非线性差分方程的动力学

孙太祥 王琦 洪亮 秦斌 粟光旺 席鸿建 著

科学出版社

非线性差分方程的动力学

孙太祥　王　琦　洪　亮
秦　斌　栗光旺　席鸿建　著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是作者近十年来对非线性差分方程和方程组的一些研究成果，内容包括：非线性差分方程和方程组的基本概念、全局性质、周期解的吸引域的拓扑结构；极大型差分方程和方程组、模糊差分方程的周期性等. 内容安排由浅入深，叙述和证明既详细又通俗易读.

本书可作为数学专业高年级本科生及研究生教材，也可供从事动力系统、差分方程研究的教师和其他科研工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

非线性差分方程的动力学/孙太祥等著. —北京：科学出版社，2018.6

ISBN 978-7-03-057330-8

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①非线性-差分方程-动力学 Ⅳ. ①O241.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 092070 号

责任编辑：李 欣 赵彦超／责任校对：彭珍珍

责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 6 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16

2018 年 6 月第一次印刷 印张：18 3/4

字数：378 000

定价：128.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

差分方程是在离散时段上描述现实世界中变化过程的数学模型. 现实中的问题通常是连续变化的, 但我们常常只能在离散的时间点上对其进行观测和描述. 为了表述这一类数学模型, 我们引入了差分方程的方法. 例如, 在经济与管理及其他实际问题中, 许多数据都是以等间隔时间周期统计的, 银行中的定期存款是按所设定的时间等间隔计息, 外贸出口额按月统计, 国民收入按年统计, 产品的产量按月统计等, 这些量是变量, 通常称这类变量为离散型变量. 描述离散型变量之间的关系的数学模型称为离散型模型. 对取值是离散化的经济变量, 差分方程是研究它们之间变化规律的有效方法.

差分方程不仅广泛应用于建立的离散数学模型过程中, 而且在连续型模型化为离散模型的数值计算中也有着十分重要而广泛的应用, 如微分方程与偏微分方程的数值解法、人口物种问题、供求关系问题、概率问题等, 需要建立离散的数学模型 (差分方程模型), 找出递推关系后再直接利用差分方程理论求解, 即可简便、有效地得到解的性质. 从本质上来说, 凡是变量的离散值存在某种递推关系的现象, 都涉及差分方程, 而且离散模型更有利于计算机进行数字模拟和迭代计算. 随着科学技术的进步与发展, 在物理学、种群动力学、自动控制、生物学、医学和经济学等许多自然科学和边缘学科的领域中提出了大量由差分方程描述的具体数学模型 (见 [1]).

随着计算机的广泛应用, 出现了大量的差分方程. 17 世纪到 18 世纪, 伯努利、欧拉、斯特林、牛顿等在研究函数补差法和组合计数问题的同时建立了差分方程理论体系. 后来, 随着对数值分析、离散数学以及各种数学物理问题的深入研究, 差分方程理论得到了进一步的发展 (见 [2]). 近几十年来, 人们致力于各种差分方程的理论和计算方法、误差分析等研究, 目前这一领域已经出版多本专著以及一系列研究论文 [3—9]. 其中文献 [4, 5, 7, 9] 全面介绍了差分方程的基本理论, 总结已有研究成果与方法, 并在此基础之上提出了许多公开问题与猜想, 供人们研究和探讨. 差分方程专业期刊 *J. Diff. Equ. Appl.* 和 *Adv. Diff. Equ.* 的创立更加推动了差分方程理论的研究和发展, 为差分方程的交流与合作提供了一个专业平台. 尤其是 *J. Diff. Equ. Appl.* 主编 Ladas, 他把人们在差分方程研究中所遇到的不能解决的问题以 “公开问题与猜想” 的形式在该刊物上提出来, 供人们去研究. 本书的目的是对差分方程理论进行深入研究.

