全国普通高等教育"十三五"规划教材

线性代数

主编◎穆耀辉　司国星　郭燕双

合肥工業大學出版社
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

全国普通高等院校“十三五”规划教材

线性代数

主编 穆耀辉 司国星 郭燕双

合肥工业大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 穆耀辉，司国星，郭燕双主编. — 合肥:合肥工业大学出版社，2018.11
ISBN 978-7-5650-4244-7

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①穆… ②司… ③郭… Ⅲ. ①线性代数—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 254522 号

线性代数

穆耀辉　司国星　郭燕双 主编　　　　责任编辑　朱移山

出　版	合肥工业大学出版社	版　次	2018 年 11 月第 1 版
地　址	合肥市屯溪路 193 号	印　次	2018 年 11 月第 1 次印刷
邮　编	230009	开　本	787 毫米×1092 毫米　1/16
电　话	总　编　室：0551-62903038	印　张	8
	市场营销部：0551-62903198	字　数	205 千字
网　址	www.hfutpress.com.cn	印　刷	廊坊市广阳区九洲印刷厂
E-mail	hfutpress@163.com	发　行	全国新华书店

ISBN 978-7-5650-4244-7　　　　定价：28.00 元

前 言

随着时代的发展、计算机的普及，线性代数这一数学分支显得越来越重要。现在大专院校几乎理工类专业都在开设线性代数课程。如何教好、学好这门课程，关键是要有科学地阐述线性代数的基本内容且简明易懂的教材。这就是本书的编写目的。

线性代数是研究线性空间和线性映射的理论，它的初等部分是研究线性方程组和矩阵。本书精选了线性代数的部分内容，着重阐述其最基本的、应用广泛的那些内容；对于不是基本的，或者应用不那么广泛的内容则略为提及，不展开讲，或者不讲。

本书科学地阐述了线性代数的基本内容，深入浅出，简明易懂。本书精选了线性代数的内容，由具体到抽象地安排讲授体系，使学生能由浅入深地学完全书。本书在讲授知识的同时，注重培养学生数学的思维方式。本书内容按照数学的思维方式组织和编写，既使学生容易学到知识，又使学生从中受到数学思维方式的熏陶，能用数学思维解决实际问题，使学生终身受益。

本书共 6 章，主要包括行列式，矩阵，线性方程组，矩阵的秩与 n 维向量空间，特征值、特征向量与二次型，MATLAB 软件在线性代数中的应用。

本书由陕西电子信息职业技术学院的穆耀辉、郑州工业安全职业学院的司国星和张家口市宣化第一中学的郭燕双担任主编。其中，穆耀辉编写了第 2 章、第 3 章和第 4 章，司国星编写了第 1 章、第 5 章和习题答案，郭燕双编写了第 6 章。本书由穆耀辉编写大纲并统稿。

本书可作为应用型本科、职业院校以及自学考试的线性代数课程的教材，也可供自学者和科技工作者阅读。

由于水平有限，书中难免有所疏漏，敬请广大读者批评指正。

编　者

2018年10月

目 录

第1章　行列式

行列式起源于求解线性方程组，是方阵的一个数字特征．在线性代数中也是一个基本工具，讨论许多问题都要用到它．本章首先引入二阶和三阶行列式的概念，并在此基础上给出 n 阶行列式的定义并讨论其性质和计算，进而应用 n 阶行列式导出了求解 n 元线性方程组的克莱姆法则，同时应用 n 阶行列式给出求逆矩阵的另一种方法 —— 伴随矩阵法．

1.1　行列式的定义

初等数学中，二阶行列式是在二元线性方程组的求解中提出的．设二元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

可以写成矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，其中系数矩阵、位置数列向量和常数列向量分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}，\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}，\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

利用消元法可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \end{cases} \tag{1.2}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.3}$$

为了使式(1.3)更加简明便于记忆，把式中分母，即二阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 的对角线元素乘积 $a_{11}a_{22}$ 减副对角线元素 $a_{12}a_{21}$ 的差(“对角线法则”)，称为二阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，简称二阶行列式，记为 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$．利用二阶行列式的定义，式(1.3)

可表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

类似的，在三元线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$的求解中引出三阶行列式，其定义为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

三阶行列式展开式也可用对角线法则得到：对角线及与之“平行”的两条线上各三个元素乘积外加“+”号，而副对角线及与之“平行”的两条线上各个元素的乘积外加“−”号，三阶行列式的“值”，等于这六项的代数和.

