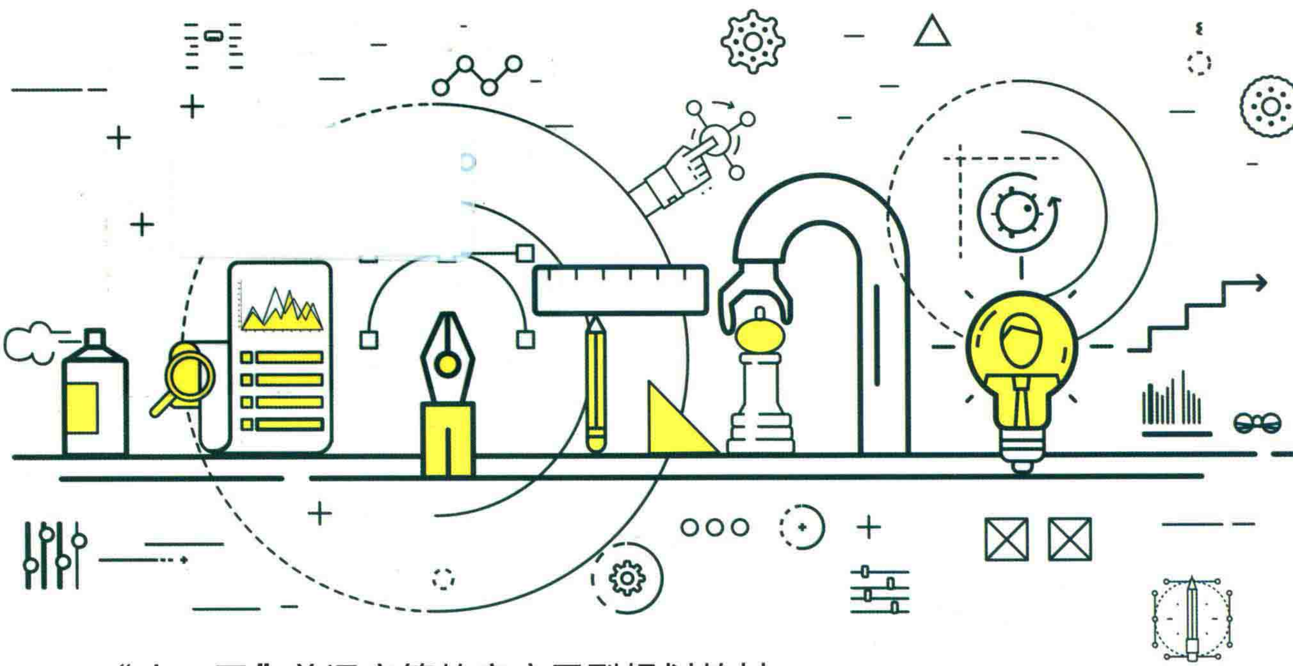


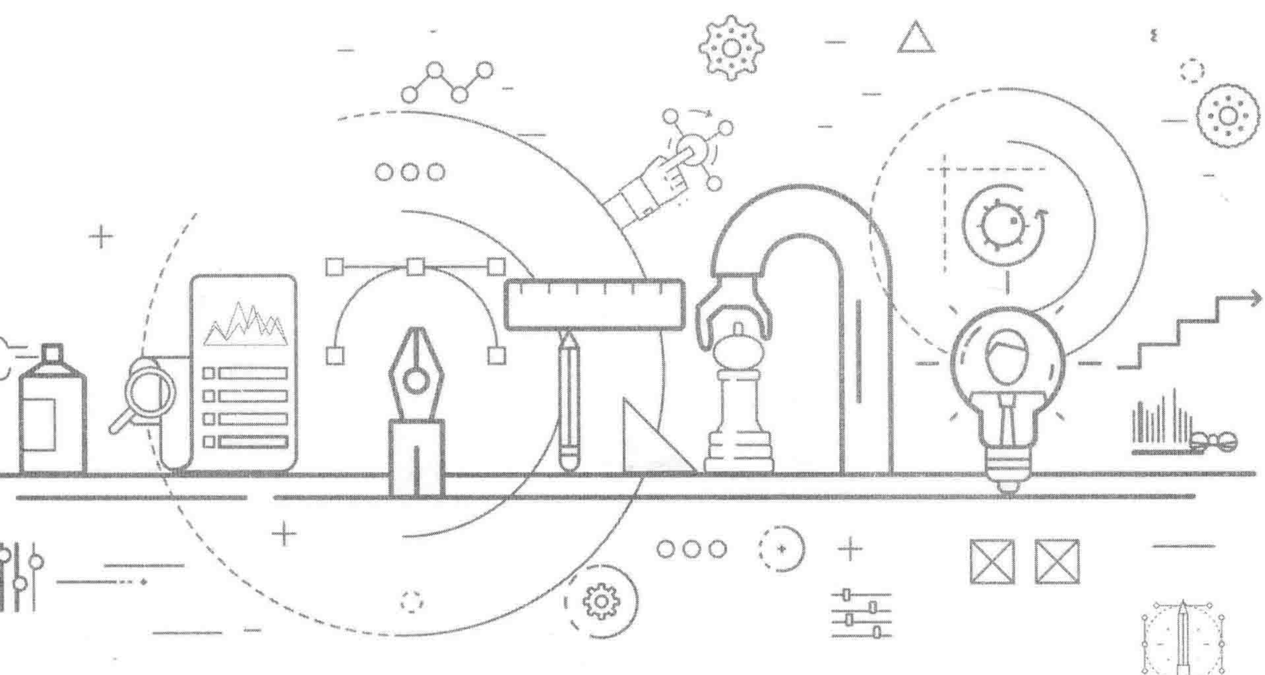
"十三五"普通高等教育应用型规划教材

Probability and Statistics

概率论与数理统计

郭文英　刘　强　孙　阳　陈江荣　编著

中国人民大学出版社



“十三五”普通高等教育应用型规划教材

Probability and Statistics

概率论与数理统计

郭文英　刘　强　孙　阳　陈江荣　编著

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/郭文英等编著. —北京：中国人民大学出版社，2018.7
“十三五”普通高等教育应用型规划教材
ISBN 978-7-300-25970-3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①郭… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 147477 号

“十三五”普通高等教育应用型规划教材
概率论与数理统计
郭文英　刘　强　孙　阳　陈江荣　编著
Gailülun yu Shuli Tongji

出版发行　中国人民大学出版社
社　　址　北京中关村大街 31 号　　**邮政编码**　100080
电　　话　010－62511242（总编室）　010－62511770（质管部）
010－82501766（邮购部）　010－62514148（门市部）
010－62515195（发行公司）　010－62515275（盗版举报）
网　　址　http://www.crup.com.cn
http://www.ttrnet.com（人大教研网）
经　　销　新华书店
印　　刷　北京密兴印刷有限公司
规　　格　185 mm×260 mm　16 开本　　**版　　次**　2018 年 7 月第 1 版
印　　张　15.75　　**印　　次**　2018 年 7 月第 1 次印刷
字　　数　363 000　　**定　　价**　36.00 元

内容摘要

本书是根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会的总体要求、结合地方财经类专业需求特点进行编写的. 按照“专业适用，内容够用，学生适用”的设计思路，量身定制课程内容，突出经济数学的“经济”特色。内容编排尽量做到结构合理、概念清楚、条理分明、深入浅出、强化应用.

全书共分 9 章，内容涵盖了随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机向量、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验以及 R 语言及其在概率统计中的应用等内容. 为开拓学生的学习视野、增强实践应用能力，本书在第 9 章中介绍了 R 语言及其在概率统计中的应用. 为了便于读者学习，每节后均附有习题，每章后附有总复习题，书末附有答案.

