

普通高等学校仪器科学与技术专业系列教材

# 现代信号分析与处理

卜雄洙 吴键 牛杰 编著

**Modern Signal Analysis  
and Processing**

清华大学出版社

普通高等学校仪器科学与技术专业系列教材

# 现代信号分析与处理

**Modern Signal Analysis  
and Processing**

卜雄洙 吴键 牛杰 编著



清华大学出版社  
北京

## 内 容 简 介

本书针对测控技术与仪器专业课程体系的特点进行内容选择并编写,系统地介绍了现代信号处理的基本理论与分析方法。全书共8章,分别介绍了时域离散随机信号分析的理论基础、功率谱估计、小波分析及应用、现代信号滤波技术,包括卡尔曼滤波、自适应滤波及粒子滤波器等。

本书作为教材,努力做到深入浅出、论述清楚。为帮助读者深入理解书中的基本理论和基本分析方法,同时介绍了科学计算应用软件 MATLAB,以及与本课程相关的函数和实例等,解决了本课程中各实例计算量大的问题,同时也提高了读者的科学计算能力。

本书可作为理工科大学与信号处理相关专业的硕士研究生学位课或选修课的教材或参考书,而且其内容的广度和深度也适合广大科技工作者自学和进修。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

现代信号分析与处理/卜雄洙,吴键,牛杰编著. —北京:清华大学出版社,2018  
(普通高等学校仪器科学与技术专业系列教材)  
ISBN 978-7-302-49693-9

I. ①现… II. ①卜… ②吴… ③牛… III. ①信号分析—高等学校—教材 ②信号处理—高等学校—教材 IV. ①TN911

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 035211 号

责任编辑:许 龙  
封面设计:常雪影  
责任校对:赵丽敏  
责任印制:丛怀宇

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质量反馈:010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

印 装 者:三河市少明印务有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:17

字 数:413千字

版 次:2018年7月第1版

印 次:2018年7月第1次印刷

定 价:45.00元

产品编号:076556-01

# 前言

## FOREWORD

信号与信息处理学科是信息科学的重要组成部分,该学科水平的高低反映了一个国家的整体科技水平。它的理论基础涉及众多学科,但其成果又对这些学科的发展起着重要的促进作用;它的应用范围甚广,如通信、航天航空、雷达、声呐、地震勘探,以及生物、医学仪器、振动工程和射电天文等领域。因此,它已经成为理论与实践并重,在高新技术领域占有重要地位的新兴学科。

信号处理应用领域不断扩大,一般的信号处理方法难以完全满足实际工程的需要,从而促进人们在信号处理理论和方法方面不断创新与探索,例如从线性因果最小相位系统的研究到非线性非因果非最小相位系统的研究,从平稳高斯信号的分析到非平稳非高斯信号的分析,这些已成为现代信号处理研究热点的一个方面。

现代信号处理研究的又一个特色是理论与实用研究同步进行,对系统的分析已不再限于理想模型,而是考虑各种实际因素,研究其鲁棒性;同时对性能也不再限于定性描述,而要作出统计性能评价,使理论和实际在更高的水平上密切结合;既重视基础理论的研究,又重视实际实现和应用的研究。

本书力求系统而深入地介绍信号处理的主要新理论和新技术,使广大读者尽快跟踪现代信号处理的发展趋势与热门的研究方向。同时,本书将信号处理的理论和方法与 MATLAB 科学技术软件结合起来,给出了大量用 MATLAB 软件编写的程序和算例,使读者在学习相关理论的同时,也学习 MATLAB 用于信号处理的方法,使两者互相促进。这不仅可以加深对各种信号处理理论的理解和认识,而且可以锻炼实际处理信号的能力。

全书共 8 章,由卜雄洙负责编写第 1、2、3 章和第 8 章,吴键编写第 4、5 章,牛杰编写第 6、7 章。全书由卜雄洙完成统稿工作。在编写过程中参阅了许多国内外同行撰写的文献资料,在此向这些作者深表谢意。同时,编者的研究生们为本书的完成付出了辛勤的劳动,在此表示衷心的感谢。

