



Problems in Analytic Geometry

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

# 解析几何习题集

[苏] 楚倍尔毕雷尔 著 刘培杰数学工作室 译



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

# Problems in Analytic Geometry

# 解析几何习题集

● [苏] 楚倍尔毕雷尔 著  
● 刘培杰数学工作室 译



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内 容 简 介

本书系根据苏联国营技术理论书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的楚倍尔毕雷尔(О. Н. Цубербиллер)著的《解析几何习题集》(Задачи и упражнения по аналитической геометрии),1953年第十七版译出,原书经苏联高等教育部审定为高等工业学校教学参考书。

本书共分四编:第一编为直线解析几何,第二编为平面解析几何,第三编为空间解析几何,第四编为向量代数。

本书适合高等工业学校,高等师范学校学生及数学爱好者参考、阅读。

## 图书在版编目(CIP)数据

解析几何习题集/(苏)楚倍尔毕雷尔著;刘培杰数学  
工作室译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.6  
ISBN 978-7-5603-6856-6

I. ①解… II. ①楚… ②刘… III. ①解析几何—习  
题集 IV. ①O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 192711 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 聂兆慈

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨圣铂印刷有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 21.75 字数 410 千字

版 次 2017年6月第1版 2017年6月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-6856-6

定 价 88.00 元

---

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

# ◎ 第十七版序言

本习题集是准备给高等工业学校和高等师范学校学生用的. 在其中尽可能地应用物理学、力学及别的应用科学范围内的问题. 注意图解, 注意用机械作成曲线和曲面的问题, 介绍最简单的机械的概念, 使之与轨迹问题联系起来.

在编写本习题集时也考虑了函授学校的学生及自修数学者, 所以在每章开始除了公式, 还作了必要的理论说明, 以便读者正确而有意识地应用这些公式. 典型的问题在文内有解答, 大多数问题的答案附有提示, 有时有详细的解答. 每一章以较容易的例题开始, 选择问题的原则是: 所有的问题都是由浅入深的.

我们经常应用个别的提示、附注和问题来提醒学生们: 在应用解析方法时都是要与几何打交道的, 每一步解析计算有相当的几何内容, 且所得的每个结果, 有简单的解释.

书中的材料是这样安排的: 它使学生们在研究二次曲线(或曲面)的一般理论前就已得到它们的几何性质的牢固知识. 在一般理论中, 主要注意力放在研究曲线(或曲面), 即研究两个问题: 如何由曲线(曲面)的方程判断它所具有的性质及如何判断它在所选坐标系中的位置.

自第二版开始,在那些对于高等工业学校来说,材料稍显贫乏的几章中补充了新的习题,而后由于对年青学者的要求提高了,所以又在习题集补充了较难的习题.

自第十一版及以后各版中,加入了关于向量代数及它在几何中的应用的第四编.向量的引入并没有改动前三编的材料,这符合那些不研究或在学习解析几何后单独研究向量代数的高等工业学校学生的需求.对于在解析几何教程中研究向量代数的学生,自然要使研究空间几何的时机与熟习向量的时机相适合,但第十五章所给的材料并不要求什么预备知识,因此为了邻近课题的要求,可提前学习.

第十六章的第一节是以第七章为基础的,因此应直接跟在它后面.只有第八章的材料,只能做足够数量的练习被学生牢固掌握以后才能着手研究第十六章第二节.第十六章的第三节可与第九章同时研究,而第四节和第五节可与第十章同时研究.

第十六章的习题不包含新的几何材料,但它提供了对同样内容的习题应用不同方法的可能性.

学生们最好比较一下用坐标和向量表示的公式和方程,比较求解的过程及所得的结果,并从向量表示式变换成坐标表示式或从坐标表示式变换成向量表示式,以便在解某一问题时,估计各个方法的优点.

在第十五版出版前,笔者曾经小心检查过是否包含可使低年级学生产生错误观念的概念,例如与具体观念联系不够的科学原理.

当时,习题集的编者是以 Б. К. Млзеевский 教授的古典教本, А. К. Власов 教授和其他莫斯科大学几何学派代表的教本为依据的,他们都是以投影几何原理为依据来编写解析几何教程的.因此很早就引入了非固有元素的概念并且仔细地解释这些概念的意义和作用.

随着时间变化,学生们所读教程的性质也已改变了.一方面对于学数学的学生,解析几何教程是以仿射度量几何为基础的,而只在教程最后才给出投影几何基础;另一方面在高等工业学校的已经非常饱和的数学教程中,已不可能再包含投影几何原理.因此在专门为高等工业学校编写的教程中已把非固有元素完全删掉.

在编写本习题集的第十五版时,改变了理论的解释和上面提到的那些包含非固有(太遥远的)元素的所有习题.

