



科学新悦读文丛

优雅的 等式

欧拉公式与数学之美

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

[美]

戴维·斯蒂普
(David Stipp)

著

涂泓 冯承天
译

A Most
Elegant Equation:
Euler's Formula and the Beauty of
Mathematics



中国工信出版集团



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

 | 科学新悦读文丛

优雅 的 等式

欧拉公式与数学之美

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

[美]

戴维·斯蒂普

(David Stipp)

著

涂泓 冯承天

译

A Most
Elegant Equation:
Euler's Formula and the
Beauty of Mathematics

人民邮电出版社
北京

图书在版编目 (C I P) 数据

优雅的等式：欧拉公式与数学之美 / (美) 戴维·斯蒂普 (David Stipp) 著；涂泓，冯承天译。—北京：人民邮电出版社，2018.12
(科学新悦读文丛)
ISBN 978-7-115-49298-2

I. ①优… II. ①戴… ②涂… ③冯… III. ①欧拉 (Euler, Leonhard 1707-1783) — 数学公式 — 普及读物
IV. ①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第206237号

版 权 声 明

A Most Elegant Equation: Euler's Formula and the Beauty of Mathematics

Copyright © 2017 by David Stipp

Simplified Chinese edition copyright © 2018 by Posts & Telecom Press

This edition published by arrangement with Basic Books, an imprint of Perseus Books, LLC, a subsidiary of Hachette Book Group, Inc., New York, USA, through Bardou-Chinese Media Agency.

ALL RIGHTS RESERVED.

-
- ◆ 著 [美]戴维·斯蒂普 (David Stipp)
 - 译 涂 泓 冯承天
 - 责任编辑 刘 朋
 - 责任印制 陈 犇
 - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路11号
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷
 - ◆ 开本：700×1000 1/16
印张：10.25 2018年12月第1版
字数：146千字 2018年12月河北第1次印刷
著作权合同登记号 图字：01-2018-1403号



定价：39.00 元

读者服务热线：(010)81055410 印装质量热线：(010)81055316

反盗版热线：(010)81055315

广告经营许可证：京东工商广登字 20170147 号

内容提要

伯特兰·罗素曾经写道，数学可以“如诗歌一般确定无疑地”令人感到欢欣愉悦和志得意满。 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 这个等式尤其如此。莱昂哈德·欧拉堪称数学界的莫扎特，即使在他去世两个世纪之后的今天，他的这项智慧成就仍然被视为一块概念论的钻石，有着无法逾越的美。物理学家理查德·费曼将它称为“数学中最卓越的公式”，而数学家基思·德夫林则将它比作“莎士比亚的一首捕捉到了爱的精髓的十四行诗”。

欧拉公式有时也被称为上帝方程，其中只包含 5 个数，却令人惊讶地揭示出了那些隐匿的关联。这个等式将基本算术与复利、圆的周长、三角学、微积分甚至无限联系在一起。作者戴维·斯蒂普用欧拉等式作为一盏导航灯，引领我们一个接一个地浏览那些具有启发性的数学概念，他顽皮地说明了为什么无限就像是一条在闲暇时间拉犁的龙，如何撰写一部无字自传，以及如何将一个数乘以 -1 想象成发送一艘宇宙飞船去穿越四维空间。戴维·斯蒂普通过这一切明示了可以利用单一个等式就阐明许许多多的奥秘，以及它对于我们置身其间的宇宙又揭示出了什么。

让我们一起揭开这个神奇等式的神秘面纱，领略数学之美吧！

献给艾丽西亚、昆汀和克莱尔。

你还能回忆起你是为何爱上数学的吗？我想，不会是由于它在管理库存物资方面的用处，而是由于它会给予的那些乐趣、能力感和满足感，那些激起敬畏、欢欣或惊异的定理，那些我所认为的人类至高无上的智慧成就所带来的惊奇和荣耀。难道不是这样吗？

安德伍德·达德利
美国迪堡大学数学荣誉退休教授

引言

谁能抗拒去看这样或那样的十佳榜单？我可不行。因此，几年前当我偶然看到数学家们列出的一份最美定理排名时，它就引起了我的关注。我决定将这看成一次突击测验：我能从我那遥远的数学专业本科学习岁月中回忆起其中的哪几条？糟糕，很遗憾，我败下阵来了。不过，我仍然为自己能够回忆起前10条（共24条）中的9条而感到欣慰。然而，其中排名第一的最美定理却令我感到困扰——我以前就曾见过这个被称为欧拉公式的等式，但记不起在求学期间曾仔细研究过它。