感谢南京理工大学研究生院研究生教材专著建设项目的资助,感谢清华大学出版社为本书的出版付出的辛勤劳动。

由于作者水平有限,书中有不当之处,敬请读者批评指正。

编者

# 目 录

## CONTENTS

<b>第 1 章 绪论</b> .....	1
1.1 现代信号分析的目的与意义 .....	1
1.2 信号分析基础 .....	3
1.2.1 随机矢量正交 .....	3
1.2.2 内积空间与正交分解 .....	3
1.2.3 正交投影定理 .....	4
参考文献 .....	5
<b>第 2 章 随机信号分析与处理基础</b> .....	6
2.1 引言 .....	6
2.2 随机信号的描述 .....	7
2.2.1 随机信号及其统计描述 .....	7
2.2.2 随机信号的数字特征 .....	9
2.3 平稳随机信号 .....	10
2.3.1 随机信号的各态历经性 .....	11
2.3.2 各态历经平稳随机信号自相关函数的性质 .....	12
2.4 随机信号的联合概率分布和互相关函数 .....	15
2.4.1 两个随机信号的联合概率分布 .....	15
2.4.2 互相关函数及其性质 .....	16
2.5 正态随机信号 .....	18
2.5.1 正态随机信号的定义 .....	18
2.5.2 平稳正态随机信号 .....	18
2.6 随机信号的分类与频域描述 .....	19
2.6.1 随机信号的分类 .....	19
2.6.2 随机信号的频域特征 .....	20
2.7 随机信号通过线性系统的分析 .....	23
2.7.1 平稳随机信号通过线性系统 .....	23
2.7.2 非平稳随机信号通过线性系统 .....	29
2.7.3 随机信号通过非线性系统 .....	32
2.8 随机信号模型 .....	34

2.8.1	谱分解定理与平稳随机信号模型分类	34
2.8.2	AR 模型	37
2.8.3	MA 模型	37
2.8.4	ARMA 模型	38
2.8.5	平稳随机过程 3 类模型之间的关系	39
	参考文献	41
<b>第 3 章</b>	<b>功率谱估计</b>	42
3.1	引言	42
3.2	经典谱估计	45
3.2.1	自相关函数的估计及 BT 法	45
3.2.2	周期图作为功率谱的估计	48
3.2.3	经典谱估计改进方法	53
3.3	现代谱估计	58
3.3.1	自回归模型法	58
3.3.2	MA 模型法和 ARMA 模型法	60
3.4	最大熵谱估计法	64
3.4.1	最大熵谱估计法的基本思想及其与线性预测 AR 模型法的等价性	64
3.4.2	Levinson-Durbin 递推算法	67
3.5	预测误差格型滤波器及伯格递推算法	70
3.5.1	预测误差格型滤波器	70
3.5.2	Burg 递推算法—— $K_p$ 的确定	74
3.5.3	关于 AR 模型阶次的选择	78
	参考文献	80
<b>第 4 章</b>	<b>维纳滤波与卡尔曼滤波</b>	81
4.1	引言	81
4.2	匹配滤波器	82
4.2.1	匹配滤波器的原理	82
4.2.2	匹配滤波器单位冲激响应	84
4.2.3	匹配滤波器输出	85
4.3	维纳滤波器	85
4.3.1	离散维纳滤波器的时域解	85
4.3.2	离散维纳滤波器的 $z$ 域解	88
4.3.3	维纳预测器	95
4.3.4	维纳预测器的计算公式	95
4.3.5	纯预测器	97
4.3.6	一步线性预测器	99
4.3.7	FIR 维纳滤波器的 MATLAB 仿真	101