本书既可以作为普通高等学校经管类本科生学习《概率论与数理统计》课程的教材，也可以作为教师的教学参考用书和全国硕士研究生统一入学考试的复习用书.

前言

数学是一门工具，更是一种思维方式. 学习数学有助于我们培养发现问题、分析问题、解决问题的能力. 财经类专业与数学联系密切，大学数学在财经类专业人才培养中的作用日益凸显，在应用型、复合型人才的综合素养培养方面发挥着重要作用. 当前，在地方财经类院校，大学数学已经成为本科教育的必修课程. 财经类院校大学数学主要包括三大类课程，即微积分、线性代数以及概率论与数理统计，当然还有一些其他衍生课程，例如数学史与数学文化、数学软件与应用、数学实验等.

2009 年以来，在北京市和学校相关部门的大力支持下，我校公共基础课的教学改革一直在如火如荼地进行，数学公共基础课教学团队从全国地方财经类专业的数学需求出发，结合教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会的总体要求，对课程管理与队伍建设、数学理念、教学大纲与课程内容、考核方式、教学模式与教学手段、教学研究、学科竞赛等方面进行了全方位改革，涉及面广，内容深刻，力度很大，效果很好. 在此基础上，我们对原有讲义进行了系统的整理、修订，编写了“十三五”普通高等教育应用型规划教材，该系列教材主要包括微积分、线性代数以及概率论与数理统计三门课程，以及相应的同步练习和深化训练辅导用书，由首都经济贸易大学的刘强教授担任丛书的总主编.

编写组曾经在北京、山东、江苏等省市的部分高校进行实际调研，很多学生在学习过程中对于一些重要的数学思想、数学方法难以把握，许多高校数学公共课期末考试不及格现象普遍存在. 这一方面说明了当前大学数学教学改革的紧迫性，同时也说明了教材编写的合理定位的重要性. 从规划教材的定位来看，本系列教材主要适用于地方财经类一本、二本院校的教学用书，在教材的编写过程中，在保持数学体系严谨的前提下，尽量简明通俗、形象化，强调数学思想的学习与培养，淡化理论与方法的证明，注重经济学案例的使用，强调经济问题的应用，体现出经济数学的“经济”特色.

本书为《概率论与数理统计》分册. 内容体系在根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会的总体要求的基础上，结合地方财经类专业特点进行系统设计，尽可能做到

结构合理、概念清楚、条理分明、深入浅出、强化应用.

全书共分 9 章，内容涵盖了随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机向量、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验以及 R 语言及其在概率统计中的应用等内容. 其中前 5 章为概率论内容，后面的第 6～8 章为数理统计内容. 为开拓学生的学习视野、增强实践应用能力，本书增设了第 9 章.

为了便于读者学习，每节后均附有习题，每章后附有总复习题，书末附有答案. 为了便于学生学习和教师布置课后作业，配套习题将按节设计，每章附有总复习题，书末附有习题答案。同时为了便于读者学习，选学内容和有一定难度的内容将用“*”号标出.

在系列教材的编写过程中，得到了北京航空航天大学的韩立岩教授、清华大学的邓邦明教授、北京工商大学的曹显兵教授、北京工业大学的薛留根教授、广东财经大学的胡桂武教授、北方工业大学的刘喜波教授、中央财经大学的贾尚晖教授、重庆工商大学的陈义安教授、北京信息科技大学的侯吉成教授、北京联合大学的邢春峰教授、昆明理工大学的吴刘仓教授、江苏师范大学的赵鹏教授、北京化工大学的李志强副教授以及首都经济贸易大学的马立平教授、张宝学教授、任韬副教授等同仁的大力支持，中国人民大学出版社的策划编辑李丽娜女士为丛书的出版付出了很多努力，在此一并表示诚挚的感谢.