例 1 计算三阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

解法 1 （用定义）

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}+5\times\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=1\times(28-12)-0+5\times(-4-8)=-44.$$

解法 2 （用对角线法则）

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}=1\times4\times7+0\times3\times2+5\times(-1)\times4-1\times3\times4-0\times(-1)\times7-5\times4\times2=-44.$$

我们还发现三阶行列式$|\boldsymbol{A}|$还可以写为如下形式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

分析式(1.4)：右端的三项是三阶行列式中第1行的三个元素 $a_{1j}(j=1,2,3)$ 分别乘一个二阶行列式，而所乘的二阶行列式是划去该元素所在的行与列以后，由剩余的元素组成；另外，每一项之前都要乘以 $(-1)^{1+j}$，1和 j 恰好是 a_{1j} 的行标和列标.

按照这一规律，可以用三阶行列式定义出四阶行列式，以此类推，可以给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.1　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 是按如下规则确定的一个数：

当 $n=1$ 时，$|\boldsymbol{A}|=|a_{11}|=a_{11}$；

当 $n\geqslant 2$ 时，假定 $n-1$ 阶行列式已经定义，删除 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，所得到的 $n-1$ 阶行列式，称为 a_{ij}（在行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中或在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中）的余子式，记为 M_{ij}；而令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，A_{ij} 称为元素 a_{ij}（在行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中或在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中）的代数余子式.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j} \tag{1.5}$$

公式(1.5)表明：n 阶行列式等于行列式第1行的各元素乘以各自代数余子式之积的和. 因此公式(1.5)又称为行列式"按第1行展开".

如果按公式(1.5)逐次递推，最终得到 $n!$ 项，每一项的形式为 $\pm a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一种排列. n 阶行列式的"完全展开式"的 $n!$ 个项，都是不同行、不同列的 n 个元素的乘积，冠以确定的正、负号. 简记为 $D=\det(a_{ij})$ 或 $D=|a_{ij}|$.

要特别注意的是，前面提到的关于三阶行列式的"对角线法则"，对于四阶和四阶以上的行列式是不适用的.

为了理解 n 阶行列式的定义及余子式、代数余子式的定义，给出下例.

例 2　按定义计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解　按上定义2.1，有

$$D=0A_{11}+3A_{12}+6A_{13}+0A_{14}=3A_{12}+6A_{13}=-3\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}+6\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$=102.$

例 3 计算下三角行列式(当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，即主对角线以上元素全为零)：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由 n 阶行列式的定义

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同样可计算上三角行列式(当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$，即主对角线以下元素全为零)：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别的，对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 所对应的行列式，即

$$|\boldsymbol{\Lambda}|=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 所对应的行列式，即

$$|\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix}=1.$$

在 n 阶行列式的定义中，给出了行列式计算的一般方法，但在实际中，用这种方法计算三阶以上的行列式，计算量大. 因此，本章将讨论行列式的性质，以得到简化计算行列式的方法. 但在讨论行列式的性质前，我们应该特别指出，行列式和矩阵是两个不同的概念，矩阵是数字排成的矩形表格，若矩阵中只是改变一个元素，就改变了矩阵. 而行列式外形像方阵，但它不用括号，而用直线段包围，它是方阵的一个数字特征，即方阵对应的行列式是一个数；两个看起来差别很大的行列式有可能相等，例如，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}=24.$$

1.2　行列式的性质

与矩阵相仿，行列式的行与列互换称为转置，行列式 D 的转置行列式记为 D^{T}.

性质1　行列式与其转置行列式相等.

性质2　行列式的某一行(列)的公因子可以提到行列式的记号外，换言之，若用数 k 乘以行列式，等于把数 k 乘以行列式的某一行(列)：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ k\boldsymbol{\alpha}_s \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_s \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix}.\text{(以行为例)}$$

性质3　互换行列式的两行(列)，行列式变号：

$|\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \overset{(s)}{\boldsymbol{\alpha}_s}, \cdots, \overset{(t)}{\boldsymbol{\alpha}_t}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| = -|\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \overset{(s)}{\boldsymbol{\alpha}_t}, \cdots, \overset{(t)}{\boldsymbol{\alpha}_s}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n|$, $1 \leqslant s < t \leqslant n$.(以列为例)

性质4　如果行列式有两行(列)相同，那么行列式为零.

