普通高等学校“十三五”规划教材

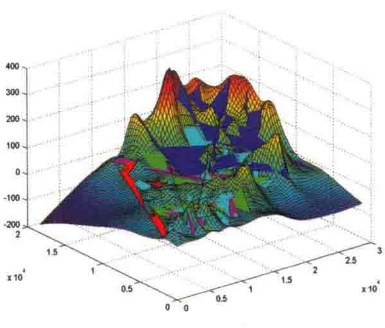
高等数学

（独立院校用）

上册

GAODENG SHUXUE (DULI YUANXIAO YONG)

任淑青　王亚玲　王瑞霞　主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校“十三五”规划教材

高等数学

（独立院校用）

上册

主编　任淑青　王亚玲　王瑞霞
参编　彭　丽　郑莉芳　张玲玲
主审　李忠定

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内　容　简　介

本系列教材为大学独立院校工科各专业公共课教材，共4册：高等数学（独立院校用）（上下册）、线性代数与几何、概率论与数理统计。本书为高等数学（独立院校用）·上册，编者根据独立院校的教育教学特点及多年的教学经验撰写。内容包括一元函数微积分、无穷级数及其应用。

本书适合作为普通高等院校独立院校工科各专业高等数学课程的教材，也适合作为普通高等学校本科、大专、函大、夜大及自学考试教材或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册/任淑青，王亚玲，王瑞霞主编. —北京：中国铁道出版社，2015.8

普通高等学校“十三五”规划教材. 独立院校用

ISBN 978-7-113-20867-7

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①任…②王…③王…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第187279号

书　　名： 高等数学（独立院校用）·上册
作　　者： 任淑青　王亚玲　王瑞霞　主编

策　　划： 李小军　　　　**读者热线：** 400-668-0820
责任编辑： 李小军
编辑助理： 曾露平
封面设计： 付　巍
封面制作： 白　雪
责任校对： 汤淑梅
责任印制： 李　佳

出版发行： 中国铁道出版社（100054，北京市西城区右安门西街8号）
网　　址： http://www.51eds.com
印　　刷： 三河市兴达印务有限公司
版　　次： 2015年8月第1版　　2015年8月第1次印刷
开　　本： 720mm×960mm　1/16　**印张：** 15.75　**字数：** 306千
书　　号： ISBN 978-7-113-20867-7
定　　价： 28.00元

前　言

本书是根据广大读者、同行和专家的意见和建议以及编者的教学实践而编写完成的。在编写中，本书遵循以下几条原则：

1. 本书力求结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题丰富、在便于自学的风格和体系基础上，注意吸收当前教材改革中一些成功的改革经验，使得该书能更适应当前教学的需要。

2. 注重教材的严谨性。该书的例题、习题和答案都经多年教学实践检验。

3. 注重内容的实用性。比如第 6 章无穷级数增加了泰勒展开定理及其推导过程，使教材在注重基础的同时兼顾深入，以适应当前我国独立学院本科教学根据不同的教学要求实施分层次教学的需求。

4. 注重教材例题和习题的层次化。对于超过教学基本要求的习题均加“*”号标出，在教学中可以根据不同专业、不同教学时数等情况加以取舍，也可以供对此有兴趣的读者和学有余力的学生参考。

5. 注重教材的完整性。本书每章后都有小结，给出了每章的学习要求、学习重点和难点，并以框架格式列出每章主要内容，以帮助读者更加深入理解每章知识体系。

本书是在石家庄铁道大学四方学院领导的大力支持下，由任淑青、王亚玲、王瑞霞、彭丽、郑莉芳、张玲玲共同编写而成，由任淑青、王亚玲、王瑞霞主编，李忠定教授主审。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，欢迎广大专家、同行和读者批评指正，以使本书不断完善。

编　者

2015. 4

目　录

第 1 章

函数与极限

高等数学的主要内容是研究变量的变化形态. 为了利用变量的变化趋势、变化速度以及变化的积累效应等要素刻画变化过程的特征,人们提出并发展了极限的理论和方法. 客观世界处在永恒的运动、发展和变化中. 对各种变化过程和变化过程中的量与量的依赖关系的研究,产生了函数与函数极限的概念. 函数概念就是对运动过程中量与量的依赖关系的抽象描述,是刻画运动变化中变量之间相依关系的数学模型. 并且,函数概念本身也在不断发展中. 极限是刻画变化过程中变量的变化趋势的数学模型. 在中学数学里,通常突出的是极限的描述性定义. 高等数学则强调精确的、定量的极限定义.

