·普通高等教育“十三五”规划教材·

数值逼近

SHUZHI BIJIN

主　编　王晓峰　王军涛

副主编　王　波

河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS

普通高等教育"十三五"规划教材

SHU ZHI BI JIN

数值逼近

主 编 王晓峰 王军涛

副主编 王 波

河南大学出版社

HENAN UNIVERSITY PRESS

·郑州·

图书在版编目(CIP)数据

数值逼近/王晓峰,王军涛主编.—郑州:河南大学出版社，2017.12
ISBN 978-7-5649-3174-2

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①王…②王…　Ⅲ.①数值逼近　Ⅳ.①O174.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 323063 号

责任编辑　张雪彩
责任校对　林方丽
助理校对　王　贝
装帧设计　郭　灿

出版发行　河南大学出版社
地址:郑州市郑东新区商务外环中华大厦 2401 号　　邮编:450046
电话:0371-86059701(营销部)　　网址:www.hupress.com
排　　版　河南金河印务有限公司
印　　刷　虎彩印艺股份有限公司
版　　次　2018 年 2 月第 1 版
印　　次　2018 年 2 月第 1 次印刷
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　9.5
字　　数　225 千字
定　　价　25.00 元

前　言

近年来,计算机科学与技术和计算数学学科都有了飞速的发展.现在,科学计算已成为当今科学研究的三大基本手段之一,而数值逼近是科学计算的核心,是信息与计算科学专业必修的一门学科基础课,主要讲述数值逼近的理论和各种数值逼近方法,通过对这门课程的学习,学生能够掌握数值逼近的概念、理论、方法,熟悉一种实际应用的科学计算平台,利用计算机求解一些简单的实际应用中的逼近问题,同时为进一步学习其他的专业课程打下坚实的基础.

数值逼近内容包括数值运算与误差、Lagrange 插值和 Newton 插值、平方逼近、数值积分、数值微分和非线性方程的求解以及函数方程求根等.在本课程的教学过程中,要结合信息与计算科学专业对学生编程能力的要求,重视学生的计算机编程能力,一方面使学生通过本课程的学习能够提高计算机数值编程的水平,另一方面使学生可以通过本课程的学习去理解数值逼近的理论、算法在实际计算时的表现及效果,从而在学习中获得成就感,提高学习兴趣.

数值逼近是信息与计算科学专业课程,是所有其他专业课程的基础.本书是按照数值逼近课程教学大纲编写而成,教学内容与要求如下:掌握绝对误差与相对误差的概念,掌握有效数字与可靠数字的概念,了解误差的来源,掌握如何避免误差的传播,掌握多项式插值的 Lagrange 插值和 Newton 插值与反插值法,掌握等距节点插值和差分,并会利用等距节点构造插值多项式,掌握重节点差商与 Hermite 插值,理解多项式插值的 Runge 现象,掌握三次样条插值的方法,掌握 $C[a,b]$ 上的最佳一致逼近及 Chebyshev 多项式的特征,掌握内积空间上的最佳平方逼近和 $L[a,b]$ 中的最佳平方逼近,掌握曲线拟合的最小二乘法,掌握 $L[a,b]$ 上的正交多项式的性质以及常用的正交多项式,掌握 Newton-Cotes 积分公式的推导、误差分析及数值稳定性,了解提高求积公式精度的方法,掌握复化公式以及复化梯形公式,掌握复化 Simpson 公式及复化 Cotes 公式,掌握 Romberg 算法以及 Gauss 型求积公式的具体构造方法,掌握非线性方程求根的二分法、一般迭代法和牛顿迭代法,掌握非线性方程求根的简化牛顿法及弦截法,掌握常用公式的 Matlab 编程.