经过改编后,二次曲线和曲面按它们与直线相交的特点来分类的方法,如再予保留就不合理了.因此在第十六版中又改写和重新安排了关于二次曲线一般理论(第六章)和二次曲面一般理论(第十四章)的材料.在研究二次曲线时首先提出的问题是曲线中心的存在问题,直接与它相关的是有关分解为一对直线

的曲线的考察和研究. 无法分解的曲线的分类法是把它化为最简单形式的方程.

在二次曲面的一般理论中也用类似的分类. 这样布置材料就与现代高等工业学校的教学计划很符合了.

第十七版中只改正了编者和编辑所看到的排印的个别错误, 并没有什么改变.

## 第一编 直线解析几何

### 第一章 直线上的点的位置、基本公式 //3

- 1 坐标变换公式 //5
- 2 基本公式 //5

## 第二编 平面解析几何

### 第二章 平面上点的坐标、基本公式 //13

- 1 直角坐标、图解 //13
- 2 两点间的距离、线段的方向、三角形的面积 //18
- 3 分线段为给定比 //21
- 4 斜角坐标系 //23
- 5 极坐标系 //26
- 6 投影、坐标的变换 //28

### 第三章 方程的几何意义 //33

- 1 按曲线的方程作曲线 //33
- 2 按曲线的几何性质作它的方程 //36

### 第四章 直线 //42

- 1 具有角系数的直线方程、两条直线间的交角、经给定点及给定方向的直线方程 //42
- 2 经过两个已知点的直线方程、截距式直线方程、三个已知点在一条直线上的条件 //46

- 3 直线的法线方程、点到直线的距离 //49
- 4 直线的一般方程、两条直线的交点、三条直线经过一点的条件、直线束 //55
- 5 混合的直线问题 //61

### 第五章 二次曲线的基本性质 //64

- 1 圆 //64
- 2 椭圆 //71
- 3 双曲线 //77
- 4 抛物线 //83
- 5 二次曲线的极坐标方程 //87

### 第六章 二次曲线的一般理论 //89

- 1 二次曲线的一般方程、在坐标轴平行移动时方程的变换、曲线的中心 //89
- 2 将二次曲线分解为一对直线的条件、一般二次方程的研究 //92
- 3 二次曲线与直线相交、二次曲线的切线方程 //96
- 4 曲线的直径、主轴、渐近线,移到共轭方向的曲线方程,移到渐近线上的曲线方程 //100
- 5 用不变式变换二次曲线方程— //107
- 6 极点和极线 //109
- 7 不在主方向上的曲线的焦点的性质问题 //112
- 8 混合问题 //114

## 第三编 空间解析几何

### 第七章 直角坐标 // 119

### 第八章 方程的几何意义 //126

### 第九章 平面 //129

### 第十章 在空间中的直线 //136

- 1 直线方程、两条直线的交角、在空间中两条直线相交的条件 //136
- 2 直线与平面 //142

### 第十一章 球面 //146

### 第十二章 圆锥和圆柱 //149

### 第十三章 二次曲面的最简方程 //153

### 第十四章 二次曲面的一般理论 //162

- 1 二次曲面的一般方程及它在移动原点时的变换、曲面的中心、方程为圆锥或一对平面的条件 //162
- 2 曲面和直线及平面相交、渐近方向、切平面 //166
- 3 直径平面、主方向、一般二次曲面方程的研究并把它化为最简单形式 //170



## 第四编 向量代数的基础和它在几何学中的应用

### 第十五章 向量和它的运算 //177

- 1 向量、向量的相等、向量的加法和减法、向量与数乘、向量的分解 //177
- 2 向量的投影、向量的数量积 //184
- 3 矢性乘法、三个向量的混合积、二重矢性积 //188

### 第十六章 向量代数在解析几何学中的应用 //193

- 1 用向径决定点的位置、向量的坐标,用已知的向量的坐标进行运算、基本公式 //193
- 2 向量方程的几何意义 //200
- 3 平面 //204
- 4 空间中的直线 //209
- 5 直线和平面 //215

答案和提示 //218

编辑手记 //302

---

# 第一编

直线解析几何

---



## 直线上的点的位置、基本公式

# 第一章

解析几何方法的主要特点之一,就是用数来决定几何图形的位置.确定几何图形位置的数叫作它们的坐标.

我们暂时只研究位于一条直线上的点,为了能在这条直线上确定点的位置,在其上规定坐标如下:

1) 选定原点,即点  $O$ (图 1),以它为标准确定其余各点的位置;

2) 选定单位长度( $e = PQ$ )来度量从原点到所研究点的距离;

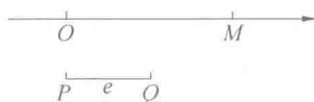


图 1

3) 选定直线的正方向(在图上用箭头来表示),这不但可以按它们的绝对值,而且还可以按正负号来区别线段:线段的正或负要按照从它的始点到终点的方向与直线的正向或反向相同而决定(在图 2 中,线段  $OA$  是正的, $OB$  是负的).