4.4	卡尔曼滤波器 .....	103
4.4.1	离散状态方程及其解 .....	103
4.4.2	量测方程 .....	104
4.4.3	卡尔曼滤波器的递推算法 .....	106
4.4.4	卡尔曼滤波的 MATLAB 实现 .....	110
	参考文献 .....	113
<b>第 5 章</b>	<b>自适应滤波器 .....</b>	<b>114</b>
5.1	引言 .....	114
5.2	自适应横向滤波器 .....	114
5.2.1	自适应线性组合器和自适应 FIR 滤波器 .....	115
5.2.2	性能函数表示式及其几何意义 .....	118
5.2.3	最陡下降法 .....	121
5.2.4	最小均方算法 .....	124
5.3	最小二乘自适应滤波器 .....	128
5.3.1	最小二乘滤波 .....	129
5.3.2	递推最小二乘法 .....	134
5.3.3	自适应滤波器的 MATLAB 仿真 .....	136
5.4	自适应滤波器的应用 .....	138
5.4.1	自适应对消 .....	138
5.4.2	自适应陷波器 .....	142
5.4.3	自适应逆滤波 .....	144
5.4.4	预测及信号分离 .....	146
	参考文献 .....	148
<b>第 6 章</b>	<b>小波分析与应用 .....</b>	<b>149</b>
6.1	短时傅里叶变换 .....	149
6.2	小波分析 .....	151
6.2.1	小波分析概念 .....	151
6.2.2	小波分析与傅里叶变换的区别 .....	153
6.3	常用小波函数介绍 .....	153
6.3.1	Haar 小波 .....	153
6.3.2	Daubechies 小波 .....	154
6.3.3	Mexican Hat 小波 .....	156
6.3.4	Morlet 小波 .....	157
6.3.5	Meyer 小波 .....	158
6.4	连续小波变换 .....	159
6.4.1	定义 .....	159
6.4.2	连续小波变换的计算 .....	160

6.4.3	连续小波变换的逆变换	163
6.4.4	连续小波变换的性质	164
6.4.5	频率离散化重构原信号(二进小波)	170
6.4.6	时频离散化重构原信号(框架)	172
6.4.7	小波级数	174
6.5	离散小波变换	177
6.5.1	定义	177
6.5.2	小波框架理论	180
6.5.3	离散小波变换的计算	180
6.5.4	离散小波变换的逆变换与重建核问题	181
6.6	多分辨率分析与 Mallat 算法介绍	183
6.6.1	尺度函数与尺度空间	183
6.6.2	多分辨率分析概念	184
6.6.3	多分辨率分析及尺度函数性质	185
6.6.4	Mallat 算法介绍	186
6.7	小波包分析简介	193
6.7.1	小波包定义	194
6.7.2	小波包性质	194
6.7.3	小波包的空间分解	195
6.7.4	小波包算法	196
6.7.5	小波包在图像边缘检测中的应用	197
6.8	提升小波	198
6.8.1	提升小波的概念及运算步骤	198
6.8.2	用提升方法构造传统小波	199
6.8.3	提升小波在图像处理中的应用	203
6.9	小波分析在信号分析中的应用	207
	参考文献	209
<b>第7章</b>	<b>现代信号处理方法简介</b>	<b>210</b>
7.1	引言	210
7.2	HHT 变换简介及应用	210
7.2.1	HHT 概述	210
7.2.2	固有模态函数概念	211
7.2.3	经验模式分解	212
7.2.4	HHT 变换	213
7.2.5	HHT 的应用	218
7.3	粒子滤波器简介及应用	219
7.3.1	粒子滤波概述	219
7.3.2	贝叶斯滤波	220



7.3.3	粒子滤波理论及示例 .....	221
7.3.4	粒子滤波器应用 .....	229
7.4	盲信号分析基础 .....	230
7.4.1	盲信号分离问题 .....	230
7.4.2	独立分量分析 .....	233
7.4.3	因子分析和独立因子分析 .....	235
7.4.4	盲解卷与多道盲解卷/均衡问题 .....	235
7.4.5	BSP 的应用 .....	238
	参考文献 .....	239
<b>第 8 章</b>	<b>MATLAB 语言在信号分析中的应用 .....</b>	<b>240</b>
8.1	MATLAB 简介——解决工程与科学实际问题的强大工具 .....	240
8.2	MATLAB 编程环境和常用语句介绍 .....	240
8.2.1	变量与赋值 .....	241
8.2.2	矩阵的建立 .....	242
8.2.3	特殊矩阵 .....	242
8.2.4	算术运算 .....	243
8.2.5	程序结构语句 .....	244
8.2.6	MATLAB 常用数学函数 .....	245
8.3	MATLAB 随机信号处理函数库简介 .....	245
8.4	MATLAB 维纳滤波和卡尔曼滤波函数 .....	249
8.5	MATLAB 自适应滤波函数库 .....	251
8.6	MATLAB 小波分析函数库简介 .....	254
	参考文献 .....	262

