概率论与数理统计

（第2版）

张 艳 程士珍 主编

清华大学出版社

概率论与数理统计

（第2版）

张　艳　程士珍　主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书针对高校应用型人才培养的要求，紧密结合工科各类专业问题背景编写. 内容包括：随机事件的概率、一维及多维随机变量及其分布、数字特征、极限定理、样本及抽样分布、参数估计与假设检验等. 本书在力求体系严密性的基础上，简化有关定理的证明，对于难度较大的证明予以省略，将数学理论与 Matlab 软件中的概率统计功能相结合，以提高概率统计知识的应用性.

本书适合作为普通高校非数学专业的教材，也可供成人本科教育、高等职业教育选用.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售.
版权所有，侵权必究. 侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/张艳，程士珍主编. —2 版. —北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-46744-1

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①张…　②程…　Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材　②数理统计－高等学校－教材
Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 048622 号

责任编辑：佟丽霞
封面设计：常雪影
责任校对：刘玉霞
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市吉祥印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：18　　**字　　数**：437 千字
版　　次：2010 年 8 月第 1 版　2017 年 8 月第 2 版　　**印　　次**：2017 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1～2500
定　　价：38.00 元

产品编号：068585-01

前言

FOREWORD

本书是为定位于培养应用型人才的工科院校而编写的教材.

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的数学学科，是一门重要的、基础的数学理论课程. 在本书编写过程中，我们参照高等工科院校的《概率论与数理统计教学基本要求》，考虑到教材的系统性，共分 9 章进行编写. 第 1 章至第 5 章为概率论的基本内容，第 6 章至第 8 章为数理统计的基本内容，第 9 章是概率统计实验部分. 通过本课程的学习，可使读者掌握概率论与数理统计的基本理论和方法，培养读者运用概率统计方法分析及解决实际问题的能力.

本书编写中力求深入浅出，突出重点，对基本概念、重要公式和定理注意其实际意义的解释和说明，力求在循序渐进的过程中，使读者逐步掌握概率论与数理统计的基本方法. 根据工科院校后继课程的要求，本书删掉了有关随机过程的内容，以便更紧密地结合各类专业问题，使读者学习基础课有的放矢，明确基础课对后续专业课的意义. 对于本书中一些重要的基本概述，给出了英文对照，便于读者查阅相关文献. 本书在每一小节后相应配上了一定数量的习题，便于读者有针对性地巩固复习；在每一章结尾处，除总习题外还配有相应的自测题，自测题型多样，覆盖面广；并在全书最后给出详细解答，便于读者检查自己对本章内容的掌握情况. 本书内容涉及的著名概率统计学家、有趣的数学典故和容易混淆的问题以补充阅读材料的形式给出，在学习知识的同时培养读者的数学素养，增强读者对本课程的兴趣. 由于计算机应用日益普及，第 9 章——概率统计实验——介绍了 MATLAB 在概率统计中的应用，在辅助理解教学内容的同时，增强了读者的计算机应用能力，为读者解决实际问题奠定了良好的基础.

本书第 1 章由张丽萍编写，第 2 章由张艳编写，第 3 章和第 5 章由张蒙编写，第 4 章由刘志强编写，第 6 章由徐志洁编写，第 7 章由王晓静编写，第 8 章由卢崇煜编写，第 9 章由白羽编写. 全书内容结构由张艳、程士珍主持设计制定，并负责统稿和定稿.

由于编者水平有限，书中可能还存在疏漏和不当之处，敬请读者和同行批评指正.

编　者

2017 年 3 月

目录

CONTENTS

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第1章

随机事件的概率

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律的一门数学学科.它已经广泛地应用于其他学科及社会生活的各个领域.本章将重点介绍两个基础概念:随机事件和随机事件的概率;而后讨论简单直观的概率模型:等可能概型或古典概型;最后深入探讨条件概率和独立性.

1.1 随机事件

一、随机现象

在自然界和人类社会中存在各种各样的现象,这些现象总的说来可以分成两类.第一类现象是在一定条件下一定发生,称这类现象为**确定现象**.例如:

(1) 同性电荷必然相互排斥,异性电荷必然相互吸引.