本章将介绍函数与极限的基本概念、性质和运算,并利用极限描述函数的连续性. 连续函数是最常见的一类函数,具有一系列很好的性质和基本运算,高等数学理论将以连续函数为主要研究对象.

1.1 函 数

1.1.1 基本概念

1. 集合

具有某种属性的对象的全体称为**集合**,可用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示. 例如,全体实数的集合 $\mathbf{R}$,全体有理数的集合 $\mathbf{Q}$.

构成集合的对象称为**元素**,用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示.

元素 a 是集合 A 中的元素,记作 $a\in A$,读作 a 属于 A;a 不是集合 A 的元素,记作 $a\notin A$,读作 a 不属于 A.

2. 区间

设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,

数集 $\{x\,|\,a<x<b\}$ 称为以 a,b 为端点的**开区间**,记为 (a,b);

数集 $\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为以 a,b 为端点的**闭区间**,记为 $[a,b]$.

类似可定义 $[a,b)$ 与 $(a,b]$ 称为**半开半闭区间**.

以上这些区间都称为**有限区间**.

集合 $\{x\,|\,x>a\}$ 称为**无限区间**,记为 $(a,+\infty)$,类似还有无限区间:

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$；$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$；$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in\mathbf{R}\}$等.

3. 邻域

设 a 为任意实数，δ 是一个正实数，称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ **邻域**，记为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x||x-a|<\delta\}.$$

点 a 的 δ 去心邻域为 $\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$.

1.1.2 函数

1. 函数的概念

定义 1.1 设 $A,B\subset\mathbf{R}$ 是两个非空数集，若对于每个数 $x\in A$，按照某个确定的法则 f，有确定的数 $y\in B$ 与之相对应，则称 $f:A\to B$ 为 A 到 B 的**函数**，记为

$$y=f(x),x\in A.$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量或函数**. 当 x 取数值 $x_0\in A$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 A 的各个数值时，对应函数值的全体所构成的数集 $f(A)=\{y|y=f(x),x\in A\}$ 称为函数的**值域**，A 称为函数的**定义域**.

定义域的约定 函数的定义域是使表达式有意义的自变量的全体. 在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.

函数的两个要素 确定一个函数的两个要素是：**定义域**和**对应法则**. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同（在两个对应法则下，相同的自变量对应相同的因变量），那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的两个函数.

单值函数与多值函数 根据函数的定义，当自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总有一个，这种函数叫做**单值函数**，否则叫做**多值函数**. 以后凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数. 用一个解析式子来表示函数是最重要的表示函数的方法，但不是唯一的方法. 借助于图形的直观形象表示有助于掌握函数的变化规律.

例如，汽车的计速器把车轮转动的角速度转换为表盘上指针的相应位置，即指示汽车的速度. 画出车速关于时间的图形，得到车辆起步后的速度图（图 1-1），从图中可以清晰地看到车加速和减速的全过程：起步后迅速加速，至 10 min 后又缓缓减速，直至 40 min 时停下.

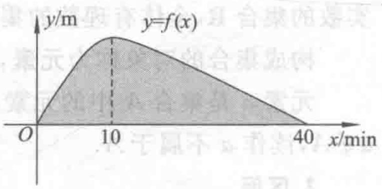


图 1-1

如何得到这 40 min 间汽车经过的路程，并把它显示在里程表上？一般是通过机械装置的运转实现的，这个装置的运转结果实际上是计算出了图中阴影的面积，学了定积分后即可以知道这部分面积恰恰就是汽车经过的里程. 由此可见，直观反映变量间依赖关系的几何图形对研究变量的关系起着十分重要的作用，将这种几何图形抽象到数学上就是函数的图像.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，对任一 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$，这在 xOy 面上就确定了一点 (x,y)，我们称全体这种点的集合

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

为函数 $y=f(x)$ 的图像（图形）（见图 1-2）.