## 1.1 现代信号分析的目的与意义

随着科学技术的飞速发展,人类步入了信息时代。信息反映一个物理系统的状态或特性,是自然界、人类社会和人类思维活动中普遍存在的物质和事物的属性。一个物理系统的状态或特性是以各种物理量的性质、数量及其相互函数关系或信号来表达的。我们可接触或观察到的信号是运载信息的物理量,是信息的表现形式。信号是运载消息的工具,是消息的载体。从广义上讲,信号包含光信号、声信号和电信号等。按照实际用途区分,信号包括电视信号、广播信号、雷达信号、通信信号等;按照所具有的时间特性区分,则有确定性信号和随机性信号等。各种文字、语言、图像、电码、古长城上的烽火、海军用的旗语、灯语等都是常用的信号。信号处理就是运用数学或物理的方法对信号进行各种加工或变换。信号处理的主要目的就是削弱信号中的多余内容;滤出混杂的噪声和干扰,将信号变换成易于识别的形式,便于提取它的特征参数;或者将信号变换成容易处理、传输、分析与识别的形式,以便后续的进一步处理。因此,信号处理的本质是信息的变换和提取。如果不进行这样的变换,信息虽然存在,但却是无法利用的,这正如散落在沙中的金子无法直接利用一样。目前信号处理已经成为现代科学技术的支柱之一,已广泛应用到人类生产和生活的各个方面。

随着信号处理应用领域不断扩大,促使人们在理论和方法上向更深的层次探索。此前,被研究的对象还限于较简单时不变的线性和因果最小相位系统,而现在,非平稳、非高斯信号,以及时变、非线性、非因果、非最小相位系统已成为现代信号处理研究的热点。例如,由于数学工具高阶统计量和小波变换的新发展,能够分别对非高斯信号和非平稳(即时变)信号进行分析与处理。尚认为难于解决的加性有色噪声中的信号处理,也已取得实质性的突破。此外,高分辨谱分析和自适应信号处理也更加完善。这些新发展的理论与技术成为现代信号处理的主要标志。

信号处理与分析技术是科学研究的重要手段,同时也是工业领域的一个重要基础技术,

而且发挥着越来越大的作用。随着信息化的发展,信息技术不断地渗透到科学研究的各个领域。下面是信号处理技术的一些具体应用领域。

电子通信是最早和最广泛的应用领域。通信信号的发送与接收采用的调制、解调、滤波、均衡等技术及设备无一不是建立在信号分析与处理的理论与技术的基础上的。

机械振动信号的分析与处理是另一个最早应用信号处理技术的领域。在几乎所有的机械工程部门,如机床、飞机、汽车、内燃机、汽轮机、压缩机等机械装备中,信号处理一直是机械振动分析、模态分析、参数识别、故障诊断的基础。例如,旋转机械故障诊断以振动信号的频域特征作为主要的故障征兆,采用功率谱估计、小波分析等时频分析进行特征值的提取;为了从被噪声严重污染的信号中提取有用信息,卡尔曼滤波和自适应滤波等滤波技术也在旋转机械的故障征兆提取中得到了应用。

在自动测量与控制工程领域的动态测量、最优值估计与系统辨识等方面,信号分析与处理技术的应用也十分广泛。例如,动态测量误差信号是包含多分量的非平稳信号,成分的复杂性决定了对动态测量误差的分析和处理需要结合多种信号处理方法,如傅里叶变换、小波变换和神经网络等。

在导航定位领域,各种导航系统单独使用时是较难满足导航定位性能要求的,提高导航定位系统整体性能的有效途径是采用组合导航技术,即用两种或两种以上的非相似导航系统对同一导航信息作测量并解算以形成量测量,从这些量测量中计算出各导航系统的误差并进行校正。其中信号处理方法在组合导航中最有代表性的工程应用是能处理多维和非平稳随机过程的卡尔曼滤波。

声信号在现代战场被广泛使用,被动声探测技术不受能见度、视线限制,具有作业隐蔽、不易暴露、侦察范围较大、侦察距离较远、抗干扰能力强、成本低等特点,使其较适用于反武装直升机、反坦克智能武器及战场侦察器材等领域。基于声程差的被动声定位技术是通过测定各阵元接收目标噪声信号的到达时刻差,由声速得出声程差,进而利用声源与阵列之间的空间几何关系求出目标声源位置,实现对声目标的定位。目前被动声定位技术中常用的时延估计技术可分为以下几种:基于相关分析的时延估计技术、基于相位谱的时延估计技术、基于高阶统计量的时延估计技术、基于自适应滤波的时延估计技术、基于小波变换的时延估计技术等。