当时我有点儿想为自己开脱，心想它很可能被高估了。这个公式中既没有神秘的符号，也没有其他严肃的数学艺术的真知，

它只不过以数为特征，而且只有 5 个数而已（在其通常的写法中就是如此）。确实，其中有 3 个数是用字母来表示的，这显示了它们的特殊性。不过，与一个困惑不解的小学一年级学生写出的 $2+1=0$ 相比，这个等式^[1] 本身看起来也并没有显示出更多的灼见。你看，它就是 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 。

我当时无疑已经很熟悉莱昂哈德·欧拉^[2]（欧拉的发音接近“oiler”）了，这个公式就是以这位 18 世纪的数学家的名字来命名的。他被称为数学界的莫扎特，并且可以说他的印迹遍布我的那些老旧数学书中的每一页。不过，这并没有说明多少问题，而且这个公式随后就开始像一段曲调，其由来与发展一直在我的脑中挥之不去，叫人受不了。通过谷歌一查，我发现许多数学方面的权威人士都认为它不仅美，而且是数学史上最卓越的成果之一。其中就有我的偶像之一理查德·费曼^[3]，这位杰出的理论物理学家曾参与过曼哈顿计划，赢得过诺贝尔奖，领导了 1986 年“挑战者号”航天飞机失事的调查工作，并且最重要的是，他显露出几乎超越常人的生活乐趣。为什么这个看起来很简单的小小公式竟会吸引他那能量无穷的头脑？

好吧，我决定是时候来做一番调查研究了。尽管我在大学毕业后改行去从事科学写作，但是我要充当我那几个喜欢转动着眼珠的孩子的数学导师，以此来避免我的数学思维完全萎缩。就我儿子的情况来说，我一直辅导了他整个高中阶段的微积分课程。因此，我查阅了欧拉公式的推导过程（如果你懂一点儿微积分的话，这个过程是相当直截了当的），并探究了它的历史和意义。正如在我之前的许多数学爱好者一样，我在完成这一切后不禁想喝彩，或者更精确地说是拍案叫绝。

首先，它实际上相当于将数学中两千年来的那些大思想压缩进了一个小

[1] 欧拉等式常常被称为公式或恒等式。我将它称为等式或公式，以掩饰这样一个事实：这些术语在正式的数学中并不是同义的。——原注

[2] 莱昂哈德·欧拉（Leonhard Euler, 1707—1783），瑞士数学家和物理学家，近代数学先驱之一，对微积分学和图论等多个领域都做出过重大贡献。——译注

[3] 理查德·费曼（Richard Feynman, 1918—1988），美国理论物理学家，量子电动力学创始人之一，1965 年诺贝尔物理学奖获得者。——译注

得出奇的包裹之中。这些大思想包括：无限的性质和应用（从根本上来说，无穷大就隐藏在这个公式内部）， π 这个数在数学中无处不在的怪异现象，名字起得令人误解而大有用处的叙述，一无所有（也就是 0）的精妙之处。不过，真正吸引我的注意力的是这样一个事实：欧拉在发现这个公式的路上，揭开了数学概念之中的一组隐秘的关系。尽管许多学生在高中时就学习过这些概念，但是他们没有意识到它们是以一种可以描述为酷到邪门的方式彼此深刻联系在一起的。（也就是说，比单纯的了不起还要再酷上好几个等级。）

我就这样理解了其中的美。不过，我仍对记忆中的那些空白之处惊讶不已，那里本该有一位选美皇后。我拿出了大学时代的那些微积分书继续探究。我当时将它们作为战利品保存下来，以纪念我躬身阅读它们所花费的时间。这些书的索引中并没有列出欧拉公式。在逐页翻阅它们的过程中，我终于找到唯一的一处短暂地提到了一个一般公式（这个公式也是由欧拉提出的），而那个最美的公式可作为它的一个特例而得出。我能找到的最接近“ $e^{i\pi} + 1 = 0$ ”的内容是一道练习题，其答案恰好就是该式的另一种形式。

