· 供临床、口腔、检验、影像、药学等医学类专业用

· 普通高等教育“十三五”规划教材

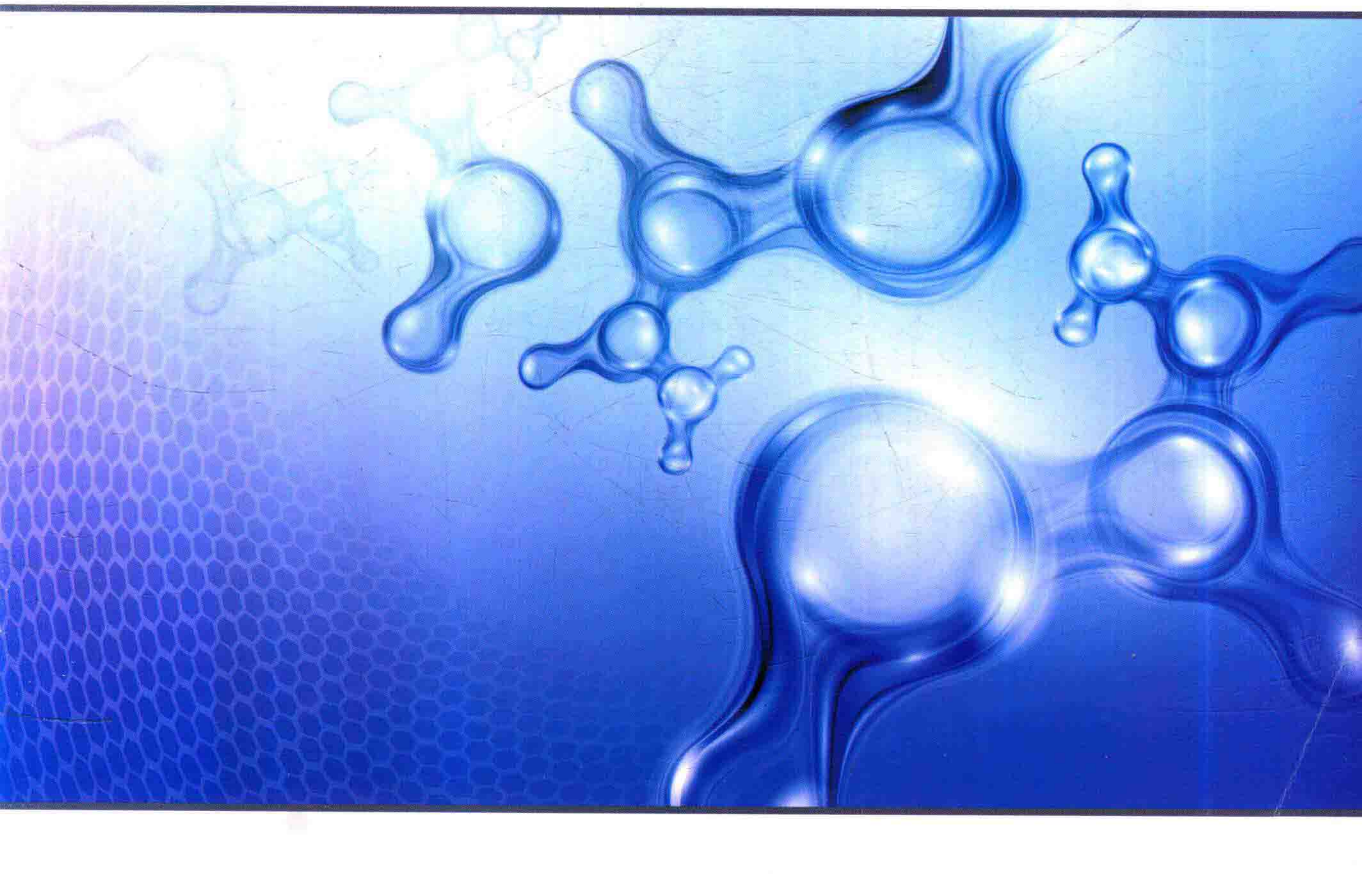
医用高等数学学习指导

主　编◎熊　菲

副主编◎王国庆

杨　杲

YIYONG GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO



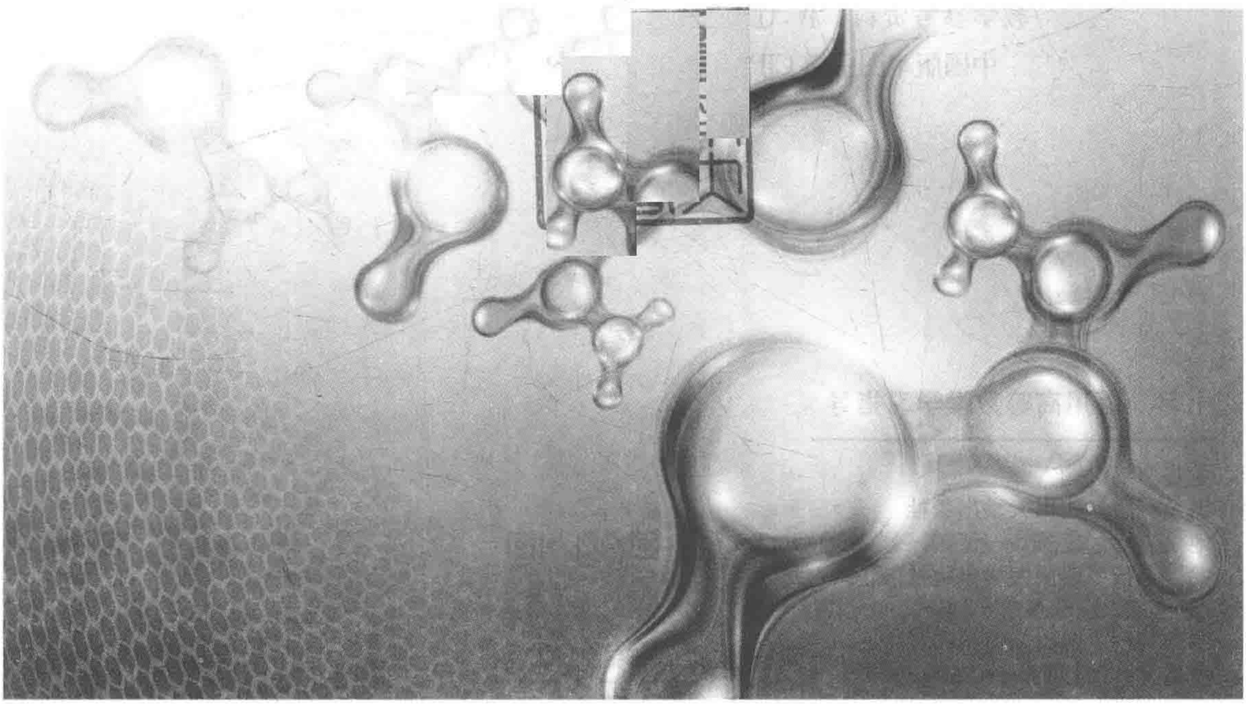
四川大学出版社

· 供临床、口腔、检验、影像、药学等医学类专业用
· 普通高等教育“十三五”规划教材

医用高等数学学习指导

YIYONG GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

主　审◎李润民（昆明医科大学海源学院）
主　编◎熊　菲（昆明医科大学海源学院）
副主编◎王国庆（昆明医科大学海源学院）
杨　杲（昆明医科大学海源学院）
编　者◎王保珩　刘　霖　蔡金明　黄　霞
（昆明医科大学海源学院）
刘雅丽（云南师范大学文理学院）



四川大学出版社

特约编辑:杨淑燕
责任编辑:梁　平
责任校对:周　艳
封面设计:璞信文化
责任印制:王　炜

图书在版编目(CIP)数据

医用高等数学学习指导 / 熊菲主编. —成都: 四川大学出版社, 2019.1
ISBN 978-7-5690-2716-7

Ⅰ.①医… Ⅱ.①熊… Ⅲ.①医用数学-医学院校-教学参考资料 Ⅳ.①R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 016171 号

书名　**医用高等数学学习指导**

主　编	熊　菲
出　版	四川大学出版社
地　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　行	四川大学出版社
书　号	ISBN 978-7-5690-2716-7
印　刷	四川新恒川印务中心
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　张	16
字　数	388 千字
版　次	2019 年 1 月第 1 版
印　次	2019 年 1 月第 1 次印刷
定　价	46.80 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。
电话:(028)85408408/(028)85401670/(028)85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:http://press.scu.edu.cn