全书分为九章. 第 1 章介绍了差分方程的基本概念和有关定理; 第 2 章讨论了

一类非线性差分方程的振荡性和循环长度, 并得到了一类非线性差分方程的单调正解的存在性准则; 第 3 章研究了几类非线性差分方程和方程组的收敛性, 得到了其解收敛于周期解的条件; 第 4 章研究了几类非线性差分方程的全局稳定性, 得到了这些方程是全局渐近稳定的条件; 第 5 章研究了几类二阶有理差分方程的非负周期解的吸引域, 得到了这些非负周期解的吸引域的拓扑结构; 第 6 章研究了几类高阶有理差分方程的有界性, 得到了这些方程的周期解的全局稳定性; 第 7 章研究了几类高阶有理差分方程的全局性质; 第 8 章研究了几类极大型差分方程和方程组的周期性; 第 9 章研究了几类模糊差分方程的周期性.

近十多年来, 我们对非线性差分方程和方程组的性质作过一些研究, 编著本书其目的就是对过去的研究工作做一个总结. 本书的研究成果和出版得到国家自然科学基金项目 (NO: 10861002; NO: 11261005; NO: 11461003; NO: 11761011)、广西自然科学基金项目 (NO: 桂科自 0728002; NO: 2011GXNSFA018135; NO: 2012GXNSFDA276040; NO: 2016GXNSFBA380235; NO: 2016GXNSFAA380286) 和广西财经学院博士科研启动基金的资助, 在此表示感谢.

由于作者水平有限, 本书对差分方程及方程组的性质的介绍还存在许多不够全面和深入之处, 敬请读者多加指正.

作　者
广西财经学院
2017 年 10 月

目　录

第 1 章　差分方程的基本概念

在本书中, 总假定 $\mathbf{Z}$ 是整数集, $\mathbf{N}$ 是自然数集, $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$, $\mathbf{Z}(a,b) = \{a, \cdots, b\}$ $(a < b, a, b \in \mathbf{Z})$, $\mathbf{R}$是实数集, $\mathbf{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathbf{R}_0 = [0, +\infty)$. 设 I 是个区间, $k \in \mathbf{N}_0$, $f : I^{k+1} \to \mathbf{R}$ 是连续函数, 称

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}) \quad (n \in \mathbf{N}_0) \tag{1.1}$$

为具有初始值 x_{-k}, $x_{-k+1}, \cdots, x_0 \in I$ 的差分方程.

对任一组初始值 x_{-k}, $x_{-k+1}, \cdots, x_0 \in I$, 通过方程 (1.1), 我们得到一个数列 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ (或 $\{x_n\}_{n\geqslant -k}$, 或 $\{x_n\}$), 称 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ 为方程 (1.1) 的一个解.

定义 1.1　对于方程 (1.1). 如果点 $\overline{x}$ 满足 $\overline{x} = f(\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x})$, 则称点 $\overline{x}$ 是 (1.1) 的一个平衡点. 由于 $x_n = \overline{x}$ $(n \geqslant -k)$ 是该方程的一个解, 所以称 $x_n = \overline{x}$ $(n \geqslant -k)$ 是 (1.1) 的一个平凡解.

定义 1.2　设 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ 为方程 (1.1) 的一个解. 若存在 $p \in \mathbf{N}$, 使得对任意 $n \geqslant -k$, 都有 $x_{p+n} = x_n$, 则称 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ 是方程 (1.1) 的一个 p 周期解. 若存在 $p, N \in \mathbf{N}$, 使得对任意 $n \geqslant N$, 都有 $x_{p+n} = x_n$, 则称 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ 是方程 (1.1) 的一个终于 p 周期解.

定义 1.3　一个实数序列 $\{x_n\}$ 称为关于 0 振荡的, 或者简单的称为是振荡的, 是指序列的项 x_n 既非终于正, 也非终于负.

定义 1.4　一个实数序列 $\{x_n\}$ 称为严格振荡的, 是指对于任意 $n_0 \in \mathbf{N}_0$, 存在 $n_1 > n_0$ 及 $n_2 > n_0$, 使得 $x_{n_1} < 0$ 和 $x_{n_2} > 0$.