原来如此，我当时这样想。我并没有忘记欧拉公式，只是在我求学的时代，它被轻描淡写地提到了一下。现在回头细想，这个最美的等式在我儿子的任何高中数学课程中也都没有被提到过。

最后，这种想法使我回忆起对于当初的这些课程，我实在知道得太多了。确实是这样，我在内心深处叹息道。作为儿子昆汀的导师，我对于他日常的数学作业比他自己更熟练。作为一个初露头角的艺术家，他认为数学课既无聊又浪费时间。而到他动身去上大学时，我看他的那些数学书时出现了幻影。我所看见的两幅影像之一是我作为一名数学爱好者所知道的那一具有进取心的形象，而另一幅影像则是他眼中所看到的。2013 年，小说家尼克尔森·贝克在《哈珀斯》杂志上发表了一篇文章，谈及强制性高中数学课如何常常孕育出学生对数学的憎恶，其中令人难忘地描述了这后一幅影像。他特别写道：“[学习代数 II 课程的学生们]被迫反复盯着这些不出声的符号体系所构成的一个个令人毛骨悚然的辣根块看，如平方根、多项式。这些东西令他们恼怒，

挡住了他们的去路，而且也是他们所无法理解的。家庭作业没完没了，算法变得越来越长、越来越棘手，考试接踵而来。他们之中的许多人迟早会中途垮下来。”

你大概能看出我说这些是为了什么。我的下一个想法是：要是昆汀以及其他数百万认为数学是最佳催眠药的人能体验我再次看到欧拉这一伟大发现时所感受到的那种震颤就好了。我内心深处的独白者早已在我耳边低语：“写一本书吧！”然而，我坚定地对他说，让我们还是现实一点儿吧。对于那些把大部分高中数学知识都忘记了的人，他们是不可能体验到这种顿悟的。这个主意太荒谬了，忘了它吧。光是想到这个主意就会对我作为一名有些理性的思考者的名声造成无可估量的损害。

当然，随后我就坐下来开始写这本书了。这样说稍微有点儿夸张了，我对这个想法反复斟酌了大约一年的时间。最终我想起了美国哲学家奥茨·柯尔克·鲍斯玛是如何克服犹豫不决而写出一本他曾拿不定主意是写还是不写的书的。他这样解释道：“我抛出一枚硬币，而它也如我所料地落了下来。它竖立在那里，于是我把它推倒了。”

所以，我们就有了这本书。不过，在你钻研本书（或者决定不去看它）之前，请先看完这篇引言。我会长话短说。

我推倒这枚硬币的原因之一是，欧拉公式提供了一种非常罕见的组合，其中有美感、有深度、有惊讶，而对于我的种种目的而言最重要的是，它还具有可理解性——几乎没有什么深奥的数学结论会像它这般容易理解（虽然还需要做一番解释，显然就是薄薄一本书的代价）。我也知道在撰写过程中，我有机会去重温被如此巧妙地封装进这个公式中的各种想法，从而使我能漫步于整个数学史。

此外，这个公式并不仅仅是抽象艺术的一种数学版本。在欧拉之后很久，科学家和工程师们才认识到，上文所提及的那个一般等式（即 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 概念上的上层等式）对于用数学方法来模拟像交流电那样有节奏变化的一些现象是极其有用的。因此，欧拉的这一才华横溢的纯数学发现如今已深深地融

合在我们周围的各种电气设备之中。我也会把这称为酷到邪门，假如允许我再次使用这一形容方式的话。

这个公式的不朽也对我产生了吸引力。电气工程师保罗·纳辛在他为学过大学数学的人所撰写的关于此公式的一本书中说得好：“在遥远未来的技术人员看来，如今的物理学、化学和工程学几乎必然都是陈腐过时的，但欧拉公式不同，即使对于1万年后无论多么先进的数学家来说，它仍然是完美的，令人震撼，并未因时间而褪色。”