内容简介

本书是与人民卫生出版社《医用高等数学》教材配套的学习指导书，每章除了有基本内容及要求、配套习题详解、例题解析外，还有知识概要、自测题及参考答案。其主要特点是精选例题，并强调数学在医学方面的实际应用。

本书主要内容包括：函数和极限、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微积分学、微分方程基础、概率论基础、线性代数初步。

本书可供高等院校临床、口腔医学、检验、影像、药学等医学类专业学生使用，也可供相近专业本、专科生参考。

前　言

人民卫生出版社出版的《医用高等数学》一直是全国医学院校广泛使用的数学教材，本册《医用高等数学学习指导》是专门针对人民卫生出版社教材配套编写的学习指导书。

本书分为函数和极限、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微积分、微分方程基础、概率论基础和线性代数初步七个章节，每章又分为五大部分：第一部分为基本内容、要求及知识概要，对每一章的重点、难点及要求给予了明确解释，并对本章的知识进行了概要归纳，便于同学们复习归纳；第二部分为典型例题，精心挑选重点题型、易错题型，特别增加了与医学知识相结合的例题，并对同一类型的题目解题方法进行归纳小结；第三部分为配套教材思考与练习解答；第四部分为配套教材习题详解，详细的解答过程可供同学们课后练习进行参考；第五部分为自测题，可供同学们学习之余进行自测练习。综上，这是一本较为全面、内容丰富的学习指导书，不仅有重点知识归纳，还有例题小结，不仅有教材习题参考答案，还增加了丰富的自测题，是引导医学生学好高等数学的有效工具。

熊菲老师负责统筹组织编写本书的构架和校对，并编写了第一章至第三章；杨杲老师编写了第四章、第五章；王国庆老师编写了第六章、第七章；另外，王保珩、刘霖、蔡金明、黄霞、刘雅丽老师参与了部分章节的参考答案或基本要求的编写。昆明医科大学海源学院领导对本书的编写给予了大力支持，在此一并表示感谢。

尽管本书编者一直从事医用高等数学的教学和研究，但限于水平和时间，书中难免会存在错误和不当之处，欢迎广大教师与学生提出宝贵意见。

熊　菲

2018 年 12 月

目　录

第一章　函数和极限

一、基本内容、要求及知识概要

（一）基本内容

1. 函数：函数的概念、几种性质，基本初等函数及性质，复合函数的概念、合成与分解，初等函数，分段函数.

2. 极限：函数极限的概念、性质、运算，两个重要极限公式，无穷小与无穷大.

3. 函数的连续性：函数连续的概念，间断点的概念和分类，闭区间上连续函数的性质及应用.

（二）要求

1. 函数：理解函数的概念、熟悉六种基本初等函数的性质和图象，会求常见函数的定义域；掌握复合函数的概念、复合函数的分解与合成；熟悉初等函数和分段函数的概念.

2. 极限：理解函数极限的概念，熟悉极限的四则运算，掌握两个重要极限，会熟练求常见函数的极限；理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的性质，能对无穷小进行比较.

3. 函数的连续性：熟悉函数连续和间断的概念，能对函数常见间断点进行确定和分类.

（三）知识概要

1. 一元函数的概念.

（1）函数的定义.

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，变量 x 在数集 D 中取值. 若对 x 取 D 中的每个值，变量 y 按照一定的规律有确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的**函数**. 记作

$$y=f(x),\ x\in D$$

其中 x 称为**自变量**，而 y 称为**因变量**，因变量与自变量之间的对应规则称为**函数关系**. 集合 D 称为函数的**定义域**，如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的定义域中的一点，也称函数 $f(x)$ 在 x_0 点有定义，与自变量 x_0 相对应的因变量的值称为函数值，记为 $f(x_0)$，而

所有函数值的集合称为函数的**值域**.

函数的**两大要素**：定义域和对应规律.

判断两个函数是否相同：判断定义域和对应规律是否完全相同.

分段函数　在定义域中的不同部分内用不同的解析式表示的函数.

(2) 函数的表示方法.

函数常用的表示方法有解析法、图象法、列表法.

(3) 复合函数.

若变量 y 是变量 u 的函数，变量 u 又是 x 的函数，即

$$y=f(u),\quad u=\varphi(x)$$

且 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域或定义域的一部分上取值时所对应的 u 值，函数 $y=f(u)$ 是有定义的，则称 y 是 x 的**复合函数**，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为中间变量.