在直线上规定好坐标后,直线上的每一点  $M$  就对应于一个唯一的表明它的位置的数,即一个坐标  $x = \frac{OM}{PQ}$ ,它的绝对值是由所给的单位长度量出的从原点到点  $M$  的距离,而符号表示点在原点的哪一边.

反之,每一个数字对应于直线上唯一的一个点,例如作坐标为  $x=+3$  的点,即  $\frac{OA}{PQ}=3$ ,或  $OA=3 \cdot PQ$  的点  $A$ . 点  $A$  由从原点向右(图 2)且其长度由三个比例尺单位的线段终端所唯一确定.

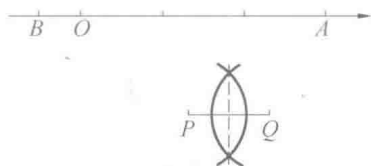


图 2

如果点  $B$  的坐标等于  $-\frac{1}{2}$  (其写法是把它的坐标写在点的标记的括号内:  $B(-\frac{1}{2})$ ), 则我们从原点向左取选定的单位  $PQ$  的一半(图 2)作点  $B$ , 再作点  $C(+\sqrt{2})$ , 在此情形下  $OC=\sqrt{2} \cdot PQ$ . 为了要得到这样的线段, 作以线段  $PQ$  为边的正方形, 正方形的对角线  $a=\sqrt{2} \cdot PQ$ , 因此由原点沿正方向取等于这条对角线长的线段, 即得点  $C$ (图 3).

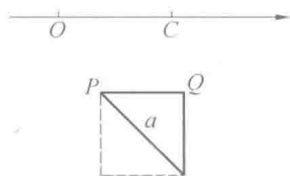


图 3

当我们说已知一点, 这就是说, 已知它的坐标; 当要按照某些条件求点时, 这就是说, 需要计算它的坐标.

因此在直线上的点和实数间确定了一一对应, 我们可以利用这个对应关系, 以图解方法表示出变数的任何变化. 例如将变数  $x$  依次取等于等比级数

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots$$

各项的值. 这些变数的值用点

$$A_1\left(+\frac{1}{4}\right), A_2\left(+\frac{1}{2}\right), A_3(+1), A_4(+2), A_5(+4), A_6(+8), \dots$$

画在直线上(图 4), 我们显然看出, 这变数跳跃着变化, 每个后面的数比前面的大一倍, 如果变数按照等差级数项, 例如:  $1, 1.5, 2, 2.5, 3, \dots$ , 规律变化, 则我们

在直线上得到互相等距的一系列点(图 5).

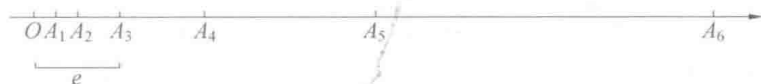


图 4



图 5

在许多量具中,我们就是按直线上点的位置来判断被研究量的变化的,例如我们按水银柱的水平线在垂直的标度线上的位置来判断温度.在这种情况下,以在冰的熔点时水银水平位置为始点,选从下向上方为正方向,又单位长度等于水银从冰的熔点到水的沸点(摄氏)的 $\frac{1}{100}$ .

如果改变原点、直线的方向或长度单位,则直线上的点和数之间的对应关系就不同——每一点得到新的坐标.

## 1 坐标变换公式

如果移原点至  $O'(a)$ , 则直线上任何一点的旧坐标( $x$ )和该点的新坐标( $x'$ )间存在下列关系

$$x = x' + a \quad (1)$$

如果以与原直线相反的方向为正方向,则所有点的坐标符号改变,而其绝对值不变

$$x = -x' \quad (2)$$

如果选新的单位长度  $e' = P'Q'$ , 则该点的坐标反比于相应的单位,即

$$x = \frac{e'}{e} x' \quad (3)$$

## 2 基本公式

如果给定两点  $A$  和  $B$  及其坐标  $x_1$  和  $x_2$ , 则它们间的距离按公式

$$AB = x_2 - x_1 \quad (4)$$

计算,即线段长等于它的端点的坐标差,且必须终点的坐标减去始点的坐标.

因为式(4)对于点的一切位置都正确,因此必须注意线段的正确符号并把表示线段始点位置的字母放在前面,而把表示线段终点位置的字母放在后面.

例 给定两点  $A(-3)$  及  $B(+4)$ , 则  $AB = 4 - (-3) = +7$ ,  $BA = -3 - 4 = -7$  (图 6).