我希望本书能大致描述出这些光彩的林林总总。不过，我觉得有必要先提几件事，权当公示一下本书的主旨。首先，写作本书的意图并不是帮助读者提高数学技能，也不打算透彻地教授它所涵盖的数学内容，本书的唯一任务是要清晰地阐明伟大的数学就如同伟大的艺术或伟大的文学一样具有美感和深度，令人振奋。其次，假如你是一位资深数学爱好者，那么你很可能会发现书中的大部分内容都过于基础（也许附录1除外）。有些人已经忘记了他们在六年级以后所学的大部分数学知识，也许他们一时想不起这些知识。我尽力使这些人也能理解本书介绍的数学内容。因此，我假定读者熟悉生活中需要处理的那些基本知识，如算术运算、分数、比率、小数、百分数。美国的孩子们在七年级或八年级学习代数之前应该知道这些内容。

不过，我还是引入了许多数学表达式。你也许会由此推断出，我在某种程度上没有贯彻物理学家斯蒂芬·霍金的那条关于在非技术性书籍中使用数学表达式的著名告诫。他谈论道：“有人告诉我，我在这本书（《时间简史》）中所引入的每一个数学公式都会使销量减半。因此，我决定完全不列出任何公式。”（最终他还是用了一个公式： $E = mc^2$ 。）事实上，我很清楚这条评论，实际上它如文身一般印刻在我的大脑皮层上。但是我认为，介绍欧拉公式而不使用公式，就如同描述凡·高的《星夜》^[1]而不展示图片一样。这会使我无法实现自己的目标，而我的目标是使读者们能够真正接近数学史（甚至人类

[1] 文森特·凡·高（Vincent van Gogh, 1853—1890），荷兰后印象派画家，表现主义的先驱。《星夜》是1890年他在法国的一家精神病院里创作的一幅著名油画。——译注

思想史)上的一个制高点。

我当然想到过，假如那条销量减半原理是正确的，那么本书能吸引的读者也许不到一百万分之一个人。(这里有好几十个数学表达式。)不过，我还是很高兴地宣布，现在我们已经知道有超过这个数字一百万倍的人翻阅了这本书(指的就是你，亲爱的读者)，而这意味着那条原理的提出者也许需要做些数学修正。无论如何，我希望至少有几个渴望学习知识的人会继续阅读下去，并发现自己体验到了一些出乎意料的惊异，度过了一些欢欣鼓舞的时刻。要去读一本书还有什么更好的理由吗？同样的道理，还有什么更好的理由去写一本书吗？

目录

CONTENTS

- 第 1 章 上帝方程 / 1
- 第 2 章 一个完全关于变化的常数 / 9
- 第 3 章 它甚至从每一根烟囱里下来 / 23
- 第 4 章 游移在存在与不存在之间的数 / 34
- 第 5 章 大师的肖像 / 40
- 第 6 章 穿越虫洞 / 54
- 第 7 章 从三角形到跷跷板 / 58
- 第 8 章 雷吉的难题 / 73
- 第 9 章 整合 / 79
- 第 10 章 欧拉公式的新阐述 / 87
- 第 11 章 这一切的意义 / 104
- 附录 1 欧拉的原始推导 / 124
- 附录 2 为什么 i 是实数 / 137



致谢 / 139

词汇表 / 141

参考文献 / 145

上帝方程

1783 年 9 月 18 日晨间，莱昂哈德·欧拉看来似乎一如既往地好奇、欢快和敏锐，这是他生命中的最后一天。此时俄国的圣彼得堡已接近秋天，这位 76 岁的瑞士数学家与他的大家庭一起生活在那里，并在俄国科学院工作。尽管他双眼几近失明已经有十多年了，但他仍然在继续以令人震惊的速度发表数学和科学论文——他在失明以后实际上更加多产。欧拉在他的头脑中进行复杂的计算，然后向助手们口述这些计算的结果，而这些助手则将它们记录在他放置在书房里的两块很大的书写石板上。

那天早晨，按照他的习惯，他在给他的一个孙子上一节基础科学课。稍后，两位同事来讨论一些科学问题，其中包括最近发

现的行星——天王星，以及几个月前由一对法国兄弟约瑟夫 - 米歇尔·孟戈菲和雅克 - 艾蒂安·孟戈菲在无人驾驶的情况下所进行的那些新颖的热气球实验。他们很快就会由于实现首次载人飞行而被载入史册。

欧拉告知来访者说，他已失去了残存的视力，接下去就开始解一个复杂的微分方程（微积分中的一种运算），用以模拟热气球的上升，并以此确定它们能够飞到多高。他还在头脑中进行了一些与天王星轨道相关的计算。午饭后，他说自己感到头晕，于是躺下来小睡片刻。