(2) 水在标准大气压下于100℃沸腾.

第二类现象是在一定条件下,出现的可能结果不止一个,事先无法确切知道哪一个结果一定会出现,但大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象,称这一类现象为**随机现象**(random phenomenon).例如,在相同条件下抛同一枚硬币,其结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上,并且抛出之前无法肯定结果是什么,但是多次重复抛一枚硬币出现正面朝上和反面朝上的结果大致各有一半.

二、随机试验

为了研究随机现象的统计规律性,需要对随机现象进行重复观察或试验,下面列举一些试验的例子,我们观察这些例子的共同点.

E_1:抛一枚硬币,观察正反面出现的情况;

E_2:将一枚硬币连续抛两次,观察正反面出现的情况;

E_3:将一枚硬币连续抛两次,观察反面出现的次数;

E_4:抛一枚骰子,观察出现的点数;

E_5:观察某书城一天内售出的图书册数;

E_6：在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的使用寿命.

以上的六个试验具有以下三个共同的特点：

(1) 可重复性：试验在相同条件下可以重复进行；

(2) 可知性：每次试验的可能结果不止一个,并且事先能明确试验所有可能的结果；

(3) 不确定性：进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现,但必然出现结果中的一个.

具有以上三个特点的试验称为**随机试验**(random experiment),一般用 E 来表示. 本书中以后提到的试验都是指随机试验.

三、样本空间

对于随机试验,尽管在每次试验前不能预知将要出现的试验结果,但是试验的所有可能出现的结果是明确的. 随机试验 E 的每一个可能出现的结果称为一个**样本点**(sample point),随机试验 E 的所有可能出现的结果组成的集合称为**样本空间**(sample space),记为 S.

下面给出上文提到的试验 $E_k(k=1,2,\cdots,6)$ 的样本空间 $S_k(k=1,2,\cdots,6)$. 其中,对于抛硬币试验,我们经常用 H、T 分别表示正面朝上和反面朝上.

$S_1=\{H,T\}$；

$S_2=\{HH,HT,TH,TT\}$；

$S_3=\{0,1,2\}$；

$S_4=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$S_5=\{0,1,2,3,\cdots\}$；

$S_6=\{t\mid t\geqslant 0,t\in\mathbb{R}\}$.

试验 E_1,E_2,E_3,E_4 的样本空间包含有限个样本点；E_5 的样本空间含有无穷多个样本点,而且这些样本点依照某种次序可以一个一个地数出来,称它的样本点为**无限可列个**；E_6 的样本空间也包含有无穷多个样本点,它充满区间$[0,+\infty)$,没有办法一个一个数出来,称它的样本点为**无限不可列个**.

值得注意的是：样本空间的元素是由试验的目的所决定的. 例如,在 E_2 和 E_3 中同是将一枚硬币抛两次,由于试验的目的不同它们的样本空间也不同.

四、随机事件

在进行随机试验时,我们一般只关心满足某些条件的那些样本点所组成的集合. 例如,在 E_4(掷一枚骰子)这个试验中,我们关心是否掷出偶数点. 满足这个条件的样本点组成样本空间 S_4 的一个子集：$A=\{2,4,6\}$,称 A 为试验 E_4 的一个随机事件. 显然,当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时,我们说掷出了偶数点. 下面给出随机事件的确切定义.

一般地,称试验 E 的样本空间 S 的子集为这个试验的**随机事件**(random event),简称**事件**,通常用大写字母 A,B,C 来表示. 在每次试验中,当且仅当事件中的某一样本点出现时,称这一**事件发生**. 比如当掷出 2 点时,我们说事件 A 发生.

由于随机事件是样本点的集合,由一个样本点构成的单点集,称为**基本事件**. 样本空间

S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为**必然事件**，记为 S. 空集中不包含任何样本点，它也是样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**，记为 $\varnothing$. 虽然必然事件和不可能事件已经不再具有随机性，但为了方便，仍然把它们视为特殊的随机事件.