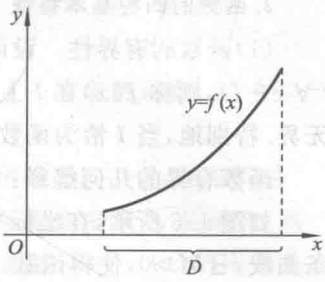


图 1-2

(1)**绝对值函数**

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & \text{当 } x>0\\ 0 & \text{当 } x=0\\ -x & \text{当 } x<0\end{cases}.$$

其定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $[0,+\infty)$（见图 1-3）.

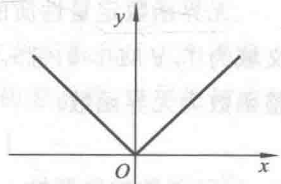


图 1-3

(2)**狄利克雷(Dirichlet)函数**

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理数}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}.$$

(3)**符号函数**

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & \text{当 } x>0\\ 0 & \text{当 } x=0\\ -1 & \text{当 } x<0\end{cases}.$$

其定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是三个点的集合 $\{-1,0,1\}$（见图 1-4）.

(4)**取整函数**

$$f(x)=[x]$$

表示不超过 x 的最大整数，如：$[3.01]=3$，$[\pi]=3$，$[3]=3$，$[-3.01]=[-\pi]=-4$. 其定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是全体整数的集合（见图 1-5）.

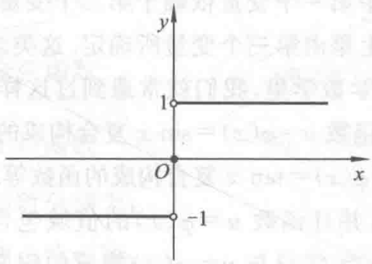


图 1-4

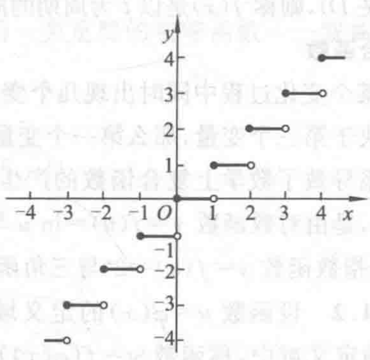


图 1-5

(3)和(4)中的函数在自变量的不同变化区间中，函数的表达式也不同，通常称之为**分段函数**. 在自然科学、工程技术、社会科学中，经常会遇到分段函数的情形.

2. 函数的四种基本特性

(1)函数的有界性　设函数 $f(x)$在 I 上有定义.如果存在 $M>0$,使得$|f(x)|\leqslant M$ $(\forall x\in I)$,则称 $f(x)$在 I 上**有界**,正数 M 称为 $f(x)$在 I 上的**界**. 否则就称 $f(x)$在 I 上**无界**. 特别地,当 I 恰为函数 $f(x)$的定义域时,则称函数 $f(x)$为**有界函数**.

函数有界的几何解释:

如图 1-6 所示,在坐标平面上,$y=f(x)$表示一条曲线,$\exists M>0$,使得函数 $y=f(x)$的图形位于由直线 $y=-M$与 $y=M$ 构成的带形区域内.

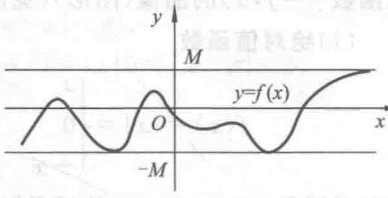


图　1-6

如 sgn x、sin x 和 cos x 都是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数.

无界函数定量性质的数学定义为:设 $f(x)$的定义域为 I,$\forall M>0$,$\exists x_0\in I$,使得$|f(x_0)|\geqslant M$,则称 $f(x)$是在 I 上的**无界函数**. 如取整函数为无界函数.

$$|f(x)|\leqslant M(\forall x\in I)\Leftrightarrow -M\leqslant f(x)\leqslant M.$$

(2)函数的单调性　设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1及 x_2,当 $x_1<x_2$时,恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上**单调增加**;如果对于区间 I 上任意两点 x_1及 x_2,当 $x_1<x_2$时,恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称函数$f(x)$在区间 I 上是**单调减少**. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

(3)函数的奇偶性　若定义域 D 关于原点对称,$f(-x)=-f(x)(\forall x\in D)$,则称 $f(x)$为**奇函数**.若定义域 D 关于原点对称,$f(-x)=f(x)(\forall x\in D)$,则称 $f(x)$为**偶函数**.