信息与计算科学专业的数值逼近课,常安排在二年级下学期或者三年级上学期,学生学习本书不仅要求具有数学分析、高等代数的基础知识,还要初步掌握常微分方程的知识,有高等数学或微积分基础知识的学生也能学好.全书共分 6 章,对于信息与计算科学专业的本科生,讲授时间为一个学期,每周 4 学时,总共约 64 学时,其中理论讲授 48 学时,上机实践 16 学时,书后附有上机练习题和 Matlab 算法初步,教师可根据学生实际,选择适当内容安排教学.

本书是作者在多年讲授数值逼近课程讲义的基础上整理而成,其中第 1 章至第 3 章

由河南科技学院王晓峰博士编写，第 4 章至第 5 章由河南科技学院王军涛老师编写，第 6 章以及附录 A、附录 B 由三门峡职业技术学院王波老师编写，另外王波还对整本书涉及的程序进行了验证与校对，本书由王晓峰博士统一定稿.

本书的编写得到了河南省高等学校青年骨干教师资助计划项目（2014GGJS－102）和国家自然科学基金 NSFC－河南人才培养联合基金（U1304106）的资助，本书的出版得到了河南科技学院和三门峡职业技术学院以及河南大学出版社的大力支持，在此深表感谢.

由于编者水平有限，本书错误和不妥之处在所难免，希望读者和同行们批评指正.

编　者

2017 年 10 月

目　录

第1章 绪论

§1.1 数值逼近概述

1.1.1 数值逼近简介

数值分析是对各种数学问题通过数值运算得到数值解答的理论和方法，因为研究的是数学问题，所用的是数学方法，因此也称为**数值数学**. 数值分析是总称，对一个数学问题通过数值运算得到数值解答的方法，称为**数值方法**，如果这数值方法可以在计算机上实现，就称为**数值算法**.

虽然数值分析也是以数学问题为研究对象，但它不像纯数学那样只研究数学本身的理论，而是把理论与计算紧密结合，着重研究数学问题的数值方法及其理论. 数值分析不是各种数值方法的简单罗列和堆积，而是一门内容丰富、研究方法深刻、有自身理论体系的课程. 数值分析既有纯数学的高度抽象性与严密科学性的特点，又有应用数学的广泛性与实际试验高度技术性的特点，是一门与计算机使用密切结合的应用性很强的数学课程.

数值逼近，即各种逼近问题的数值分析，包括插值、最佳一致逼近、最佳平方逼近、数值积分与微分、线性或非线性方程组求解等内容.

实际模型的求解思路如下：

$$\begin{tikzcd}
\text{实际问题} \arrow[r] & \text{数学模型} \arrow[r] & \text{数值方法} \arrow[d] \\
\text{上机计算求出结果} \arrow[u, "\text{验证}"] & & \text{程序设计} \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

例 1 利用 Cramer 法则求解一个 n 阶方程组，要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式，总共需要做 $A_n=n!(n-1)(n+1)$ 次乘法. 当 $n=20$ 时，$A_{20}\approx 10^{21}$，假定用每秒运算 10 亿(10^9)次的计算机去做，每年只能完成 $365\times 24\times 3600\times 10^9\approx 3.15\times 10^{16}$ 次，故所用计算时间为 $10^{21}\div(3.15\times 10^{16})\approx 3.2\times 10^4$ 年，即大约 32000 年完成.

1.1.2 数值分析内容及特点

数值分析包含如下基本内容:①数值逼近,主要研究函数插值法、函数逼近与曲线拟合、数值积分、数值微分等问题;②数值代数,主要研究线性代数问题、特征值问题以及非线性方程及方程组的数值解法;③微分方程数值解,主要研究常(偏)微分方程的数值求解问题.