复合函数的中间变量可以是多个，但不是任何两个函数都可以复合成一个函数的.

(4) 基本初等函数及初等函数.

基本初等函数：

常数函数　$y=C$ (C 是常数)；

幂函数　$y=x^a$ (a 是任意实数).

幂函数常用公式：

根式、分式可化成幂函数的形式，如 $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$，$\frac{1}{x}=x^{-1}$，$\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$

同底数幂相乘除、乘方公式：

①$x^m\cdot x^n=x^{m+n}$；

②$x^m\div x^n=x^{m-n}$；

③$(x^m)^n=x^{mn}$.

指数函数　$y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)；特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，$y=\mathrm{e}^x$.

对数函数　$y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)；特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，$y=\ln x$；当 $a=10$ 时，$y=\lg x$.

对数函数常用公式：

①$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$；

②$\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$；

③$\log_a x^y=y\log_a x$.

三角函数　$y=\sin x$ (正弦)；$y=\cos x$ (余弦)；$y=\tan x$ (正切)；$y=\cot x$ (余切)；$y=\sec x$ (正割)；$y=\csc x$ (余割).

常用的三角函数公式：

①$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$；

②$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$；

③$\sec x=\frac{1}{\cos x}$；

④$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$；

⑤$\sin^2 x+\cos^2 x=1$；

⑥$1+\tan^2 x=\sec^2 x$；

⑦$1+\cot^2 x=\csc^2 x$；

⑧$\sin 2x=2\sin x\cos x$；

⑨$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$；

⑩和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)].$$

反三角函数　$y=\arcsin x$（反正弦）；$y=\arccos x$（反余弦）；$y=\arctan x$（反正切）；$y=\operatorname{arccot} x$（反余切）．

初等函数　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合所构成的函数．

分段函数　在定义域中的不同部分内用不同的解析式表示的函数．

2．函数的几种特性．

（1）单调性．

对于(a, b)内的任意两点x_1和x_2，当$x_1<x_2$时，总有$f(x_1)<f(x_2)$（或$f(x_1)>f(x_2)$）成立，则称函数$f(x)$在区间(a, b)内单调递增（或单调递减），而区间(a, b)称为函数$f(x)$的单调递增区间（或单调递减区间）．单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数；单调递增区间和单调递减区间统称为单调区间．

单调递增函数图形是沿横轴正向上升的，单调递减函数图形是沿横轴正向下降的．

（2）奇偶性．

设函数$y=f(x)$的定义域D关于原点对称，如果$f(-x)=-f(x)$，则称函数$f(x)$是奇函数；如果$f(-x)=f(x)$，则称函数$f(x)$是偶函数．

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于y轴对称．

（3）周期性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D 有定义，若存在某个正数 M，使得不等式

$$|f(x)| \leqslant M$$

对于定义域 D 内的一切 x 值都成立，则称函数 $f(x)$ 在定义域 D 内是有界的. 如果这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在定义域 D 内是无界的.

3. 极限的概念.

（1）当 $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

如果自变量 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，则称常数 A 为当 $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A \text{（当 } x \to \infty\text{）}$$

（2）当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限.

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点附近有定义（在 x_0 点可以无定义），若当 $x(x=x_0)$ 无论以怎样的方式（左侧和右侧）趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 都无限趋近于一个常数 A，则称常数 A 为当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A \text{（当 } x \to x_0\text{）}$$

（3）左极限与右极限.

若当 x 从 x_0 的左侧 $(x<x_0)$ 趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，则称常数 A 为当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的**左极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0-0) = A$$

若当 x 从 x_0 的右侧 $(x>x_0)$ 趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，则称常数 A 为当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的**右极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0+0) = A$$

左极限与右极限统称为**单侧极限**.

函数 $f(x)$ 在 x_0 点极限存在的充分必要条件是在该点的左右极限存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$$

4. 极限的四则运算法则.

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在自变量 x 的同一变化过程中极限分别为 A 和 B，即

$\lim f(x)=A$，$\lim f(x)=B$（省略了趋近方式表示在某种趋近方式下的极限）

则

（1）$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$.

（2）$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$.

特别地，

$$\lim[kf(x)] = k\lim f(x) = kA \text{（} k \text{ 为常数）}$$

（3）$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$（$B \neq 0$）.

5. 两个重要极限.