(4)函数的周期性　设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在正数 l,使得 $f(x+l)=f(x)$,$(\forall x,x+l\in D)$,则称 $f(x)$是以 l 为周期的**周期函数**.

3. 复合函数

如果某个变化过程中同时出现几个变量,其中第一个变量依赖于第二个变量,第二个变量又取决于第三个变量,那么第一个变量实际上是由第三个变量所确定.这类多个变量的连锁关系导致了数学上复合函数的产生.在中学数学里,我们就常遇到过这样的函数,如 $\ln\sin x$,是由对数函数 $y=f(u)=\ln u$ 与三角函数 $u=\varphi(x)=\sin x$ 复合构成的函数;再如 $2^{\tan x}$,是指数函数 $y=f(u)=2^u$与三角函数 $u=\varphi(x)=\tan x$ 复合构成的函数等.

定义 1.2　设函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 D,并且函数 $u=\varphi(x)$的值域包含于函数 $y=f(u)$的定义域中,称函数 $y=f(\varphi(x))$是由 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$构成的定义域为 D 的**复合函数**.其中 u 称为**中间变量**,函数 $u=\varphi(x)$称为**里层函数**,函数 $y=f(u)$称为**外层函数**.

4. 反函数

函数可以看作从定义域到值域的一种运算,讨论这种运算的逆运算,就引出了反函数的概念.

定义 1.3 若对于每个数 $y\in B$,存在唯一的确定数 $x\in A$ 与之相对应,满足

$$f(x)=y, x\in A$$

按照函数定义,把 $y\in B$ 看作自变量,$x\in A$ 看作因变量,确定了一个新的函数. 称这个函数为函数 $y=f(x)$的**反函数**,记为 $x=\varphi(y)$或 $x=f^{-1}(y)$.

事实上,函数 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$互为反函数,二者的图像是同一个. 依照习惯,把 $x=f^{-1}(y)$中的字母 x 与 y 对调,记为 $y=f^{-1}(x)$,以保持 x 是自变量,y 是函数. 函数 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$互为反函数,这时函数 $y=f(x)$与反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

结论 单值单调函数的反函数必为单值单调函数,且单调增加函数的反函数仍单调增加的,单调减少函数的反函数仍是单调减少的.

5. 初等函数

在中学里已学过的常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六类函数统称为**基本初等函数**,中学数学里已重点介绍过基本初等函数,详尽地讨论了它们的定义域、值域、单调(或区间单调)性、奇偶性和周期性.

基本初等函数经四则运算可生成大量的函数,例如:$y=1+x^2$,$y=x+\sin x$,$y=\dfrac{a^x-2x}{1+\ln x}$. 复合运算也可生成新的函数. 由基本初等函数,经过有限次四则运算和有限次复合所得到的,能用一个式子表达的函数,称为**初等函数**.

初等函数包括的内容极其广泛. 此前所见到过的,凡是能够用一个解析式子表示的函数,都是初等函数. 必须分段表示的函数一般不是初等函数,如狄利克雷函数;但绝对值函数虽然是分段表示的,但因为 $|x|=\sqrt{x^2}$,所以绝对值函数仍是初等函数. 高等数学的主要讨论对象是初等函数.

由指数函数可以构成工程技术上经常用到的一类重要的初等函数——**双曲函数**:

双曲正弦函数 $\quad \operatorname{sh} x=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$;

双曲余弦函数 $\quad \operatorname{ch} x=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$;

双曲正切函数 $\quad \operatorname{th} x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

其反函数分别为:

反双曲正弦函数 $\quad \operatorname{arsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}), x\in(-\infty,+\infty)$;

反双曲余弦函数 $\quad \operatorname{arch} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}), x\geqslant 1$;

反双曲正切函数 $\quad \operatorname{arth} x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, |x|<1$.