图像处理是信号处理又一迅速发展的新领域。图像处理中的图像增强、图像编码、图像恢复、图像识别等技术已经广泛地应用在军事和国民经济各部门中,如卫星遥感、资源勘探、气象云图、军事侦察、工业CT以及细胞、指纹、相貌、文字识别等领域。在图像处理的实际应用中,获得较大成果的有遥感图像处理技术、断层成像技术、计算机视觉技术和景物分析技术等。

信号处理技术在生物医学工程中也有很多应用。例如,脑电或心电的自动分析系统,通过对心电信号、脑电信号的处理,可以及早发现冠心病或脑部疾患。断层成像技术是诊断学领域中的重大发明。X射线断层的基本原理是:X射线穿过被观测物体后构成物体的二维投影,接收器接收后,再经过恢复或重建,即可在一系列的不同方位计算出二维投影,经过运算处理即取得实体的断层信息,从而在大屏幕上得到断层造像。信号处理在生物医学方面的应用正处于迅速发展阶段。

下面简要介绍与现代信号处理相关的概念及基础理论知识。

## 1.2 信号分析基础

### 1.2.1 随机矢量正交

设  $x$  和  $y$  分别是  $N$  维和  $M$  维随机矢量

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$$

$$y = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T$$

其中,  $x_i, y_i$  都是随机变量, 它们的集合可生成  $N+M$  维的线性矢量空间

$$\{x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_M\}$$

设  $u$  和  $v$  是  $N+M$  维线性空间中的任意两个矢量, 通过对随机矢量  $u$  和  $v$  之间的内积定义, 可将  $N+M$  维线性矢量空间转换成一个内积空间 (Hilbert 空间)。随机矢量  $u$  和  $v$  之间的内积定义为

$$\langle u, v \rangle = E[uv] \quad (1.2.1)$$

内积空间中两矢量  $u$  和  $v$  间的距离可用范数  $\|u-v\|$  定义, 它可用上述内积来表示, 即

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v \rangle = E[(u-v)^2] \quad (1.2.2)$$

非零矢量  $u$  和  $v$  间的夹角  $\theta$  的余弦定义为

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \quad (1.2.3)$$

若  $\langle u, v \rangle = 0$ , 表示  $u$  和  $v$  不相关, 且  $\cos\theta = 0$ , 这时称  $u$  和  $v$  为正交, 记为  $u \perp v$ 。

### 1.2.2 内积空间与正交分解

设有  $M$  个两两正交的随机矢量  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_M$ , 它们满足下式:

$$\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = 0, \quad i \neq j \quad (1.2.4)$$

令  $Y = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_M\}$  是由这  $M$  个随机矢量张成的线性子空间, 那么可将其作为该内积空间的正交基底。

根据正交分解定理, 对于任何随机矢量  $x$ , 相对于线性子空间  $Y$ , 可唯一分解为两个互相正交的部分, 一部分位于子空间  $Y$  内 (与  $Y$  平行), 另一部分与子空间  $Y$  垂直, 即

$$x = \hat{x} + e, \quad \hat{x} \in Y, \quad e \perp Y \quad (1.2.5)$$

其中, 分量  $\hat{x}$  就是  $x$  在  $Y$  上的正交投影, 如图 1.1 所示 (这里为简单起见, 图中所画子空间  $Y$  是二维空间 (平面), 即  $Y = \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ 。随机变量  $x$  和它的两个分量  $\hat{x}$  和  $e$  都用矢量表示)。

在式 (1.2.5) 中, 正交条件  $e \perp Y$  意味着  $e$  正交于  $Y$  中的每一个矢量, 当然也与  $Y$  的每个基底矢量  $\epsilon_i$  正交, 即

$$\langle e, \epsilon_i \rangle = E[e\epsilon_i] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (1.2.6)$$

式 (1.2.6) 称为正交方程。

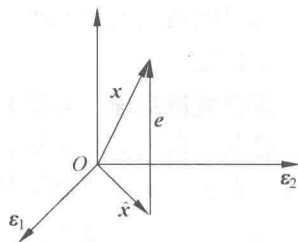


图 1.1 正交分解定理的几何意义

由于  $\hat{x}$  位于子空间  $Y$  内, 因此可用  $Y$  正交基底的线性组合来表示, 即

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^M a_i \boldsymbol{\epsilon}_i \quad (1.2.7)$$