证　互换行列式的某两行(列)，则 $|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{A}|$，则 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

推论1　若行列式某两行(列)对应成比例，则行列式等于零：

$|\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \overset{(s)}{\boldsymbol{\alpha}_s}, \cdots, \overset{(t)}{k\boldsymbol{\alpha}_s}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| = k|\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \overset{(s)}{\boldsymbol{\alpha}_s}, \cdots, \overset{(t)}{\boldsymbol{\alpha}_s}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| = 0$.

推论2　若行列式含有零行(列)，则行列式的值为零.

性质5　若行列式的某行(列)的元素为两个数之和，则行列式可以拆为两个行列式之和

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_s + \boldsymbol{\beta}_s \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_s \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_s \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix}.\text{(以行为例)}$$

性质6　把行列式的某一行(列)的元素乘以同一个数，然后与另一行(列)对应元素相加，所得行列式与原行列式相等：

$|\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| = |\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s + k\boldsymbol{\alpha}_t, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n|$.(以列为例)

证　可由性质4和性质5得

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s + k\boldsymbol{\alpha}_t, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| &= |\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| \\ &\quad + |\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, k\boldsymbol{\alpha}_t, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| \\ &= |\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n|. \end{aligned}$$

性质7 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，k 是一个数，则 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$.

证 反复利用性质2 有

$$|k\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}=k^n\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k^n|\boldsymbol{A}|$$

事实上，由行列式的以上性质可得以下定理.

定理1 n 阶行列式 D 等于它的任意一行(列)中所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}.\text{(以行为例)}$$

证 (1) 在 D 中第一行的元素中除 a_{11} 外其余元素均为零的特殊情况，即

$$D=a_{11}A_{11}=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}=a_{11}M_{11}.$$

(2) 在 D 中第 i 行元素中除 a_{ij} 外其余元素均为零的情况下，利用(1)的结果，将 a_{11} 调换到第一行第一列的位置，这样经过 $i-1$ 次邻换换至第一行，$j-1$ 次邻换换至第一列，即

$$D=a_{ij}(-1)^{i+j-2}M_{ij}=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}.$$

(3) 当每个元素都不为零时，将 D 写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}.$$

定理2 n 阶行列式 D 中的任意一行(列)中所有元素与另外一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即 $D=a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=0$.(以按行展开为例)

读者自证.

性质8(方阵乘积的行列式) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，此式也成为行列式乘法公式

性质8可以推广到有限多个同阶方阵的情况，即 $|\boldsymbol{ABC}\cdots\boldsymbol{H}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cdots|\boldsymbol{H}|$.

例 1 求证 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & a_{22} & c_{21} & c_{22} \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$.

证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & a_{22} & c_{21} & c_{22} \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & c_{21} & c_{22} \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & c_{11} & c_{12} \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{21}a_{12} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

由例 1 的结论可推广到一般情况

性质 9(“四块缺角”行列式) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 依次是 s 阶、t 阶方阵，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 依次是 $s \times t$，$t \times s$ 矩阵，则 $s+t$ 阶行列式 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$.

例 2 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

解 $$D = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0+0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6+0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5+0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1+0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0+0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 665.$$

用 r_i，c_i 分别表示行列式(或矩阵）的第 i 行、第 i 列，则根据性质可得：
交换行列式的某两行(列）表示为：$r_i \leftrightarrow r_j$，$c_i \leftrightarrow c_j$(注意此时行列式变号).
行列式的某行(列）乘以某个数 k 表示为：kr_i，kc_i.
将行列式某一行(列）乘以一个数加到另一行(列）表示为：$r_i + kr_j$，$c_i + kc_j$.

1.3 行列式的计算

1. 化行列式为上(下)三角行列式

利用行列式的性质，将行列式化为上(下)三角行列式来计算，是计算行列式的基本方法之一.