定义 1.5　一个实数序列 $\{x_n\}$ 称为关于实数 $\overline{x}$ 振荡的 (严格振荡的), 是指 $\{x_n - \overline{x}\}$ 关于 0 是振荡的 (严格振荡的).

定义 1.6　如果对于所有的 $n \in \mathbf{Z}(r,s)$, 有 $x_n - \overline{x} \geqslant 0$ 和 $x_{r-1} - \overline{x} < 0$ 及 $x_{s+1} - \overline{x} < 0$, 则称 $x_n (n \in \mathbf{Z}(r,s))$ 组成了一个长为 $s - r + 1$ 的正半循环. 如果对于所有的 $n \in \mathbf{Z}(r,s)$, 有 $x_n - \overline{x} < 0$ 和 $x_{r-1} - \overline{x} \geqslant 0$ 及 $x_{s+1} - \overline{x} \geqslant 0$, 则称 x_n $(n \in \mathbf{Z}(r,s))$ 组成了一个长为 $s - r + 1$ 的负半循环.

设 $f(u_0, u_1, \cdots, u_k)$ 可微，差分方程 (1.1) 关于平衡点 $\bar{x}$ 的线性化方程为

$$Z_{n+1} = a_0 Z_n + a_1 Z_{n-1} + \cdots + a_k Z_{n-k} \quad (n \in \mathbf{N}_0), \tag{1.2}$$

这里, 对于任意 $i \in \mathbf{Z}(0,k)$,

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{y}, \bar{y}, \cdots, \bar{y}).$$

(1.2) 的特征方程是

$$\lambda^{k+1} - a_0\lambda^k - a_1\lambda^{k-1} - \cdots - a_{k-1}\lambda - a_k = 0. \tag{1.3}$$

定义 1.7　设 $\overline{x}$ 是方程 (1.1) 的平衡点.

(1) 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_0 \in I$ 且 $\sum\limits_{i=-k}^{0} |x_i - \overline{x}| < \delta$ 时, 对一切 $n \geqslant -k$, 有

$$|x_n - \overline{x}| < \varepsilon,$$

则称 $\overline{x}$ 是稳定的.

(2) 若 $\overline{x}$ 是稳定的, 并且存在 $\gamma > 0$, 使得当 $x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_0 \in I$ 且 $\sum\limits_{i=-k}^{0} |x_i - \overline{x}| < \gamma$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x},$$

则称 $\overline{x}$ 是局部渐近稳定的.

(3) 若对任意 $x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_0 \in I$, 有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x},$$

则称 $\overline{x}$ 为全局吸引子.

(4) 若 $\overline{x}$ 是稳定的且为全局吸引子, 则称 $\overline{x}$ 为全局渐近稳定的.

(5) 若 (1.3) 没有模为 1 的根, 则称 $\bar{x}$ 为双曲的, 否则称 $\bar{x}$ 为非双曲的.

(6) 若 $\bar{x}$ 不是局部稳定的, 则称 $\bar{x}$ 为不稳定的.

(7) 若 $\bar{x}$ 是双曲的, 且 (1.3) 存在一个根的绝对值大于 1, 一个根的绝对值小于 1, 则称 $\bar{x}$ 是一个鞍点平衡点.

在本书中, 我们将用到下面几个定理 (见 [5]).

定理 1.1 (线性稳定定理)　(1) 若方程 (1.3) 所有根的绝对值都小于 1, 则方程 (1.1) 的平衡点 $\bar{x}$ 是局部渐近稳定的.

(2) 若方程 (1.3) 至少有一个绝对值大于 1 的根, 则方程 (1.1) 的平衡点 $\bar{x}$ 是不稳定的.

定理 1.2　设 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ 是方程 (1.1) 的一个解. 记

$$\begin{cases} s = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n, \\ S = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n. \end{cases}$$

并设 $s, S \in I$. 设 L 是 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ 的一个极限点, 则下述结论成立:

(1) 存在方程 (1.1) 的一个解 $\{L_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, 称为 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ 的全极限序列, 满足 $L_0 = L$ 且 $L_m(m \in \mathbf{Z})$ 是 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ 的极限点. 特别地, 对任意 $m \in \mathbf{Z}$, 有 $s \leqslant L_m \leqslant S$.