其中, 系数  $a_i$  可根据正交方程(1.2.6)确定。因为

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\epsilon}_i \rangle = a_i \langle \boldsymbol{\epsilon}_i, \boldsymbol{\epsilon}_i \rangle$$

由此求得

$$a_i = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\epsilon}_i \rangle \langle \boldsymbol{\epsilon}_i, \boldsymbol{\epsilon}_i \rangle^{-1} = E[\boldsymbol{x}\boldsymbol{\epsilon}_i]E[\boldsymbol{\epsilon}_i\boldsymbol{\epsilon}_i]^{-1} \quad (1.2.8)$$

将式(1.2.8)和式(1.2.7)代入式(1.2.5), 得到

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^M E[\boldsymbol{x}\boldsymbol{\epsilon}_i]E[\boldsymbol{\epsilon}_i\boldsymbol{\epsilon}_i]^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_i + \boldsymbol{e} \quad (1.2.9)$$

写成矩阵形式, 即

$$\boldsymbol{x} = E[\boldsymbol{x}\boldsymbol{\epsilon}^T]E[\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^T]^{-1} \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{e} \quad (1.2.10)$$

式中

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon} = [\boldsymbol{\epsilon}_1 \boldsymbol{\epsilon}_2 \cdots \boldsymbol{\epsilon}_M]^T \\ E[\boldsymbol{x}\boldsymbol{\epsilon}] = [E[\boldsymbol{x}\boldsymbol{\epsilon}_1] E[\boldsymbol{x}\boldsymbol{\epsilon}_2] \cdots E[\boldsymbol{x}\boldsymbol{\epsilon}_M]]^T \\ E[\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^T] = \text{diag}\{E[\boldsymbol{\epsilon}_1^2], E[\boldsymbol{\epsilon}_2^2], \cdots, E[\boldsymbol{\epsilon}_M^2]\} \end{cases} \quad (1.2.11)$$

符号  $\text{diag}$  表示对角矩阵。

利用式(1.2.11)规定的符号, 正交方程的矩阵形式可表示为

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}} = E[\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^T] = 0 \quad (1.2.12)$$

式(1.2.10)就是随机矢量  $\boldsymbol{x}$  关于随机变量线性子空间  $Y$  的唯一正交分解。

如果将  $N$  个随机变量  $x_1, x_2, \cdots, x_N$  关于子空间  $Y$  进行正交分解, 那么有

$$x_i = \hat{x}_i + e_i, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

这  $N$  个方程可用矩阵形式合写为

$$\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{e} = E[\boldsymbol{x}\boldsymbol{\epsilon}^T]E[\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^T]^{-1} \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{e} \quad (1.2.13)$$

正交方程可表示为

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}} = E[\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^T] = 0 \quad (1.2.14)$$

在式(1.2.13)中,  $\boldsymbol{x} = [x_1 x_2 \cdots x_N]^T$  是  $N$  维列矢量, 这与利用  $M$  维随机矢量与  $N$  维随机矢量  $\boldsymbol{x}$  之间的相关性的相关抵消分解是一致的。在内积空间中, 一组线性无关的矢量不一定两两正交, 但一组两两正交的非零矢量则一定是线性无关的。

### 1.2.3 正交投影定理

为了使随机矢量有统一的表示, 下面介绍如何由随机变量来构建正交线性空间, 首先介绍正交投影定理。

**正交投影定理** 矢量  $\boldsymbol{x}$  在线性子空间  $Y$  上的正交投影  $\hat{\boldsymbol{x}}$  是  $Y$  中与  $\boldsymbol{x}$  距离最近的矢量。

**证明** 根据正交分解定理,  $\boldsymbol{x}$  关于子空间  $Y$  的唯一正交分解可表示为  $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{e}$ ,  $\hat{\boldsymbol{x}} \in Y$ ,  $\boldsymbol{e} \perp Y$ 。设  $\boldsymbol{y}$  是  $Y$  中任意矢量, 由于  $(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y}) \in Y$ , 因而  $\boldsymbol{e} \perp (\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y})$ , 故有

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \|(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{e}\|^2 = \|\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{e}\|^2$$