图 6

如果在直线上给定两点  $A(x_1)$  和  $B(x_2)$ , 则存在第三个点  $C(x)$  把线段  $AB$  分成定比  $\frac{AC}{CB}$  (图 7), 我们用字母  $\lambda$  表示它, 即

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{\text{从始点至分点的线段}}{\text{从分点至终点的线段}}$$

要计算  $\lambda$  用公式

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \quad (5)$$

$\lambda$  为正或负值按照分点  $C(x)$  在线段  $AB$  之内或之外而定.



图 7

反之,如果给定比  $\lambda$ , 则相应于分点  $C(x)$  的坐标由公式

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad (6)$$

确定, 其中, 当  $\lambda = 1$ ,  $AC = CB$  时, 我们有

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (7)$$

即线段中心的坐标等于它的端点的坐标和的一半.

四点  $A, B, C$  和  $D$  的复比(非调和比), 即为两个比的比, 其中点  $C$  分线段  $AB, D$  分同一线段  $AB$ , 把它表示为

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$$

如果  $(ABCD) = -1$ , 则相应的四点叫作调和比.

1. 作下列各点

$$A(+4), B(-2.5), C(-\frac{2}{3}), D(+\sqrt{3}), E(-0.4), F(\sqrt{5}-1)$$

2. 求满足下列方程的点:

$$1) \frac{5x-2}{3} - \frac{2x-1}{7} = \frac{3x+4}{2} - 3;$$

$$2) x^2 - 4 = 0;$$

$$3) x^2 + x - 6 = 0;$$

$$4) x^3 - 4x^2 + 3x = 0;$$

$$5) x^2 + 4x + 4 = 0;$$

$$6) x^2 - x + 6 = 0.$$

3. 沿直线匀速运动的点在任意时刻  $t$  的位置公式为  $x = vt + c$ , 式中  $v$  是点的速度,  $c$  是点的开始位置. 如果运动规律方程为  $x = 3t - 7$ , 在图上画出开始时刻及前五秒钟每秒末的点的位置, 试证这点在相等时间内经过相等的路程.

4. 试求点  $A(+3)$  关于:

1) 原点对称的点的坐标;

2) 点  $B(-2)$  对称的点的坐标;

3) 点  $C(+5)$  对称的点的坐标.

5. 给定点

$$A(+9), B(+5), C(-3), D(-8), M(x)$$

求这些点在单位长度为:

1) 比原来的小  $\frac{1}{3}$  倍条件下的坐标;

2) 比原来的大一倍条件下的坐标;

3)  $e' : e = 5 : 2$  条件下的坐标.

6. 已知 1 公里等于 468.7 俄丈, 写出在沿铁路线位置的俄制里程碑改用公



制度量时,可用来做新的里程数的公式<sup>①</sup>.

7. 如果用列氏温度计量温度,写出以摄氏度数计量温度的公式.<sup>②</sup>

8. 当原点移到:

1) 点  $O_1(+3)$  后,点  $A(+6)$ ,  $B(+2)$ ,  $C(0)$ ,  $D(-2)$ ,  $E(-7)$  及  $M(x)$  的坐标;

2) 点  $O_2(-5)$  后,点  $A(+6)$ ,  $B(+2)$ ,  $C(0)$ ,  $D(-2)$ ,  $E(-7)$  及  $M(x)$  的坐标.

9. 要使点  $A(+7)$  得到新的坐标  $x' = -1$ , 原点应移至何点?

10. 当检验温度计时发现在量水的沸点时,水银上升到  $+96^\circ\text{C}$ ,又在量冰的熔点时,仅降至  $+1^\circ\text{C}$ ,如何用这个温度计的度数计算以摄氏度数计量真实温度?

11. 要使坐标  $x < -7$  的所有点得到正的坐标,而所有  $x > -7$  的点得到负的坐标,如何变换坐标系?

12. 变换坐标系使点  $A(+5)$  保持原坐标,而与它对称的点改变坐标.

13. 如果直线上的任意点的原坐标  $x$  与该点的新坐标  $x'$  由下列等式:

1)  $x = 5x'$ ;

2)  $x = -3x'$ ;

3)  $x = 2x' - 1$ ;

4)  $x = -x' + 3$ ;

5)  $x = -\frac{x'}{2} + 5$ ;

6)  $x = nx'$ ;

7)  $x = x' + a$ ;

8)  $x = nx' + a$ .

确定,如何变换坐标?

14. 变换坐标系使坐标为  $+3$  和  $+7$  的点得到新的坐标  $+2$  和  $-6$ .

15. 在量杆子长时,设在主尺上相当于  $57\text{ cm}$  处的刻度与游标尺的第四分

① 1 俄里等于 500 俄丈.

② 在列氏表上  $0^\circ$  记冰的熔点,  $80^\circ$  记水的沸点.