例 1 设 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$，计算 $n+1$ 阶行列式(空白处元素为零)

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & & & \\ -1 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & & & & a_n \end{vmatrix}.$$

解 n 次应用性质 6，即作 $c_1+\left(\frac{1}{a_1}c_2+\frac{1}{a_2}c_3+\cdots+\frac{1}{a_n}c_{n+1}\right)$，将 d 化为上三角行列式

$$d=\begin{vmatrix} 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & a_1 & & & \\ & & a_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix}=\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)a_1a_2\cdots a_n.$$

形如例 1 中的行列式，即除第 1 行、第 1 列及对角线元素之外，其余元素全为零的行列式，可以称为“伞形行列式”(或“爪形行列式”)，通常伞形行列式很容易化成三角形行列式而求出其值.

例 2 计算 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

解 先把行列式的第 2，3，…，n 行都加到行列式的第 1 行，然后将第 1 行的公因子 $[a+(n-1)b]$ 提到行列式外，得

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix},$$

再把新的行列式的第 2，3，…，n 行都减去第 1 行的 b 倍，得

$$[a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

计算行列式的另外一个常用方法是“逐次降阶法”，这种方法主要是用行列式按行(列) 展开定理，具体计算时先用行列式性质，将某一行(列) 的元素尽可能多的化为零元素，然后再按此行(列) 展开，通常降低直至二阶或三阶，计算出结果.

例 3 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+2r_2]{r_1+2r_2} \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix} = (-1)\times(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+2r_2]{r_1-r_2} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = -24.$$

例 4 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4)$，$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}_2, 2\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_3, 2\boldsymbol{A}_4)$，其中 $\boldsymbol{A}_i$ 是四维列向量，$i=1, 2, 3, 4$，已知 $|\boldsymbol{A}|=a$，求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$：

解　本题涉及了矩阵加法及行列式计算，矩阵相加的规则是对应元素相加，因此也是对应列向量相加，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2, 2\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2, 2\boldsymbol{A}_3, 3\boldsymbol{A}_4),$$

再取行列式，应按行列式的性质计算

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| &= |\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2, 2\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2, 2\boldsymbol{A}_3, 3\boldsymbol{A}_4| \xlongequal{c_2-c_1} |\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_1, 2\boldsymbol{A}_3, 3\boldsymbol{A}_4| \\ &= |\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_1, 2\boldsymbol{A}_3, 3\boldsymbol{A}_4| \\ &= -|\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, 2\boldsymbol{A}_3, 3\boldsymbol{A}_4| = -6|\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4| = -6|\boldsymbol{A}| = -6a. \end{aligned}$$

例 5 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，已知 $|\boldsymbol{A}|=2$，求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$.

解 由题设得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=-2\boldsymbol{E}$ 两边取行列式，根据行列式性质得

$$|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})|=|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})|=|-2\boldsymbol{E}|=(-2)^3|\boldsymbol{E}|=-8,$$

再由 $|\boldsymbol{A}|=2$，得 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=-4$.

例 6 证明 n 阶 $(n\geqslant 2)$ 范得蒙(Vandermonde) 行列式

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j),$$

其中，a_1，a_2，…，a_n 是行列式的 n 个参数.

证 对阶数 n 用数学归纳法. 首先有 $V_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=a_2-a_1=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant 2}(a_i-a_j)$，即对 $n=2$ 时，公式成立.

现假设上式对 $n-1$ 阶范得蒙行列式成立，去推证对 n 阶范得蒙行列式也成立.

对 V_n 依次作 $r_n-a_1r_{n-1}$，…，$r_3-a_1r_2$，$r_2-a_1r_1$ 得

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & \cdots & a_n^2-a_1a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

按第一列展开为 $n-1$ 阶行列式后，各列提出公因子得

$$V_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

右端出现了 $n-1$ 阶范得蒙行列式，其参数是 a_1，a_2，…，a_n，按归纳假设，等于 $\prod\limits_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$，于是，

$$V_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

1.4　行列式的应用

1. 伴随矩阵求逆矩阵

定义 1.2　设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 构成的如下的 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

由定义容易验证

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=(c_{ij}),\ c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik},$$

由 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}=\begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$，$c_{ij}=\begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n.$$

由此，可得以下定理.

定理 1　n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件为 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

证　必要性　若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，两边取行列式，得 $|A|\,|A^{-1}|=1$，因而 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

充分性　若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}\left(\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)=\left(\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，由逆矩阵的唯一性可知，$\boldsymbol{A}$ 可逆，且