数值分析具有如下特点:①面向计算机,能根据计算机特点提供切实可行的有效算法,即算法只能由计算机可执行的加减乘除四则运算和各种逻辑运算组成. ②可靠的理论分析,数值分析中的算法理论主要是连续系统的离散化及离散型方程数值求解. 相关基本概念包括误差、稳定性、收敛性、计算量、存储量等,这些概念用来刻画计算方法的可靠性、准确性、效率以及使用的方便性. ③良好的计算复杂性,时间复杂性好是指节省时间,空间复杂性好是指节省存储量,这也是建立算法要研究的问题,它关系到算法能否在计算机上实现. 对很多数值问题使用不同算法,其计算复杂性将会大不一样. 例如,例 1 中若对 20 阶的线性方程组用代数中的 Cramer 法则作为算法求解,其乘除法运算次数需要 $A_{20}\approx 10^{21}$次,若用每秒运算 10 亿次的计算机计算也要 3 万年,这是无法实现的,而用数值分析中介绍的 Gauss 消去法求解,其乘除法运算次数只需 3060 次,这说明选择算法的重要性. ④数值实验,通过数值实验验证算法的有效性.

1.1.3 截断与四舍五入

定义 1.1 将超过规定位数的部分无条件去掉,这种方法叫作**截断**.

例如,π 取 4 位小数为 3. 1415.

再如,若利用公式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,$$

取 $x=1$,可得

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots,$$

若取前 5 项,则有

$$\ln 2\approx 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=0.78333333333333.$$

若利用公式

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right),$$

取 $x=\frac{1}{3}$,可得

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\cdots\right),$$

若也取前5项，则有

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}\right)=0.69314604739083.$$

而 $\ln 2$ 的真实值为 $\ln 2=0.69314718055995\cdots$.

定义 1.2 用有限数位表示近似数时，一般遵循四舍五入的原则，假设用 k 表示一个近似数保留下来的小数点后的数位，则

(1) 当小数点后第 $k+1$ 位的数字小于或等于4时，舍去小数点后第 $k+1$ 位以后(包括第 $k+1$ 位)的数字.

(2) 当小数点后第 $k+1$ 位的数字大于5时，首先让小数点后第 k 位数字加1，再舍去第 $k+1$ 位以后(包括第 $k+1$ 位)的数字.

(3) 当小数点后第 $k+1$ 位的数字等于5时，若小数点后第 k 位的数字为奇数，则按(2)的情形处理，若小数点后第 k 位的数字为偶数，则按(1)的情形处理. 也就是说，当小数点后第 $k+1$ 位数字为5时，保留下来的第 k 位小数的数字总是偶数.

例 2 设精确数 $\pi=3.14159265\cdots$，把它分别表示为具有3位、5位和7位小数的近似数.

解 表示为具有3位、5位和7位小数的近似数分别为3.142，3.14159 和3.1415926.

例 3 考虑 $\sqrt{2}\pi$ 的数值运算，取5位数字进行运算，按四舍五入规则 $\sqrt{2}$ 取5位数字为 $\sqrt{2}\approx 1.4142$，π 取5位数字为 $\pi\approx 3.1416$，则 $\sqrt{2}\pi\approx 1.4142\times 3.1416=4.44285072$ 是9位数字. 若结果也限制为5位数字，按四舍五入的规则，则要处理为4.4428，它就是 $\sqrt{2}\pi$ 数值计算的结果. 这样做计算结果会失真，但是也与真实值非常接近. 实际上，$\sqrt{2}\pi=4.442882938\cdots$ 与4.4428是非常接近的，这就是数值分析的特点，又失真，又接近，而我们要追求的目标是少失真、多接近.

§1.2 应用举例

因为有限位运算会带来失真的问题，因此原来数学上的一些性质、结论在利用计算机计算时，在有限位运算的前提下，结果就有可能不一致.

例 4 当函数 $f(x)$ 可导时，有

$$\lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(x)]/h=f'(x),$$

也即当 h 取充分小的正数时，函数 $[f(x+h)-f(x)]/h$ 很接近于 $f'(x)$. 令 $f(x)=e^x$，取 $x=1$ 时，有下列式子成立：

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}[f(1+h)-f(1)]/h=e=2.71828\cdots.$$

取函数

$$g(h)=[f(1+h)-f(1)]/h,$$

则 $g(h)$ 是 h 的单调递增函数，也即 h 越小，$g(h)$ 越接近 e. 取 $h=1,10^{-1},10^{-2},\cdots,10^{-15}$

$\to 0$,试求出其各自对应的 $g(h)$,观察其规律.