几个小时后，他又重新来到他的家人和朋友们之间，共享 4 点钟的下午茶。他坐在一张沙发椅上，愉快地与他的一个孙子玩耍，随后又向他的妻子再要了一杯茶。两分钟后，他突然扔下正在抽的烟斗，站了起来，双手紧捂着前额，用德语大声惊呼道：“我要死了。”这是他说出的最后一句话，也表现出了他所特有的那种直觉。他中风了，而事实证明这次中风是致命的。他很快就失去了知觉，在当天傍晚就去世了。

那一天的晚些时候，欧拉的长子约翰在他父亲的石板上偶然发现了一些最近的计算。尽管他感到震惊而悲痛（或者也许正是由于这些情绪），但他很快就开始着手完善关于热气球的那些计算，并将结果作为欧拉去世后的第一篇论文发表在一本法国杂志上。随后还有很多这样的论文，欧拉留下了大量从未发表过的手稿，其中满是重要的发现，这些发现在他去世后的数十年间陆续发表。

欧拉的生命贯穿了启蒙运动^[1]的大部分时间，这是继百花齐放的文艺复兴之后的一场思想大爆发的鼎盛时期。在 18 世纪这场运动的巅峰时期，知识分子们云集于咖啡馆和文学沙龙，高谈阔论着一些改变世界的理念，这些理念与科学、个体自由、宗教宽容和自由市场经济有关。美国精神就是在这

[1] 启蒙运动通常指在 18 世纪初至 1789 年法国大革命之间的一个各个知识领域中新思维不断涌现的时代，是继文艺复兴后的又一次思想解放运动。——译注

场启蒙运动期间造就的，1776年杰斐逊^[1]起草《独立宣言》时就在倡导这种精神。同一年，苏格兰哲学家亚当·斯密出版了《国富论》^[2]，这本书传播了这样一种产生巨大影响的理念：理性的利己主义能够促进经济繁荣。几年后，英格兰的玛丽·沃斯通克拉夫特写出了《女权的辩护》^[3]，这是最早的女权主义小册子之一。

启蒙运动中出现的伟大人物包括乔治·弗里德里希·亨德尔、沃尔夫冈·阿玛多伊斯·莫扎特、弗朗茨·约瑟夫·海顿、乔纳森·斯威夫特、亚历山大·蒲柏、塞缪尔·约翰逊、丹尼尔·笛福、伏尔泰、托马斯·潘恩、本杰明·富兰克林、孟德斯鸠、大卫·休谟、伊曼努尔·康德、德尼·狄德罗、威廉·赫歇尔、安托万·拉瓦锡和夏特莱侯爵夫人。其中，夏特莱侯爵夫人是一位数学家和物理学家，她是在法国科学院发表科学论文的第一位女性。这些人中的许多都是一个国际文坛的成员，其非正式的座右铭是康德的那句名言“*Sapere aude*”（拉丁语，意思是“敢于认知”）。这个时代最具影响力的作家，例如斯威夫特、潘恩和伏尔泰，以前所未有的热情和智慧去抨击那些当时公认的权威和当权者。他们之中的许多人认为真相的最终仲裁者是人类的理性，而不是神明的启示。这导致当时的许多知识分子都信奉自然神论。这种观点认为上帝建立起这个宇宙，令其按照那些可以发现的自然定律运行，然后他就永远退居幕后了。自然神论者们拒绝接受奇迹和其他超自然现象，认为这些都是迷信。

有些人追随英格兰的约翰·洛克^[4]，相信自然定律也适用于人类社会，而

[1] 托马斯·杰斐逊（Thomas Jefferson, 1743—1826），《独立宣言》的主要起草人，美国第三任总统（1801—1809）。——译注

[2] 亚当·斯密（Adam Smith, 1723—1790），苏格兰哲学家、经济学家。他所著的《国富论》是第一本试图阐述欧洲产业和商业发展历史的著作。

[3] 玛丽·沃斯通克拉夫特（Mary Wollstonecraft, 1759—1797），英国作家、哲学家和女权主义者。她所著的《女权的辩护》是女权主义哲学最早的作品之一。——译注

[4] 约翰·洛克（John Locke, 1632—1704），英国哲学家、经验主义的代表人物，在社会契约理论方面也做出了重要贡献。——译注