由式(1.2.2), 上式可写成

$$E[(x - y)^2] = E[(\hat{x} - y)^2] + E[e^2] \quad (1.2.15)$$

当  $y = \hat{x}$  时,  $x$  与  $\hat{x}$  间距离最近。定理得证。

正交投影定理说明,用  $x$  在子空间  $Y$  上的投影  $y = \hat{x}$  作为  $x$  的估计时,最小均方误差的大小与最佳线性估计相同。所以,用  $Y$  中随机变量的线性组合逼近  $x$  时,  $\hat{x}$  为  $x$  的最佳线性估计。

## 参考文献

- [1] 何正嘉, 菅艳阳, 张西宁. 现代信号处理及工程应用[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2007.
- [2] 胡宗福, 赵晓群. 现代信号处理基础及应用[M]. 北京: 电子工业出版社, 2012.

# 随机信号分析与处理基础

## 2.1 引言

信号有确定性信号和随机信号之分,所谓确定性信号,就是信号的幅度随时间的变化有一定的规律性,可以用一个明确的数学关系进行描述,是可以再现的。随机信号随时间没有明确的变化规律,在任何时间的信号大小不能预测,因此不可能用一明确的数学关系进行描述,但是这类信号存在着一定的统计分布规律,它可以用概率密度函数、概率分布函数、数字特征等进行描述。

实际的随机信号常有 4 种形式。

(1) 连续随机信号: 时间变量和幅度均取连续值的随机信号。

(2) 时域离散随机信号: 时间变量取离散值,而幅度取连续值的随机信号。

(3) 幅度离散随机信号: 幅度取离散值,而时间变量取连续值的随机信号。例如随机脉冲信号,其取值只有两个电平,不是高电平就是低电平,但高、低电平的选取却是随机的。

(4) 离散随机数字信号: 幅度和时间变量均取离散值的信号。

现代信号处理的对象是随机信号,而它的“无规律性”给分析和处理带来难度。对随机信号的认识、分析和处理必须建立在概率统计的基础上,从而区别于确定性信号的分析与处理方法。由于利用计算机只能处理随机数字信号,本书将重点针对时域离散随机信号展开分析和讨论。

本章在简要回顾随机过程的基本概念和统计特性的基础上,对随机信号的传统分析方法及近代分析、处理方法作初步介绍,为随机信号的检测、参量估计和随机信号的处理提供基础知识。

## 2.2 随机信号的描述

一个确定性信号的描述是方便的,随机信号的描述由于它的不能准确预测和不能肯定重复,因而不能像确定性信号那样进行,而有它独特的描述方式。

### 2.2.1 随机信号及其统计描述

对随机信号来讲,在对同一事物的变化过程独立地重复进行多次观测时,所得的结果是不相同的。例如,设有  $n$  台性能完全相同的接收机,工作的条件也都相同,现用  $n$  台记录仪分别观测接收机的输出信号,记录各接收机的输出电压,得到  $n$  条电压-时间曲线,经过观察会发现,在这  $n$  个记录中找不到两个完全相同的波形,如图 2.1 所示。这是因为接收机输出中一定有噪声,而噪声电压随时间的变化是不可预知的,只有通过测量才能够得到。如果把噪声电压变化过程的记录看作一个随机试验,则现在的每次试验需要在某个时间范围内持续进行,所以,相应的试验结果也是时间  $t$  的函数。

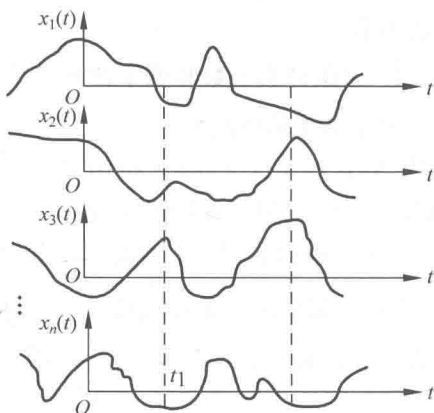


图 2.1 一个随机信号的样本集合

首先,由于它的不肯定重复性,应该用全部可能观测到的波形记录来表示随机信号,称为样本空间或集合,用  $X(t)$  表示。而样本空间的每一个波形记录是一个确定的波形,可以用一个确定的函数来表示,称为样本函数或实现,用  $x(t)$  表示。可见,随机信号是由许多确定信号的集合  $X(t) = \{x_i(t)\}, i=1, 2, \dots$  来表征的。