编写组教师均长期工作在大学数学教学的第一线，积累了丰富的教学经验，深谙当前本科教学的教育规律，熟悉学生的学习习惯、认知水平和认知能力，在教学改革中取得了一些成绩，出版过包括同步训练、深化训练、考研辅导以及大学生数学竞赛等多个层次的教材和辅导用书. 然而此次规划教材的编写又是一次新的尝试，书中难免存在不妥甚至错误之处，恳请读者和同行不吝指正. 欢迎来函，邮件地址为 cuebliuqiang@163.com.

作　者
2018 年 5 月

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

在自然界与人类的社会活动中会出现各种各样的现象，其中既有确定性现象，又有不确定现象. 不确定现象中的**随机现象**是指在相同条件下，结果呈现出不确定性，但在大量重复试验或观测中结果又具有**统计规律性**（即在大量重复试验或观测中呈现出来的固有规律）的现象. 随机现象在日常生活中随处可见，例如：一天内进入某超市的顾客数，一天内访问百度百科的独立 IP 数，新的产品在未来市场的占有率，顾客在超市排队等候付款的时间，等等.

历史上，研究随机现象统计规律性的最著名的试验是抛掷硬币试验. 大家知道，抛掷一枚质地均匀的硬币时，事先无法得知到底出现正面还是反面，但是，当连续抛掷多次时，就会发现出现正面和反面的次数大致相等，即各自占总试验次数的比例约等于 0.5，且随着试验次数的增加，这一比例会更加稳定地接近 0.5. 历史上有很多数学家做过抛硬币试验，例如，德·摩根、蒲丰、费勒、皮尔逊等，试验数据见表 1-1. 从这些数据可以看出，正面出现的次数占总试验次数的比例稳定在 0.5.

表 1-1

试验者	抛硬币的次数	正面出现的次数	正面出现的次数占总试验次数的比例
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科. 它为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法.

§1.1　随机事件

1.1.1　随机试验与样本空间

为了研究随机现象的统计规律性，人们往往需要对随机现象进行观察，通常将对随机现象的观察称为随机试验.

定义 1.1.1　具有以下性质的试验称为**随机试验**：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验可能出现的结果不止一个，但在试验之前知道所有可能的结果；

(3) 试验前不能确定哪一个结果会出现.

随机试验（简称**试验**）通常用字母 E 表示.

例如：

E_1：掷一枚骰子，观察出现的点数；

E_2：在同一批次的电子产品中任取一件，测试其寿命；

E_3：记录某地区一次降雨的降雨量；

E_4：单位时间内通过某一观测点的汽车数.

随机试验 E 的一切可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 S. 样本空间中的元素，即 E 的每一个可能的结果，称为**样本点**，记为 e.

上述随机试验 E_1，E_2，E_3，E_4 的样本空间分别是：

$S_1=\{1$ 点、2 点、3 点、4 点、5 点、6 点$\}$；

$S_2=\{t \mid t\geqslant 0\}$；

$S_3=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 350\}$（单位为 mm，其中 350 为该地区同期降雨量的最大值）；

$S_4=\{n \mid n=0, 1, 2, \cdots\}$.

一般地，试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的**随机事件**，简称**事件**. 事件用大写英文字母 A，B，C 等表示. 由单个样本点构成的事件称为**基本事件**，否则称为**复杂事件**.

在 E_1 中，以 A 表示事件“掷得的点数为偶数”，则 $A=\{2$ 点、4 点、6 点$\}$；以 B 表示事件“掷得的点数最大”，则 $B=\{6$ 点$\}$. 显然，A 为 E_1 的复杂事件，B 为基本事件.

在一次试验中，如果试验的结果为事件 A 中的样本点，则称在这次试验中**事件 A 发生**. 由于样本空间 S 包含试验的所有可能结果，因此每次试验时 S 总是发生的，故称 S 为**必然事件**；而空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，因此每次试验时 $\varnothing$ 都不发生，故称 $\varnothing$ 为**不可能事件**.

1.1.2　随机事件的关系及运算

设试验 E 的样本空间为 S，而 A，B，A_i（$i=1, 2, \cdots$）是 E 的事件.