下面举几个事件的例子.

例 1 在 E_2 中事件 A_1："第一次出现正面"，即 $A_1=\{HH,HT\}$，事件 A_2："两次出现同一面"，即 $A_2=\{HH,TT\}$.

例 2 在事件 E_4 中，事件 A_3："出现的点数不超过 4"，即 $A_3=\{1,2,3,4\}$.

五、事件的关系与运算

事件是一个集合，因而事件间的关系与运算自然按照集合之间的关系和运算来处理. 下面给出这些关系与运算在概率论中的概念及含义.

设试验 E 的样本空间为 S，设 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.

(1) 包含关系　如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$. 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，称事件 A 与事件 B 相等.

例如，在试验 E_4 中，记 A："掷出的点数为 4"，B："掷出的点数为偶数"，若事件 A 发生，显然事件 B 一定发生. 所以事件 B 包含事件 A，即 $A\subset B$.

(2) 事件的和　事件 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件，当且仅当 A,B 至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生，记作 $A\cup B$.

一般地，事件的和可以推广到多个事件的情形，所以称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件.

(3) 事件的积　事件 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件，当且仅当 A,B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生，记作 $A\cap B$ 或 AB.

一般地，事件的积可以推广到多个事件的情形，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件.

(4) 事件的差　事件 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件，当且仅当 A 发生、且 B 不发生时，事件 $A-B$ 发生.

(5) 互不相容事件　事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 为互不相容事件. 互不相容事件又称为互斥事件.

(6) 逆事件　若 $A\cup B=S$ 且 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件. 又称事件 A 与事件 B 互为对立事件. 即在每一次试验中，事件 A 与事件 B 中必有一个发生，且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

以下 6 个韦恩图(图 1-1～图 1-6)直观表示以上事件之间的关系，图中的矩形代表样本空间 S，圆 A 与圆 B 分别代表事件 A 与事件 B.

由于事件的关系与运算和集合的关系与运算完全相同，现在将集合论中的有关结论与事件关系和运算的对应情况列于表 1-1 中.

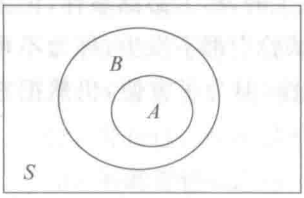

图 1-1

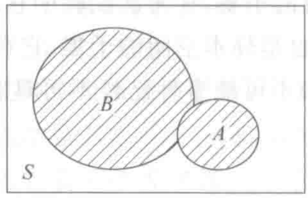

图 1-2

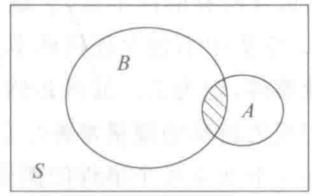

图 1-3

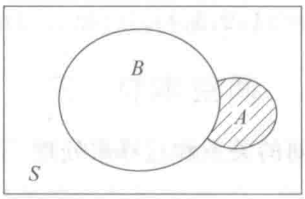

图 1-4

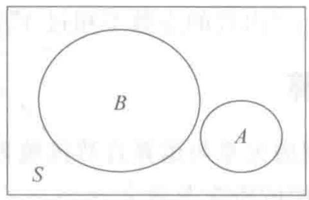

图 1-5

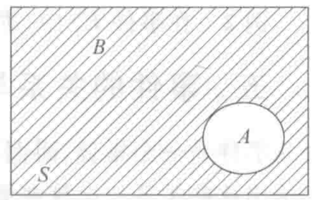

图 1-6

表 1-1

记　号	概　率　论	集　合　论
S	样本空间,必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	样本点	元素
A	随机事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的补集
$A\subset B$	事件 A 发生导致 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的并集
AB	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	事件 A 和事件 B 互不相容	A 与 B 的交集为空

六、事件的运算规律

设 A,B,C 为同一随机试验 E 中的事件,由集合的运算规律易知事件的运算规律.