解 取 16 位数字在计算机上计算,结果显示当 $h=10^{-8}$时较好,当 h 更小时,越来越差,算法设计如下:

```
for k =0 : -1 : -15
    h =10^k;
    g = ( exp( 1 +h) - exp( 1 ) )/h;
    error = exp( 1 ) - g
end
```

例 5 下面三个式子:

$$A=\frac{1-\cos x}{x^2},\quad B=\frac{(\sin x/x)^2}{1+\cos x},\quad C=2\left[\frac{\sin(x/2)}{x}\right]^2,$$

数学上容易验证它们是恒等的,即对不同的 x,A,B,C 的值大小相同,但是在数值运算下它们却不完全相同,试分别取 $x=0.2,0.02,0.002,0.0002,0.00002$,观察 A,B,C 各自的数值.

解 虽然理论上有 $A=B=C$,但是在 Matlab 中的运算结果表明,数值结果不尽相同.比如,当 $x=0.00002$ 时,有 $A=0.50000004137019$,$B=C=0.49999999998333$.

例 6 给定 $g(x)=10^7(1-\cos x)$,试用 4 位数字计算 $g(2°)$的近似值.

解 (1)由于 $\cos 2°=0.9994$,故 $g(2°)=10^7(1-\cos 2°)=10^7(1-0.9994)=6000$;

(2)由于 $g(x)=10^7(1-\cos x)=2\times10^7\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$,$\sin 1°=0.0175$,故有

$$g(2°)=2\times10^7\sin^2 1°\approx 2\times10^7\times0.0175^2=6125.$$

§1.3 Weierstrass 定理

1.3.1 第一定理

在实变函数和数学分析中,最重要的函数类是连续函数类 $C[a,b]$与连续的周期函数类 $C_{2\pi}$.

$C[a,b]$是定义在某一闭区间$[a,b]$上的一切连续函数所成的集合,$C_{2\pi}$是定义在整个实轴$(-\infty,+\infty)$上的以 2π 为周期的连续函数所成的集合.

定理 1.1(Weierstrass 第一定理) 设 $f(x)\in C[a,b]$,那么对于任意给定的 $\varepsilon>0$,都存在多项式 $P(x)$,使得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|P(x)-f(x)|<\varepsilon. \tag{1.1}$$

1.3.2 第二定理

周期连续函数(不妨假定周期为 2π)的最简单逼近函数为如下三角多项式函数:

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{1.2}$$

若系数 a_k 和 b_k 不全为0,则称 $T(x)$ 为 n 阶三角多项式. 相应于 Weierstrass 第一定理,有如下的 Weierstrass 第二定理.

定理 1.2(Weierstrass 第二定理) 设 $f(x)\in C_{2\pi}$,则对任意给定的 $\varepsilon>0$,都有三角多项式 $T(x)$ 存在,使得

$$\max_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|f(x)-T(x)|<\varepsilon. \tag{1.3}$$

练习题 1

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ \sin x, & 0\leqslant x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 编程计算 $f(-2.5)$, $f(0.8)$ 和 $f(2.8)$ 的值.

2. 绘制函数 $f(x,y)=\dfrac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在区域 $[-18,18]\times[-18,18]$ 上的三维图形.

3. 输入一个正整数 n,计算所有被 3 整除且小于 n 的正整数个数.

4. 绘制由参变量函数表示的空间曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^{-0.2t}\cos\dfrac{\pi}{2}t,\\ y=\mathrm{e}^{-0.2t}\sin\dfrac{\pi}{2}t,\\ z=\sqrt{t}\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 20)$ 的图形.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&0&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&2&0\\1&1&3\\2&1&1\end{bmatrix}$,计算 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{AB}$, $|\boldsymbol{A}|$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的值.