（1）如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，记作 $A\subset B$.

（2）如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

（3）事件“A 与 B 至少有一个发生”称为 A 与 B 的**和事件**，记作 $A\cup B$. 事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 事件 A_1，A_2，…的和事件记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

（4）事件“A 与 B 同时发生”称为 A 与 B 的**积事件**，记作 $A\cap B$，简记为 AB. n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$. 事件 A_1，A_2，…的积事件记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

若 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B **互不相容**或**互斥**，此时事件 A 与 B 不能同时发生. 显然，基本事件是互不相容的. 若一组事件中的任意两个事件均互不相容，则称这组事件两两互不相容.

若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互为**对立事件**或**互逆事件**，A 的对立事件记为 $\overline{A}$. 显然，对随机试验而言，每次试验中事件 A 与 $\overline{A}$ 中必有且仅有一个发生.

（5）事件“A 发生且事件 B 不发生”称为 A 与 B 的**差事件**，记作 $A-B$.

显然有 $A-B=A-AB=A\overline{B}$；$A\overline{B}\cup AB=A$.

事件之间的运算满足如下规律：

（1）**交换律**　$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

（2）**结合律**　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

（3）**分配律**　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

（4）**德・摩根律**　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i$.

习题 1.1

1. 事件 A_i 表示车间里第 i 条生产线完成生产任务，$i=1$，2，3，B 表示至少有两条生产线完成生产任务，C 表示最多有两条生产线完成生产任务，说明事件 $\overline{B}$ 及 $B-C$ 的意义，并用 $A_i(i=1，2，3)$ 表示.

2. 设 A，B，C 为三个事件，用 A，B，C 的运算关系表示下列各事件：

（1）A 发生，且 B 与 C 不发生；

（2）A 与 B 都发生，而 C 不发生；

（3）A，B，C 中至少有一个发生；

（4）A，B，C 都不发生；

（5）A，B，C 中不多于两个发生；

（6）A，B，C 中至少有两个发生.

3. 证明下列等式：

（1）$\overline{AB\cup CD}=(\overline{A}\cup\overline{B})(\overline{C}\cup\overline{D})$.

（2）$A-BC=(A-B)\cup(A-C)$.

（3）$(A\cup B)(A\cup\overline{B})\cup(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})=S$.

4. 设 A 与 B 为对立事件，证明 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也为对立事件.

§1.2 概率的定义及性质

对于一个随机试验，不仅要知道它的事件是什么，还要弄清楚这些事件在试验中发生的可能性大小. 例如，一枚质地均匀的硬币抛一次后出现正面或反面的可能性谁大谁小？又如，购买一张某省发行的福利彩票，中奖的可能性有多大. 人们希望将事件发生的可能性大小用一个合适的数来表示，为此，首先引入频率，它描述了事件发生的频繁程度，进而给出事件概率的定义.

1.2.1 频率

定义 1.2.1 设 A 为试验 E 的一个事件，将 E 在相同条件下重复 n 次，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**，$\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

事件的频率具有如下三条基本性质：

(1) 对于任一事件 A，有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1$；

(3) 设 A_1，A_2，…，A_m 为 m 个两两互不相容的事件，则有

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_m).$$

大量试验表明，随着试验的重复次数 n 逐渐增加，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，即频率逐渐稳定于某个常数，这种**频率的稳定性**就是本章开始所提及的**统计规律性**. 从频率的稳定性和频率的性质出发，可以导出表征事件发生的可能性大小的概率的定义.

定义 1.2.2（概率的公理化定义） 设随机试验 E 的样本空间为 S，对 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记作 $P(A)$，如果赋值方式 $P(\cdot)$ 满足以下三个条件：

(1) **非负性** 对任一事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$，

(2) **规范性** $P(S)=1$，

(3) **可列可加性** 对于两两互不相容的事件 A_1，A_2，…，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots,$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

1.2.2 概率的性质

由概率的定义可以证明概率具有如下性质：

(1) $P(\varnothing)=0$.