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$;$A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3) 分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(4) 德·摩根律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

解释德·摩根律的第一个等式. $A\cup B$ 表示事件 A 与事件 B 至少有一个发生,它的对立事件 $\overline{A\cup B}$ 则表示事件 A 与事件 B 都不发生,即 $\overline{A}\cap\overline{B}$. 因此有 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

例 3　随机试验 E_2:将一枚硬币抛两次,观察正反面出现的情况. 事件 A_1:"第一次出现正面",即 $A_1=\{HH,HT\}$,事件 A_2:"两次出现同一面",即 $A_2=\{HH,TT\}$,求 $A_1\cup$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

$A_2, A_1\cap A_2, A_1-A_2, \overline{A}_1$.

解 $A_1\cup A_2=\{HH, HT, TT\}, A_1\cap A_2=\{HH\}, A_1-A_2=\{HT\}, \overline{A}_1=\{TH, TT\}$.

例 4 设 A,B,C 为同一随机试验 E 中的事件，试利用它们表示以下事件：

(1) A 发生而 B,C 都不发生；

(2) 三个事件都不发生；

(3) 三个事件至少一个发生；

(4) 三个事件至多两个发生；

(5) 三个事件恰有一个发生.

解 (1) $A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A-B-C$；(2) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$；(3) $A\cup B\cup C$；(4) $\overline{A\cap B\cap C}$；(5) $(A\overline{B}\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\overline{B}C)$.

例 5 设 $A=$"甲产品畅销，乙产品滞销"，求 A 的对立事件.

解 设 B_1, B_2 分别为甲、乙两产品畅销，则

$A=B_1\overline{B}_2$，根据德·摩根律

$$\overline{A}=\overline{B_1\overline{B}_2}=\overline{B}_1\cup\overline{\overline{B}}_2=\overline{B}_1\cup B_2$$

因此 A 的对立事件是"甲产品滞销或乙产品畅销".

例 6 从某大学学生中任选一名学生，$A=\{$所选者会英语$\}$，$B=\{$所选者会日语$\}$，$C=\{$所选者是男生$\}$. 试描述事件 AC 和 $A=B$.

解 AC 表示所选者是会英语的男生；$A=B$ 则表示会英语则必会日语，会日语则必会英语.

例 7 向预定目标连射三枪，观察射中目标的情况. 用 A_1、A_2、A_3 分别表示事件"第一枪击中目标""第二枪击中目标""第三枪击中目标"，试用 A_1、A_2、A_3 表示以下各事件：

(1) 只击中第一枪；

(2) 只击中一枪；

(3) 三枪都没击中；

(4) 至少击中一枪.

解 (1) 事件"只击中第一枪"，说明第二枪不中，第三枪也不中. 所以可以表示成 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

(2) 事件"只击中一枪"，并没有指定哪一枪击中. 三个事件"只击中第一枪""只击中第二枪""只击中第三枪"中，任意一个发生表示事件"只击中一枪"发生. 所以可以表示成 $(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$.

(3) 事件"三枪都没击中"，即事件"第一枪、第二枪、第三枪都未击中目标"，所以，可以表示成 $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

(4) 事件"至少击中一枪"，即事件"第一枪、第二枪、第三枪至少有一次击中"，所以，可以表示成 $A_1\cup A_2\cup A_3$ 或 $(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\cup(A_1A_2\overline{A}_3)\cup(A_1\overline{A}_2A_3)\cup(\overline{A}_1A_2A_3)\cup(A_1A_2A_3)$.

例 8 刘、李、张三人各射一次靶，记 A 表示"刘击中靶"，B 表示"李击中靶"，C 表示"张击中靶". 则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件：

(1)"刘未击中靶"；(2)"刘击中靶而李未击中靶"；(3)"三人中只有张未击中靶"；

(4)"三人中恰好有一人击中靶"；(5)"三人中至少有一人击中靶"；

(6)“三人中至少有一人未击中靶”;(7)“三人中恰有两人击中靶”;

(8)“三人中至少两人击中靶”;(9)“三人均未击中靶”;

(10)“三人中至多一人击中靶”;(11)“三人中至多两人击中靶”.

