义的一般,而前述条件是 $f(z)$ 在 B 中为正则的充要条件也就得以证明了.式(12)中两等式通常称为柯西-黎曼方程.

其实这两个方程我们早已经见过,就是在研究理想不可压缩液体的稳定平面流动时,速度势和流函数需要满足这两个方程[Ⅱ,74].因此我们知道复变数函数论的基本方程(12)同时也是研究流体力学的基本方程.基于这个事实,复变数函数论在流体力学上有许多的应用,我们在下一章将要讲到.

现在再注意一件可以由式(12)导出的重要事实.以后我们将会知道,当 $f(z)$ 为正则时,$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的任何阶偏导数都存在.现在先用一用它们的二阶偏导数存在这一件事再说.将(12)中第一式对 x 求偏导数,第二式对 y 求偏导数,相加得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{13}$$

同样由(12)可导出

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \tag{13'}$$

由此可知,正则函数 $f(z)$ 的实数部分和虚数部分都要满足拉普拉斯方程,这就是说,它们应该都是调和函数.在下一章中我们还要详细研究复函数论和拉普拉斯方程间的关系.

从(13)和(13′)还可以导出一件重要的事实,就是如果已知一个正则函数的实数部分,我们可以作出这个函数来.这时 $u(x,y)$ 当然是(13)的一个解,我们要证明 $v(x,y)$ 除了一个常数项以外可以唯一决定.其实,由式(12)有

$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$