证　由于$\varnothing=\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$，所以

$$P(\varnothing)=P(\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots)=\sum_{i=1}^{\infty}P(\varnothing),$$

故 $P(\varnothing)=0$.

(2) **(有限可加性)** 设事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

证　因为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots,$$

由可列可加性及 $P(\varnothing)=0$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

(3) 设 A，B 为两个事件，且 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，$P(A)\leqslant P(B)$.

证　由 $A\subset B$ 有

$$B=A\cup(B-A),$$

而 $A\cap(B-A)=\varnothing$，因此，由有限可加性有

$$P(B)=P(A)+P(B-A),$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

再由概率的非负性有

$$P(A)\leqslant P(B).$$

(4) 对任意事件 A，有 $P(A)\leqslant 1$.

证　因为对任意事件 A 均有 $A\subset S$，从而由性质（3）有

$$P(A)\leqslant P(S)=1.$$

(5) 对任意事件 A，有 $P(A)=1-P(\overline{A})$.

证　因为对任意事件 A 均有

$$A\cup\overline{A}=S,\text{且 }A\cap\overline{A}=\varnothing,$$

从而

$$1=P(S)=P(\overline{A})+P(A).$$

故

$$P(A)=1-P(\overline{A}).$$

(6)**(加法公式)** 对任意两个事件 A 与 B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证 对任意两个事件 A 与 B，有

$$A\cup B=A\cup(B-AB),$$

而 $A\cap(B-AB)=\varnothing$，故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB),$$

由于 $AB\subset B$，从而由性质(3)有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

将性质(6)推广到一般情形，设 A_1，A_2，…，A_n 为 n 个事件，则有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)\\&+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned}$$

例 1.2.1 设 A，B，C 为三个事件，且 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{1}{5}$，$P(AB)=\frac{1}{10}$，$P(AC)=\frac{1}{15}$，$P(BC)=\frac{1}{20}$，$P(ABC)=\frac{1}{30}$. 求 $P(A\cup B\cup C)$；$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$；$P(\overline{A}\overline{B}C)$；$P(\overline{A}\overline{B}\cup C)$.

解
$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{17}{20}.\end{aligned}$$

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}})=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{3}{20}.$$

由于 $\overline{A}\overline{B}=\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，且 $\overline{A}\overline{B}C$ 与 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 互不相容，从而有

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\overline{B}C)&=P(\overline{A}\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})\\&=1-P(A\cup B)-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})\\&=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\right)-\frac{3}{20}\\&=\frac{4}{15}-\frac{3}{20}=\frac{7}{60}.\end{aligned}$$

$$P(\overline{A}\overline{B}\cup C)=P(\overline{A}\overline{B})+P(C)-P(\overline{A}\overline{B}C)=\frac{4}{15}+\frac{1}{5}-\frac{7}{60}=\frac{7}{20}.$$

习题 1.2

1. 设 A，B 为两个事件，比较 $P(A)$，$P(AB)$，$P(A\cup B)$，$P(A)+P(B)$ 的大小.

2. 设 A，B，C 为三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，

$P(AC)=\frac{1}{8}$，求事件 A，B，C 至少有一个发生的概率.

3. 设事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.6$，求 $P(\overline{A}\overline{B})$.

4. 设事件 A，B 满足 $P(A\cup B)=0.6$，且 $P(\overline{A}B)=0.3$，求 $P(\overline{A})$.

5. 某班学生使用的网络通信工具有“微信”“QQ”两种. 统计后发现，使用“微信”的学生数占该班总人数的 90%，使用“QQ”的学生数占该班总人数的 70%，两种通信工具都使用的学生数占该班总人数的 60%. 从该班任选一名学生，求下列事件的概率.

(1) 该生仅有一种通信工具；

(2) 该生至少有一种通信工具；

(3) 该生两种通信工具都没有.