(2) 对任意 $i_0 \in \mathbf{Z}$, 存在 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ 的一个子列 $\{x_{r_i}\}_{i=0}^{\infty}$, 使得对任意 $m \geqslant i_0$, $L_m = \lim_{i\to\infty} x_{r_i+m}$.

定理 1.3　若

$$\sum_{i=0}^{k} |a_i| < 1,$$

则方程 (1.3) 的每个根的绝对值都小于 1.

定理 1.4　实系数二次方程

$$\lambda^2 + a_0\lambda + a_1 = 0$$

的根落在复平面单位圆内的充分必要条件是

$$|a_0| < a_1 + 1 < 2.$$

定理 1.5　对于二阶有理差分方程

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + Cx_{n-1}} \quad (n \in \mathbf{N}_0), \tag{1.4}$$

其中 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ A,\ B,\ C \in \mathbf{R}_+$.

(1) 若方程 (1.4) 没有基本 2 周期解 (即最小周期为 2 的周期解), 且

$$\alpha \neq \frac{(\gamma-\beta-A)[B(\gamma-\beta-A)-C(\gamma+3\beta-A)]}{4C^2},$$

则方程 (1.4) 的正平衡点是局部渐近稳定的.

(2) 若方程 (1.4) 有一个正的基本 2 周期解, 则 (1.4) 的正平衡点是不稳定的. 事实上是一个鞍点.

定理 1.6　设 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ A,\ B,\ C \in \mathbf{R}_+$, 则方程 (1.4) 有一个基本 2 周期解的充分必要条件是 $\gamma > \beta + A$, $B > C$ 且

$$\alpha < \frac{(\gamma-\beta-A)[B(\gamma-\beta-A)-C(\gamma+3\beta-A)]}{4C^2}.$$

第 2 章　非线性差分方程的振荡性

2.1　方程 $x_{n+1}=\dfrac{f(x_n,x_{n-1},\cdots,x_{n-k+1})}{x_{n-k}}$ 的振荡性

在这一节, 我们研究差分方程

$$x_{n+1}=\frac{f(x_n,x_{n-1},\cdots,x_{n-k+1})}{x_{n-k}}\quad(n\in\mathbf{N}_0)\tag{2.1}$$

的振荡性和循环长度. 其中 $k\in\mathbf{N}$ 且 f 满足下面的条件:

(H_1) $f\in C(\mathbf{R}_+^k,\mathbf{R}_+)$.

(H_2) 存在 $s\in\mathbf{Z}(0,k-1)$, 使得 $f(u_0,\cdots,u_{k-1})$ 对 u_s 和 u_{k-1} 是严格递增的, 对 $u_i(i\in\mathbf{Z}(0,k-1)-\{s,k-1\})$ 是递增的.

(H_3) 方程 (2.1) 有唯一正平衡点, 记为 $\overline{x}$.

(H_4) 函数 $f(x,\cdots,x)/x$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上是递减的.

2.1.1　方程 (2.1) 的 (严格) 振荡性

定理 2.1　如果方程 (2.1) 满足条件 $(H_1)-(H_4)$, 那么它的每一个非平凡解都关于 $\overline{x}$ 严格振荡.

证明　假设方程 (2.1) 存在一个非平凡解 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$, 它关于 $\overline{x}$ 不严格振荡, 则存在 n_0, 使得对所有的 $n\geqslant n_0$, 有 $x_n\geqslant\overline{x}$, 或对所有的 $n\geqslant n_0$, 有 $x_n\leqslant\overline{x}$.