6. 求下列方程组的解.

(1) $\begin{bmatrix}1&2&1\\4&2&-6\\-1&0&2\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$;　　(2) $\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}1&2&1\\4&2&-6\\-1&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{bmatrix}$.

7. 计算 $\dfrac{\sin(|x|+y)}{\sqrt{\cos(|x+y|)}}$,其中 $x=-4.5°$, $y=7.6°$.

8. 计算下列积分.

(1) $\int \frac{xy}{1+x^2}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^t \frac{xy}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x}} \frac{xy}{1+x^2}\mathrm{d}y$;　　(4) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} (x+y+z)\mathrm{d}z$.

9. 输入一个正整数 n,计算 $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$.

10. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2017x - \sin(2017x)}{x^3}$.

11. 已知 $y = \mathrm{e}^x\cos mx$,求 $y^{(8)}$.

12. 给出 $\sqrt{\pi + x}$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展式(最高次幂为 3 即可).

13. Fibonacci 数列 $\{x_n\}$ 的定义是 $x_1 = 1, x_2 = 1, x_k = x_{k-1} + x_{k-2}, k = 3,4,\cdots$,用循环语句编程给出该数列的前 10 项.

14. 设三角形的三边长为 $a=4, b=3, c=2$,求此三角形的面积 S.

15. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+8n+3}$ 的值.

第 2 章　误差和有效数字

§2.1　绝对误差和相对误差

2.1.1　绝对误差

定义 2.1　给定一个实数 A,它的近似值为 A^*,$A-A^*$ 反映了近似值和精确值差异的大小,称 $\eta=A-A^*$ 为 A 取近似值 A^* 时的**绝对误差**,简称**误差**.

由于精确值 A 无法知道,因此近似数 A^* 的绝对误差也无法得到,通常给出 η 绝对值的一个上限,即如果存在一个正数 e,使得 $|\eta|\leqslant e$,那么称 e 为 A^* 的**绝对误差限**(或**误差限**),此时有 $A-e\leqslant A^*\leqslant A+e$,通常实数 A 可记为 $A=A^*\pm e$.

例如,$\pi=3.1415926535897\cdots$ 按四舍五入取 2 位小数和 4 位小数时,分别为 $\pi\approx 3.14$ 和 $\pi\approx 3.1416$,则各自的绝对误差分别为 $|\pi-3.14|=0.0015926\cdots\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-2}$ 和 $|\pi-3.1416|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-4}$.

定理 2.1　若 A 的近似值 A^* 是 A 按四舍五入得到的,则 A^* 的绝对误差不超过 A^* 末位数的半个单位,即

$$|A-A^*|\leqslant\frac{1}{2}\alpha,\quad \alpha\text{ 为 }A^*\text{ 末位单位}. \tag{2.1}$$

例 1　求 $x=\sqrt{3}$ 的近似值,使其绝对误差限精确到 $\frac{1}{2}\times 10^{-1}$,$\frac{1}{2}\times 10^{-2}$ 和 $\frac{1}{2}\times 10^{-3}$.

解　由定理 2.1 知道,$x=\sqrt{3}$ 的近似值是按照四舍五入得到的,即要求分别取 1 位、2 位和 3 位小数,故而 $x_1^*=1.7$,$x_2^*=1.73$ 和 $x_3^*=1.732$.

例 2　用毫米刻度的米尺测量一长度 x,读出和该长度接近的刻度 x^*,x^* 是 x 的近似值,它的误差限为 0.5 mm,于是绝对误差为 $|x-x^*|\leqslant 0.5$ mm,若读出的数是 765 mm,则有 $|x-765|\leqslant 0.5$ mm,虽然从这个不等式中不能知道准确的 x 是多少,但是可以确定 $764.5\leqslant x\leqslant 765.5$,说明 x 在区间[764.5,765.5]内.

从以上例子可以看出,绝对误差限不是唯一的,但越小越好,同时,绝对误差限的大小