解 (1) $\overline{A}$; (2) $A\overline{B}$; (3) $AB\overline{C}$; (4) $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$; (5) $A\cup B\cup C$;

(6) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或$\overline{ABC}$; (7) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$; (8) $AB\cup AC\cup BC$; (9) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

(10) $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; (11) $\overline{ABC}$或$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

概率论的诞生

1654 年,梅雷提出一个问题:“两个赌徒约定赌若干局,且谁先赢 c 局便算赢家,若在一赌徒胜 a 局($a<c$),另一赌徒胜 b 局($b<c$)时便终止赌博,问应如何分赌本”.著名数学家帕斯卡与费马通信讨论了这一问题,并且于 1654 年共同建立了概率论的第一个基本概念:**数学期望**.这一概念的出现标志着概率论这一学科的诞生.

德·摩根简介

德·摩根(1806.6.27—1871.3.18),英国著名的数学家和逻辑学家.在逻辑研究方面,他的主要贡献在于制定德·摩根定律以及推动关系论的发展,并且为现代符号逻辑和数理逻辑的诞生奠定了基础.他在著作《算术原理》(*Elements of Arithmetic*,1830)中把数和量的概念从哲学上加以简单而透彻的阐述.1838 年他定义并引进数学归纳法——过去在数学证明上一直使用的但不甚明朗的方法.他作为认同代数具有纯符号性质的剑桥数学家中的一员,提出有不同于普通代数的代数结构的可能性.在其著作《三角学与双重代数》(*Trigonometry and Double Algebra*,1849)中,给复数以几何的解释,从而提出了四元数的概念.

习题 1-1

1. 多项选择题

(1) 以下命题正确的是( ).

A. $(AB)\cup(A\overline{B})=A$ B. 若 $A\subset B$,则 $AB=A$

C. 若 $A\subset B$,则 $\overline{B}\subset\overline{A}$ D. 若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B$

(2) 某大学的学生做了三道概率题,以 A_i 表示“第 i 题做对了”($i=1,2,3$),则该生至少做对了两道题的事件可表示为( ).

A. $\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3$

B. $A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_3A_1$

C. $\overline{A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_3A_1}$

D. $A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3$

2. A,B,C 为三个事件,说明下述运算关系的含义:

(1) A; (2) $\overline{B}\ \overline{C}$; (3) $A\overline{B}\ \overline{C}$; (4) $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$; (5) $A\cup B\cup C$; (6) $\overline{ABC}$.

3. 某机械厂生产的三个零件，以 A_i 与 $\overline{A}_i(i=1,2,3)$ 分别表示它生产的第 i 个零件为正品、次品. 试用 A_i 与 $\overline{A}_i(i=1,2,3)$ 表示以下事件：(1)全是正品；(2)至少有一个零件是次品；(3)恰有一个零件是次品；(4)至少有两个零件是次品.

4. 从 4 个白球、6 个黄球、3 个黑球中任取 2 白、2 黄、1 黑 5 个球，有几种取法？

5. 将 3 个小球任意放入 5 个口袋中，不同的放法共有多少种？

6. 20 件产品中有 12 件产品是次品，从中任取 8 件，取出的 8 件产品中，次品可能有几件？

7. 6 件产品中有 3 件次品，每次从中任取 1 件，直到取到次品为止，可能需要取几件产品？

1.2 随机事件的概率

研究随机现象时，不仅需要知道试验可能出现的各种结果，而且还要进一步分析出现某个结果的可能性有多大. 我们希望找到一个合适的数来表征事件在一次试验中发生的可能性大小. 如果在给定的条件下重复试验就会发现，可以根据某一事件在重复试验中出现的次数来度量这一事件在一次试验中出现的可能性. 为此首先引入频率的概念.

一、频率及其性质

定义 1 设 E 为任一随机试验，A 为其中任一事件，在相同条件下，把 E 独立地重复做 n 次，n_A 表示事件 A 在这 n 次试验中出现的次数(称为**频数**). 比值 $f_n(A)=n_A/n$ 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的**频率**(frequency).