习 题 1.1

1. 用集合表示适合下列不等式的变量 x 的变化范围：

(1) $x^2 \leqslant 4$；　　(2) $|x|>3$；

(3) $1<|x-5|<3$；　　(4) $\lg(2x)>2$；

(5) $\sqrt{x-1}<2$；　　(6) $\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}>\dfrac{1}{2}$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x-1}-\sqrt{x^2-1}$；　　(2) $y=-\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$；

(3) $y=\arccos(x-2)$；　　(4) $y=\ln(|x+1|-2)$；

(5) $y=\sqrt{5-x}-\arctan\dfrac{1-x}{x}$；　　(6) $y=\tan(x+2)+\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.

3. 下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=(\sqrt{x})^2$，　　$g(x)=x$；

(2) $f(x)=(\sqrt{x^2})^2$，　　$g(x)=x^2$；

(3) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-1}}$，　　$g(x)=(x-2)\sqrt{x-1}$；

(4) $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$，　　$g(x)=x\sqrt[3]{x}$；

(5) $f(x)=\sin^2 x$，　　$g(x)=1-\cos^2 x$；

(6) $f(x)=\ln x^2$，　　$g(x)=2\ln x$；

(7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$，　　$g(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$；

(8) $f(x)=1$，　　$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

4. 设函数

$$\varphi(x)=\begin{cases} 2^x & \text{当 } -2\leqslant x<-\dfrac{\pi}{3} \\ |\sin x| & \text{当 } |x|\leqslant\dfrac{\pi}{3} \\ x^2-2x-1 & \text{当 } x>\dfrac{\pi}{3} \end{cases},$$

求 $\varphi(-2),\varphi\left(-\dfrac{3}{2}\right),\varphi\left(-\dfrac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi(3)$.

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-l,l]$ 上是偶函数，若 $f(x)$ 在 $[-l,0]$ 上单调减少的，证明：$f(x)$ 在 $[0,l]$ 上是单调增加的.

6. 试写出下列函数在指定区间内的单调性.

(1) $y=\dfrac{1}{2-x}+1 \quad (2,+\infty)$；　(2) $y=\sin x-x \quad \left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

7. 判断下列函数哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶函数.

(1) $y=x(1-x)^2$；　(2) $y=x+\arctan x$；

(3) $y=x^2(x+1)(x-1)$；　(4) $y=\dfrac{1}{1-x}+1$；

(5) $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$；　(6) $y=-x^4+3x^2-7$.

8. 判断下列函数是不是周期函数，若是周期函数，写出它的周期.

(1) $y=\sin 2x-\cos 2x$；　(2) $y=x\cos x$；

(3) $y=\sin^2 x$；　(4) $y=x-[x]$.

9. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\ln x}$，求出下列函数的解析式，指出其定义域.

(1) $f(x^2)$；　(2) $f(\sin x)$；

(3) $f(x-a)\ (a>0)$；　(4) $f(x-a)+f(x+a)\ (a>0)$.

1.2 数列的极限

极限的概念是高等数学最基本的一个概念，将要介绍的导数、定积分等重要的概念都是建立在极限概念之上的. 本节将介绍数列极限的概念.

1.2.1 数列的概念

定义 1.4 所谓数列，就是从自然数集 $\mathbf{N}$ 到实数集 $\mathbf{R}$ 的一个映射 $f:n\to f(n),n\in\mathbf{N}$，也就是定义在 $\mathbf{N}$ 上的一个函数（通常称为整标函数）. 对于每个 $n\in\mathbf{N}$，按自然数顺序将对应的函数值 $x_n=f(n)$ 排列起来的一排数：$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，简记为 $\{x_n\}$. 数列中的每个数称为数列的项，第 n 项 x_n 称为数列的**通项**或**一般项**. 例如，

(1) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}:\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$；

(2) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}:1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$；

(3) $\{(-1)^n\}:-1,1,-1,1,\cdots$；

(4) $\{2^n\}:2,4,8,\cdots,2^n,\cdots$.

具体分析某一数列时有多个视角，但数列一般项的变化趋势无疑是最值得重视的. 这类研究产生了数列极限的概念.