6. 设 A，B 是两个事件，试证：$P(A\cup B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB)$.

§1.3　古典概型与几何概型

概率的公理化定义给出了概率的严格的数学定义，但在解决实际问题时，人们要弄清某个事件发生的概率到底是多少，一般而言，这是存在一定困难的. 本节介绍两个常见的概率模型，即古典概型与几何概型，能够较为容易地确定事件发生的概率.

1.3.1　古典概型

若随机试验满足：

(1) 样本空间只包含有限个样本点，

(2) 每个基本事件发生的可能性相同，

则称该随机试验为**古典概型**或**等可能概型**.

在古典概型中，设随机试验的样本空间 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，由概率的有限可加性易得，基本事件的概率为

$$P(\{e_i\})=\frac{1}{n}=\frac{1}{S\text{ 中样本点的总数}}, i=1, 2, \cdots, n. \tag{1.3.1}$$

若事件 $A=\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_j}\}$ $(j\leqslant n)$，则

$$P(A)=\frac{j}{n}=\frac{A\text{ 中样本点的个数}}{S\text{ 中样本点的总数}}. \tag{1.3.2}$$

例 1.3.1　设袋中有 5 只球，其中只有 1 只为红色，分别按“不放回”及“放回”两种方式从袋中取球三次，每次一只. 求：前 3 次取到的球中有红球的概率；第 3 次取到的球是红球的概率.

解　设 $A=\{$前 3 次取到的球中有红球$\}$，$B=\{$第 3 次取到的球是红球$\}$.

当取球方式为“不放回”时，对袋子中的球编号，考虑取出 3 只球的所有可能情况，

可得样本空间 S 中样本点的总数为 A_5^3，A、B 中样本点的个数分别为 $3C_4^1C_3^1$ 和 $C_4^1C_3^1$. 由式（1.3.2），有

$$P(A)=\frac{3C_4^1C_3^1}{A_5^3}=\frac{3}{5}, P(B)=\frac{C_4^1C_3^1}{A_5^3}=\frac{1}{5}.$$

当取球方式为“放回”时，样本空间 S 中样本点的总数为 5^3，考虑到 $\overline{A}$ 中样本点的个数为 $C_4^1C_4^1C_4^1$，从而有

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_4^1C_4^1C_4^1}{5^3}=\frac{61}{125},$$

B 中样本点的个数为 $C_4^1C_4^1$，故

$$P(B)=\frac{C_4^1C_4^1}{5^3}=\frac{16}{125}.$$

例 1.3.2 设有 n 个人，每人都有同等的机会被分配到 $N(n\leqslant N)$ 间房中的每一间. 求下列事件的概率.（1）$A=\{$某指定的 n 间房中各有一人$\}$；（2）$B=\{$恰有 n 间房中各有一人$\}$；（3）$C=\{$某指定的一间房中恰有 $m(m\leqslant n)$ 人$\}$.

解 由题意知，这是一个古典概型问题，并且样本空间 S 中样本点的总数为 N^n.

（1）A 中样本点的个数为 $n!$，故

$$P(A)=\frac{n!}{N^n};$$

（2）B 中样本点的个数为 $C_N^n n!$，故

$$P(B)=\frac{C_N^n n!}{N^n};$$

（3）C 中样本点的个数为 $C_n^m(N-1)^{n-m}$，故

$$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

1.3.2 几何概型

若随机试验满足：

（1）样本空间可以几何化为一个测度（如长度、面积等）有限的几何图形（如长度有限的线段、面积有限的区域等），

（2）事件 A 发生的可能性大小与 A 的测度成正比，

则称该随机试验为**几何概型**.

在几何概型中，设样本空间 S 的测度为 $L(S)$，事件 A 的测度为 $L(A)$，则有

$$P(A)=kL(A),$$

其中 k 为正比例因子. 特别地，令 $A=S$，可由

$$1=P(S)=kL(S),$$