不妨设第一种情形成立, 即对于所有的 $n\geqslant n_0$, 有 $x_n\geqslant\overline{x}$. 记 $B=\{x_{n_0},\cdots,x_{n_0+k}\}$, 设

$$j=\max\{r:r\in\mathbf{Z}(n_0,n_0+k),x_r=\max B\}.$$

由于 $\{x_n\}$ 是一个非平凡解, 则有 $x_j>\overline{x}$. 记 $C=\{x_{n_0+k+1},\cdots,x_{n_0+2k}\}$, 设

$$j'=\min\{r:r\in\mathbf{Z}(n_0+k+1,n_0+2k),\ x_r=\max C\}.$$

我们断言 $x_j=x_{j'}$. 事实上, 若 $x_j<x_{j'}$, 则由 (H_2) 可知

$$\begin{aligned}x_{j'-k-1}&=\frac{f(x_{j'-1},\cdots,x_{j'-s-1},\cdots,x_{j'-k})}{x_{j'}}\\&<\frac{f(x_{j'},\cdots,x_{j'})}{x_{j'}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{f(\overline{x},\cdots,\overline{x})}{\overline{x}}\\
&=\overline{x},
\end{aligned}
$$

这就导致了矛盾. 若 $x_j > x_{j'}$, 则由 (H_2) 可知

$$
\begin{aligned}
x_{j+k+1} &= \frac{f(x_{j+k},\cdots,x_{j+k-s},\cdots,x_{j+1})}{x_j}\\
&< \frac{f(x_j,\cdots,x_j)}{x_j}\\
&\leqslant \frac{f(\overline{x},\cdots,\overline{x})}{\overline{x}}\\
&=\overline{x},
\end{aligned}
$$

这也导致矛盾. 断言证毕.

同理可证 $\max\{x_{n_0+2k+1},\cdots,x_{n_0+3k}\} = x_j$. 因为

$$
\begin{aligned}
x_{j'+k+1} &= \frac{f(x_{j'+k},\cdots,x_{j'+k-s},\cdots,x_{j'+1})}{x_{j'}}\\
&\leqslant \frac{f(x_{j'},\cdots,x_{j'})}{x_{j'}}\\
&\leqslant \frac{f(\overline{x},\cdots,\overline{x})}{\overline{x}}\\
&=\overline{x}
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
x_{j'-k-1} &= \frac{f(x_{j'-1},\cdots,x_{j'-1-s},\cdots,x_{j'-k})}{x_{j'}}\\
&\leqslant \frac{f(x_{j'},\cdots,x_{j'})}{x_{j'}}\\
&\leqslant \frac{f(\overline{x},\cdots,\overline{x})}{\overline{x}}\\
&=\overline{x},
\end{aligned}
$$

所以由 (H_2) 可得

$$x_{j'+k-s} = x_{j'-s-1} = x_{j'} > \overline{x}.$$

从而有

$$
\begin{aligned}
x_{j'+k-s} &= \frac{f(x_{j'+k-s-1},\cdots,x_{j'+k-1-2s},\cdots,x_{j'-s})}{x_{j'-1-s}}\\
&\leqslant \frac{f(x_{j'},\cdots,x_{j'})}{x_{j'}}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \frac{f(\overline{x},\cdots,\overline{x})}{\overline{x}}\\&=\overline{x},\end{aligned}$$

这就导致矛盾. 证毕.

2.1.2 方程 (2.1) 的循环长度

现在, 我们研究方程 (2.1) 的循环长度. 首先证明以下两个引理.

引理 2.1 若方程 (2.1) 满足 $(H_1)-(H_4)$, 则它的解 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ 的任意负半循环的长度至多为 $2k+1$.

证明 用反证法. 假设存在 $2k+2$ 个相邻点 $x_n(n\in \mathbf{Z}(n_0-k-1,n_0+k))$, 使得 $x_n<\overline{x}$. 设

$$B=\{x_{n_0-k-1},\cdots,x_{n_0+k}\}$$

和

$$j=\min\{r:r\in \mathbf{Z}(n_0-k-1,n_0+k),x_r=\min B\},$$

则有 $x_j<\overline{x}$. 分下面两种情形考虑.