1.2.2 数列的极限

1. 定义

观察上面的数列：数列(1)无限接近于1；数列(2)无限接近于0，即当n无限增大时，数列与某一常数无限接近；数列(3)，(4)当n无限增大时数列无上述变化趋势. 将数列的这一变化趋势用普通语言描述出来就是中学所介绍的极限的直观描述性定义：

对于数列$\{x_n\}$，如果存在一个常数a，当n无限增大时(记为$n\to\infty$)，x_n与常数a无限接近，就把常数a叫做数列$\{x_n\}$的**极限**. 记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，也可简记作$x_n\to a(n\to\infty)$.

这个定义无疑是正确的. 但缺乏数学形式精确的、量化的刻画，比如什么叫n无限增大时x_n与常数a无限接近？所谓"无限接近"即它们的距离可以任意的小，用数学语言说就是：$|x_n-a|$可以任意的小. 以数列(2)为例，就是当n无限增大时，$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$的项与0的差的绝对值可以任意的小. 比如$|x_n-0|=\left|\dfrac{1}{n}-0\right|=\left|\dfrac{1}{n}\right|$，要使$|x_n-0|<\dfrac{1}{100}$，即要$\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{100}$，只要$n>100$；要使$|x_n-0|<\dfrac{1}{10^{100}}$，即要$\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{10^{100}}$，只要$n>10^{100}$.

容易看出：要使$|x_n-a|$任意小，只要项数n充分大.

引入ε表示任意小的数(应为正数)，上面的表述可以改述为"只要$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，就有$|x_n-0|<\varepsilon$". 简单地说成"只要项数$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$就有$|x_n-0|<\varepsilon$"，如果再把满足不等式$|x_n-0|<\varepsilon$的项数n更明确化，找到正整数$N\geqslant\dfrac{1}{\varepsilon}$，再让$n>N$，再用宽泛的"存在"取代"找到"，上面的表述就变为：存在正整数N，当$n>N$时，就有$|x_n-a|<\varepsilon$.

从对以上实例的分析，抽象出一般数列极限的定量性质的定义.

定义 1.5 设$\{x_n\}$为一个数列，a为一常数. 对于任意给定的正数ε(无论它多么小)，总存在正整数N，使得$n>N$时，恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列$\{x_n\}$以常数a为**极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a(\text{或 } x_n\to a(n\to\infty)).$$

有极限的数列称为**收敛数列**；否则称为**发散数列**.

2. 数列极限的几何解释

把数列$\{x_n\}$的项都摆在数轴上(见图1-7)，于是，$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$都是数轴上的点. 设有一个动点在数轴上跳动，动点的第一个位置在点x_1，第二个位置在点x_2，……，第n个位置在点x_n，……

根据$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的定义，再由$|x_n-a|<\varepsilon\Leftrightarrow x_n\in U(a,\varepsilon)$，可得到与之等价的说法："这个动点跳动到第$N$次以后，就跳进了邻域$U(a,\varepsilon)$之内，而且永远不跳出来了."它可以开始

时在邻域的外面跳，也可以跳进这邻域再跳出来，重要的是"它能够跳进去而永远不出来".

更简捷的等价说法是"这个动点在邻域 $U(a,\varepsilon)$ 之外跳动的次数 x 至多是有限 N 次"，就是"数列 $\{x_n\}$ 中至多有有限项不属于点 a 的邻域 $U(a,\varepsilon)$".

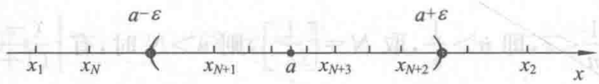


图 1-7

极限是一类运算. 前面已经学过许多运算，如四则运算. 各类函数也可以认为都是运算. 以前学过的各类运算都是由有限个数产生一个数，数列极限则是由一系列无穷多个数产生一个数的运算. 数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 无限逼近一个常数——它的极限数值，这是一个无穷的渐变过程. 经过一系列无穷多次量的渐变，达到了质的突变，得到极限数值.

反过来，用极限这一个数，可以近似代替这一系列无穷多个数中除去有限个之后的所有的数，其近似程度可以达到任意精确的范围(即 $\forall\varepsilon>0$)之内.

【例 1】 用数列极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1$.