其次,当  $t$  取某一确定值  $t_1$  时,随机信号在  $t=t_1$  的状态为  $X(t_1) = \{x_i(t_1)\}, i=1, 2, \dots$ , 它是一个数值的集合,如图 2.1 所示。

集合中的各个数值虽然是确定的,但应取其中的哪一个是以一定的概率决定的。因此,随机信号  $X(t_1)$  在  $t_1$  时刻是一个随机变量。从这个意义出发,也可以把随机信号理解为是随机变量的时间过程,即随机过程。

由于随机信号是随时间变化的随机变量,因此,描述它的最基本的工具是它的概率(对离散型随机变量)和概率密度(对连续型随机变量),只是要把时间因素考虑在内。

#### 1. 一维分布函数和概率密度函数

例如,对于图 2.1 所示的连续时间随机信号  $X(t)$ ,用来描述它的概率结构有一维概率分布函数:

$$F_1(x_1, t_1) = P[x(t_1) \leq x_1] \quad (2.2.1)$$

表示随机信号在  $t_1$  时刻的取值不大于  $x_1$  的概率。其一维概率密度函数:



$$f_1(x_1, t_1) = \frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{P[x_1 < X(t_1) < x_1 + \Delta]}{\Delta} \quad (2.2.2)$$

表示随机信号在  $t_1$  时刻的取值落入极小区间的平均概率, 显然它针对取值连续的情况, 并有

$$F_1(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f_1(\zeta, t_1) d\zeta \quad (2.2.3)$$

显然, 随机信号的一维分布函数和概率密度函数具有普通随机变量的分布函数和概率密度函数的所有性质, 其区别仅在于随机过程的一维分布函数和概率密度函数还是时间  $t$  的函数。

因为随机信号就是随机变量族, 随机信号的一维分布函数和一维概率密度函数只能描述随机信号在各个特定时刻的统计特性, 而不能反映随机信号在不同时刻的状态之间的联系, 不同时刻状态之间的关系需要用多维分布函数来描述, 下面先介绍二维分布函数和概率密度函数。

## 2. 二维分布函数和概率密度函数

为了描述随机信号  $X(t)$  在任意两个时刻  $t_1$  和  $t_2$  状态之间的内在联系, 引入二维随机变量  $[X(t_1), X(t_2)]$  的分布函数  $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ , 它是二维随机事件  $\{X(t_1) \leq x_1\}$  和  $\{X(t_2) \leq x_2\}$  同时出现的概率, 即  $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$ 。称  $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$  为随机信号  $X(t)$  的二维分布函数。

同样, 如果存在非负函数  $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ , 使  $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_2(u_1, u_2; t_1, t_2) du_1 du_2$  成立, 称  $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$  为随机信号  $X(t)$  的二维概率密度函数, 且

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.2.4)$$

随机信号的二维概率分布虽然比一维概率分布包含了更多的信息, 但它仍不能反映随机信号在两个以上时刻状态之间的联系, 也就不能完整地反映出随机信号的全部统计特性。

## 3. $n$ 维分布函数和概率密度函数

用同样的方法, 可以引入随机信号的  $n$  维分布函数和  $n$  维概率密度函数。

随机信号  $X(t)$  在任意  $n$  个时刻  $t_1, t_2, \dots, t_n$  状态  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$  构成  $n$  维随机变量  $[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)]^T$ , 则随机信号  $X(t)$  的  $n$  维分布函数为

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$$

如果存在非负函数  $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ , 使  $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_n(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) du_1 du_2 \dots du_n$  成立, 称  $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$  为随机信号  $X(t)$  的  $n$  维概率密度函数, 且

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (2.2.5)$$

随机信号的  $n$  维分布函数或  $n$  维概率密度函数描述了随机信号在任意  $n$  个时刻状态之间的联系, 能够近似地完全描述随机过程  $X(t)$  的统计特性。显然,  $n$  取值越大则描述越完善。不过实践证明: 可以将随机过程在某一时间点  $t_1$  作为参考基准, 分别用无限多个二维分布函数来描述  $t_1$  和  $t_2, t_1$  和  $t_3, \dots, t_1$  和  $t_n$  之间的统计特性, 再把这个参考基准往后移到  $t_2, t_3, \dots$  上, 这样, 就达到了用许多二维分布函数来代替  $n$  维分布函数的目的。因此, 在工程