情形 1 $j\geqslant n_0$. 这时有

$$\begin{aligned}x_{j-k-1}&=\frac{f(x_{j-1},\cdots,x_{j-1-s},\cdots,x_{j-k})}{x_j}\\&\geqslant \frac{f(x_j,\cdots,x_j)}{x_j}\\&\geqslant \frac{f(\overline{x},\cdots,\overline{x})}{\overline{x}}\\&=\overline{x},\end{aligned}$$

矛盾.

情形 2 $j\leqslant n_0-1$. 这时有

$$\begin{aligned}x_{j+k+1}&=\frac{f(x_{j+k},\cdots,x_{j+k-s},\cdots,x_{j+1})}{x_j}\\&\geqslant \frac{f(x_j,\cdots,x_j)}{x_j}\\&\geqslant \frac{f(\overline{x},\cdots,\overline{x})}{\overline{x}}\\&=\overline{x},\end{aligned}$$

矛盾. 证毕.

引理 2.2　设 $x_{n_0-k-1},\cdots,x_{n_0+k}$ 是长为 $2k+2$ 的相邻点, 它们包含在方程 (2.1) 的非平凡解 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ 的一个正半循环中. 若条件 $(H_1)-(H_4)$ 成立, 则对任意 $i\in\mathbf{Z}(1,k)$, 有 $x_{n_0-i}=x_{n_0}>\overline{x}$, 并且对任意 $i\in\mathbf{Z}(1,k)$, 有 $x_{n_0+i}=x_{n_0-k-1}=\overline{x}$.

证明　记

$$j=\min\{r:r\in\mathbf{Z}(n_0-k-1,n_0+k),x_r=\max\{x_{n_0-k-1},\cdots,x_{n_0+k}\}\}.$$

若 $j\geqslant n_0$, 则由方程 (2.1) 和 (H_2) 可得

$$\begin{aligned}x_{j-k-1}=&\frac{f(x_{j-1},\cdots,x_{j-1-s},\cdots,x_{j-k})}{x_j}\\<&\frac{f(x_j,\cdots,x_j)}{x_j}\\\leqslant&\frac{f(\overline{x},\cdots,\overline{x})}{\overline{x}}\\=&\overline{x},\end{aligned}$$

这与 $x_{j-k-1}\geqslant\overline{x}$ 矛盾, 故 $j<n_0$.

对某个 $i\in\mathbf{Z}(1,k+1)$, 设 $j=n_0-i$, 则

$$\begin{aligned}x_{n_0+k-i+1}=&\frac{f(x_{n_0+k-i},\cdots,x_{n_0-i+1})}{x_{n_0-i}}\\\leqslant&\frac{f(x_j,\cdots,x_j)}{x_j}\\\leqslant&\frac{f(\overline{x},\cdots,\overline{x})}{\overline{x}}\\=&\overline{x}.\end{aligned}$$

由于 $x_{n_0+k-i+1}\geqslant\overline{x}$, 则有 $x_{n_0+k-i+1}=\overline{x}$ 且

$$x_j=x_{n_0-i}=x_{n_0-i+1}.$$

若 $i\geqslant 2$, 则同理可得

$$\begin{aligned}x_{n_0+k-i+2}=&\frac{f(x_{n_0+k-i+1},\cdots,x_{n_0-i+2})}{x_{n_0-i+1}}\\\leqslant&\frac{f(x_j,\cdots,x_j)}{x_j}\\\leqslant&\frac{f(\overline{x},\cdots,\overline{x})}{\overline{x}}\\=&\overline{x}.\end{aligned}$$