证明 因为 $|x_n-1|=\left|\dfrac{n+(-1)^n}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$，对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|x_n-1|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，取自然数 N 为 $\dfrac{1}{\varepsilon}$ 的整数部分，即取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，都有

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

从而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n}=1.$$

用数列极限的定义来证明某个数列 $\{x_n\}$ 以某常数 a 为极限，或说用数列极限定义来验证已知数列和已知常数的极限关系时，关键是证明 N 的存在性，而证明 N 的存在性只需具体地将 N 找到. 从要满足的不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 入手，找到 n 与 ε 的关系，再由此取定一个 N，从而说明了 N 的存在性. 即采用分析的方法进行的证明，极为严谨.

【例 2】 恒取常值 -6 的数列(即 $a_n\equiv-6$)以常数 $a=-6$ 为极限.

证明 因为 $\forall\varepsilon>0$，不等式 $|a_n-a|=|(-6)-(-6)|\equiv0<\varepsilon$ 对于任意自然数 n 恒成立，所以，不论怎样选取自然数 N(例如取 $N=1$)，$n>N\Rightarrow|a_n-a|<\varepsilon$.

【例 3】 用极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\ (|q|<1)$.

证明 当 $q=0$ 时，结论显然成立；以下设 $0<|q|<1$.

因为 $|x_n-a|=|q^n-0|=|q|^n$，故 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|x_n-a|<\varepsilon$，只要 $|q|^n<\varepsilon$，两边取自然对数，得 $n\ln|q|<\ln\varepsilon$，即 $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，取 $N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，则 $n>N$，恒有 $|q^n-0|<\varepsilon$ 成

立，所以$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

【例 4】 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{(1+n)^2}=0$.

证明 因为$|x_n-a|=\left|\dfrac{(-1)^n}{(1+n)^2}-0\right|=\dfrac{1}{(1+n)^2}<\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$，所以对$\forall\varepsilon>0$，要使$|x_n-a|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则$n>N$时，有$\left|\dfrac{(-1)^n}{(1+n)^2}-0\right|<\varepsilon$.

这就是所要证明的，存在一个N就存在无穷多个N，而我们只需要找一个就够用. 找哪个呢？当然找那个最好找的，所以放大不等式$\dfrac{1}{(1+n)^2}<\dfrac{1}{n}$是简化证明过程的关键，这使得$N$的选取比较容易了，不必从不等式$|x_n-a|<\varepsilon$中求解$N$.

3. 收敛数列的性质

先介绍两个概念：

(1)有界数列$\{x_n\}$ 如果$\exists M>0$，$\forall n$，恒有$|x_n|\leqslant M$.

(2)数列$\{x_n\}$的子数列 在$\{x_n\}$中任意抽取无限多项，并保持这些项在原数列中的顺序，这样所得的数列称为原数列的**子数列**，简称**子列**，一般记为$x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k},\cdots$.

收敛数列的两个性质：收敛数列的有界性和子列的收敛性.

定理 1.1 若数列$\{x_n\}$收敛，则$\{x_n\}$是有界数列.

证明 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对于$\varepsilon=1$，$\exists N\in\mathbf{N}$，使得当$n>N$时，$|x_n-a|<\varepsilon=1$.

由
$$|x_n|=|x_n-a+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|,$$
可见，当$n>N$时，$|x_n|<|a|+1$.

令
$$M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,|a|+1\},$$
则
$$\forall N\in\mathbf{N}\Rightarrow|x_n|\leqslant M,$$
所以数列$\{x_n\}$有界.

定理 1.1 的逆否命题仍成立：无界数列必发散. 但逆命题不一定成立，即：有界数列未必收敛，例如通项公式是$x_n=(-1)^n$的数列，是发散的数列，但它是有界的. 可见收敛的数列只是有界数列中的一部分(见图 1-8)，即数列收敛是其有界的充分条件，而有界性仅是数列收敛的必要条件.

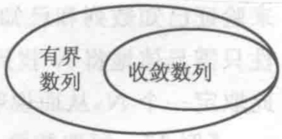


图 1-8

定理 1.2 收敛数列的任意子列仍收敛，且极限不变.

证明 设$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的任一子列，因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，$|x_n-a|<\varepsilon$成立，取$K=N$，则当$k>K$时，$n_k>n_K=n_N\geqslant N$，于是$|x_{n_k}-a|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

定理 1.2 的逆命题仍成立：若数列$\{x_n\}$的任意子列都收敛于常数a，则$\{x_n\}$收敛，且收敛于a.