频率的性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1$；

(3) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_n).$$

人们在实践中发现：在相同条件下重复进行同一试验，当试验次数 n 很大时，事件 A 发生的频率具有一定的“稳定性”，即其频率值在某确定的数值上下浮动. 一般来说，试验次数 n 越大，事件 A 发生的频率就越接近那个确定的数值. 因此事件 A 发生的可能性的大小就可以用这个数量指标来客观描述. 下面给出概率的公理化定义.

二、概率定义

定义 2 设 E 为随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的**概率**(probability)，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 非负性：对于每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：对于必然事件 S，有 $P(S)=1$；

(3) 可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots$，是两两互不相容事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

由概率的公理化定义，可以推出概率的一些重要性质.

三、概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$;

(2) 有限可加性:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容事件,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

(3) 对于任意两个事件 A,B,有 $P(B-A)=P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$. 特别地,若 $A\subset B$, $P(B-A)=P(B)-P(A)$, $P(B)\geqslant P(A)$.

(4) 对于任意一事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(5) 逆事件的概率:对于任意一事件 A,有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(6) 加法公式:对于任意两个事件 A,B,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

这条性质可以推广到多个事件. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是任意 n 个事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n+1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

证明 性质(3)因为 $B=(B-A)\cup AB$,且 $(B-A)\cap AB=\varnothing$,由性质(2)得 $P(B)=P[(B-A)\cup AB]=P(B-A)+P(AB)$,即 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

性质(5)因为 $A\cup\overline{A}=S$, $A\overline{A}=\varnothing$,由性质(3)得

$$1=P(S)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

性质(6)因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$,且 $A\cap(B-AB)=\varnothing$, $AB\subset B$,由性质(2)、性质(3)得 $P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

例 1 设事件 A,B 的概率分别为 $\frac{1}{3},\frac{1}{2}$. 在下列三种情况下分别求 $P(B\overline{A})$ 的值:

(1) A 与 B 互斥;

(2) $A\subset B$;

(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解 由性质(3), $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$.

(1) 因为 A 与 B 互斥,所以 $AB=\varnothing$, $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=P(B)=\frac{1}{2}$;

(2) 因为 $A\subset B$ 所以 $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$;

(3) $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

例 2 已知 $P(\overline{A})=0.5$, $P(\overline{A}B)=0.2$, $P(B)=0.4$,求:

(1) $P(AB)$; (2) $P(A-B)$; (3) $P(A\cup B)$; (4) $P(\overline{A}\overline{B})$.

解 (1) 因为 $AB\cup\overline{A}B=B$,且 $AB\cap\overline{A}B=\varnothing$,故有

$$P(AB)+P(\overline{A}B)=P(B),$$

$$P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.4-0.2=0.2.$$

(2) $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.5=0.5$,故有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.2=0.3.$$

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.2=0.7.$

(4) $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.7=0.3.$

例 3 设 A,B 为两事件，且 $P(A)=p,P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$，求 $P(B)$.

解 由于

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\overline{B}) &= P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\&=1-[P(A)+P(B)-P(AB)],\end{aligned}$$

又由于 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$ 且 $P(A)=p$，故

$$P(B)=1-P(A)=1-p.$$

习题 1-2

1. 多项选择题

(1) 下列命题中，正确的是(　　).

A. $A\cup B=A\overline{B}\cup B$　　B. $\overline{A}B=A\cup B$

C. $\overline{A\cup B}C=\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$　　D. $(AB)(A\overline{B})=\varnothing$

(2) 对于事件 A 与 B，正确的是(　　).

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　B. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

C. $P(A\cup B)=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})$　　D. $P(A\cup B)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})$

(3) 事件 A 与事件 B 互相对立的充要条件是(　　).

A. $P(AB)=P(A)P(B)$　　B. $P(AB)=0$ 且 $P(A\cup B)=1$

C. $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$　　D. $AB=\varnothing$

2. 设 $P(A)=0.1,P(A\cup B)=0.3,A\cap B=\varnothing$，求 $P(B)$.