由于 $x_{n_0+k-i+2}\geqslant\overline{x}$, 从而有 $x_{n_0+k-i+2}=\overline{x}$ 且

$$x_j=x_{n_0-i}=x_{n_0-i+1}=x_{n_0-i+2}.$$

仿此继续下去, 可得

$$
\begin{aligned}
x_{n_0+k-i+1} &= x_{n_0+k-i+2} = \cdots \\
&= x_{n_0+k-1} = x_{n_0+k} \\
&= \overline{x}, \\
x_{n_0-i} &= x_{n_0-i+1} = \cdots \\
&= x_{n_0-1} = x_{n_0} \\
&= x_j.
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
x_{n_0-k-1} &= \frac{f(x_{n_0-1},\cdots,x_{n_0-k})}{x_{n_0}} \\
&\leqslant \frac{f(x_j,\cdots,x_j)}{x_j} \\
&\leqslant \frac{f(\overline{x},\cdots,\overline{x})}{\overline{x}} \\
&= \overline{x}.
\end{aligned}
$$

由于 $x_{n_0-k-1} \geqslant \overline{x}$, 则有 $x_{n_0-k} = x_j$ 且 $i = k$. 证毕.

定理 2.2　若 $(H_1)-(H_4)$ 成立, 且 $s \in \mathbf{Z}(0, k-2)$, 则方程 (2.1) 的非平凡解 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ 的每一个半循环的长度至多为 $2k+1$.

证明　由引理 2.1 可知, 我们只需考虑正半循环时的情形. 用反证法, 我们设 $x_{n_0-k-1},\cdots,x_{n_0+k}$ 是包含在一个正半循环中的 $2k+2$ 个相邻点. 记

$$B = \{x_{n_0-k-1},\cdots,x_{n_0+k}\}$$

和

$$j = \min\{r : r \in \mathbf{Z}(n_0-k-1, n_0+k), x_r = \max B\},$$

则有 $x_j > \overline{x}$. 由引理 2.2 可知

$$
\begin{aligned}
x_{n_0+1} &= x_{n_0+2} = \cdots \\
&= x_{n_0+k-1} = x_{n_0+k} \\
&= \overline{x}, \\
x_{n_0-k} &= x_{n_0-k+1} = \cdots \\
&= x_{n_0-1} = x_{n_0} \\
&= x_j.
\end{aligned}
$$

由于 $n_0+1 \leqslant n_0+k-s-1$, 则有 $x_{n_0+k-s-1}=\overline{x}$, 从而

$$\begin{aligned}x_{n_0+k} &= \frac{f(x_{n_0+k-1},\cdots,x_{n_0+k-s-1},\cdots,x_{n_0})}{x_{n_0-1}} \\ &< \frac{f(x_j,\cdots,x_j)}{x_j} \\ &\leqslant \frac{f(\overline{x},\cdots,\overline{x})}{\overline{x}} \\ &= \overline{x},\end{aligned}$$

矛盾. 证毕.

定理 2.3　如果 $(H_1)-(H_4)$ 成立且 $s=k-1$, 则方程 (2.1) 的非平凡解 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ 的每一个半循环的长度至多为 $2k+2$.

证明　由引理 2.1 可知, 我们只需考虑正半循环时的情形. 用反证法, 我们考察一个包含了 $2k+3$ 个相邻点 $x_{n_0-k-1},\cdots,x_{n_0+k+1}$ 的正半循环. 记

$$B=\{x_{n_0-k-1},\cdots,x_{n_0+k+1}\}$$

及

$$j=\min\{r: r\in \mathbf{Z}(n_0-k-1,n_0+k+1), x_r=\max B\},$$

则有 $x_j>\overline{x}$. 由引理 2.2 可知

$$\begin{aligned}x_{n_0+1} &= x_{n_0+2}=\cdots \\ &= x_{n_0+k-1}=x_{n_0+k} \\ &= \overline{x}, \\ x_{n_0-k} &= x_{n_0-k+1}=\cdots \\ &= x_{n_0-1}=x_{n_0} \\ &= x_j.\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}x_{n_0+k+1} &= \frac{f(x_{n_0+k},\cdots,x_{n_0+1})}{x_{n_0}} \\ &< \frac{f(x_j,\cdots,x_j)}{x_j} \\ &\leqslant \frac{f(\overline{x},\cdots,\overline{x})}{\overline{x}} \\ &= \overline{x},\end{aligned}$$

其中 $x_{n_0+k+1}\in B$, 这是矛盾的. 证毕.