3. 设 $P(A)=\frac{1}{3},P(B)=\frac{1}{4},P(A\cup B)=\frac{1}{2}$，求 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

4. 设 $P(A)=0.5,P(B)=0.4,P(A-B)=0.3$，求 $P(A\cup B)$ 和 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

1.3 古典概型

一、古典概型(等可能概型)

古典概型是一种最简单、最直观的概率模型. 正是因为其简单直观被称为古典概型. 古典概型的特点是：样本空间中每个样本点发生的可能性都相同，因此古典概型又被称为等可能概型. 下面给出古典概型的定义.

定义 设 E 为随机试验，S 为 E 的样本空间，如果试验 E 满足下面两个条件：

(1) S 中存在有限个样本点；

(2) S 中的每个样本点是等可能的发生；

则称 E 为**古典概型**(classical probability)或**等可能概型**.

下面来讨论等可能概型中事件概率的计算公式.

设古典概型 E 的样本空间 S 中有 n 个样本点，即 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，由于每个样本点是等可能的发生，故有

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\}).$$

又由于基本事件是两两互不相容的,于是

$$1 = P(S) = P(\{e_1\} \cup P\{e_2\} \cup \cdots \cup P\{e_n\})$$
$$= P(\{e_1\}) + (P\{e_2\}) + \cdots + P(\{e_n\}),$$
$$P(\{e_i\}) = \frac{1}{n}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

若事件 A 包含了 k 个基本事件,即 $A=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}\}(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$,则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 包含的样本点数}}{S\text{ 包含的样本点总数}}.$$

例 1 一盒子中有 10 个大小形状相同的球,其中 6 个黑色球,4 个白色球. 现从盒子中随机地取出两个球,求取出的两球都是黑色球的概率.

解 设 A 表示事件:"取出的两球是黑球",从而

$$P(A) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}.$$

例 2 在 1~9 的整数中可重复地随机取 6 个数组成一个 6 位数,求下列事件的概率:

(1) 6 个数完全不同;

(2) 6 个数不含奇数;

(3) 6 个数中 5 恰好出现 4 次.

解 从 9 个数中允许重复地取 6 个数进行排列,共有 9^6 种排列方法.

(1) 设 A 表示事件:"6 个数完全不同",故

$$P(A) = \frac{A_9^6}{9^6} = \frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4}{9^6} = 0.11.$$

(2) 设 B 表示事件:"6 个数不含奇数". 因为 6 个数只能在 2,4,6,8 四个数中选,每次有 4 种取法,所以有 4^6 取法. 故

$$P(B) = \frac{4^6}{9^6}.$$

(3) 设 C 表示事件:"6 个数中 5 恰好出现 4 次". 因为 6 个数中 5 恰好出现 4 次可以是 6 次中的任意 4 次,出现的方式有 C_6^4 种,剩下的两种只能在 1,2,3,4,6,7,8,9 中任取,共有 8^2 种取法. 故

$$P(C) = \frac{C_6^4 8^2}{9^6}.$$

例 3 将 N 个球随机地放入 n 个袋子中($n>N$),求:

(1) 每个袋子最多有一个球的概率;

(2) 某指定的袋子中恰有 $m(m<N)$个球的概率.

分析:先求 N 个球随机地放入 n 个袋子不同放法的总数. 因为每个球都可以落入 n 个袋子中的任何一个,有 n 种不同的放法,所以 N 个球放入 n 个袋子共有 $\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{N}=n^N$ 种不同的放法.

解 (1) 设事件 A:"每个袋子最多有一个球". 第一个球可以放进 n 个袋子中任何一个,有 n 种放法;第二个球只能放进余下的 $n-1$ 个袋子之一,有 $n-1$ 种放法;……第 N 个球只能放进余下的 $n-N+1$ 个袋子之一,有 $n-N+1$ 种放法;所以共有 $n(n-1)\cdots(n-$

试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com