(1) **重要极限公式一**　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$;

(2) **重要极限公式二**　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\Rightarrow\lim\limits_{f(x)\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e$.

6. 无穷小量与无穷大量.

(1) 无穷小量与无穷大量的概念.

无穷小量　若 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$的极限为零，则称函数 $f(x)$为当$x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量，简称**无穷小**.

即 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} f(x)=0\Leftrightarrow f(x)$是当$x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小.

无穷大量　若 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$为当$x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大量，简称**无穷大**.

即 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} f(x)=\infty\Leftrightarrow f(x)$是当$x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大.

(2) 无穷小量的性质.

性质 1　有限个无穷小量的和、差、积仍为无穷小量.

性质 2　有界变量（或常数）与无穷小量的乘积仍为无穷小量.

函数 $f(x)$以常数A 为极限的充分必要条件是

$$f(x)=A+\alpha(x)$$

其中 $\alpha(x)$是在自变量的同一变化过程中的无穷小量.

无穷小量与无穷大量的关系　若函数 $f(x)$为无穷大量，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小量；反之，若函数 $f(x)$（$f(x)\neq 0$）为无穷小量，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大量.

(3) 无穷小量的阶.

设 α 与 β 是在自变量的同一个变化过程中的两个无穷小量，在此过程中，如果

①$\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β 高阶的无穷小量，记为 $\alpha=o(\beta)$;

②$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 和 β 低阶的无穷小量；

③$\lim\frac{\alpha}{\beta}=k\ (k\neq 0)$，则称 α 是比 β 同阶的无穷小量，记为 $\alpha=O(\beta)$;

④$\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 是比 β 等价的无穷小量，记为 $\alpha\sim\beta$.

7. 函数的连续性.

(1) 函数在 x_0 点连续的定义.

设函数 $f(x)$在 x_0 点及其附近有定义，若当自变量 x 在 x_0 点的增量 Δx 趋于零时，对应的函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

则称函数 $f(x)$在 x_0 点连续，并称 x_0 点是 $f(x)$的连续点.

（2）**判断函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的充分必要条件.**

函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

（3）左连续与右连续.

左连续 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点及其左侧附近有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.

右连续 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点及其右侧附近有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.

连续与左右连续的关系 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在 x_0 点既左连续又右连续.

（4）函数在区间连续.

$f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续 函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续.

$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续 函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续，且在左端点 a 右连续，在右端点 b 左连续.

（5）间断点及其分类.

间断点 若函数 $f(x)$ 在 x_0 点不连续，则称函数在 x_0 点间断，x_0 点为函数 $f(x)$ 的间断点.

第一类间断点 若 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个间断点，但 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，则称 x_0 为第一类间断点.

第一类间断点又分为：跳跃间断点、可去间断点.

第二类间断点 若 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个间断点，但 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在，则称 x_0 为第二类间断点.

第二类间断点又分为：无穷间断点、震荡间断点.

（6）连续函数的运算法则.

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 x_0 点连续，则函数 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$ 及 $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$ 在 x_0 点连续.

若函数 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 点连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，又函数 $y=f(u)$ 在 u_0 点连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 点连续.

结论：**一切初等函数在其定义区间内都是连续的.**

（7）闭区间上连续函数的性质.

最值定理 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在函数 $f(x)$ 在该区间上必能取到最大值和最小值.

介值定理 若函数 $f(x)$ 闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在两个端点处的函数值 $f(a)$ 和 $f(b)$ 不相等，则对介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何值 c，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=c \quad (a<\xi<b)$$

推论（根的存在定理） 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$，$f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=0\ (a<\xi<b)$$

二、典型例题

例 1　求函数 $f(x)=\dfrac{\ln(3-x)}{\sin x}+\sqrt{5+4x-x^2}$

解：要使得函数 $f(x)$ 有意义，自变量 x 显然要满足：

$$\begin{cases}3-x>0\\ \sin x\neq 0\\ 5+4x-x^2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3\\ x\neq k\pi\\ -1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z}),$$

所以，函数 $f(x)$ 的定义域

$$D_f=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3,\ x\neq 0\}=[-1,\ 0)\cup(0,\ 3).$$

小结：求函数定义域，即求使函数有意义的自变量的范围，一般方法是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域，再求出这些定义域的交集．解题过程中，请熟记下表所示常用基本初等函数的定义域：

函数	定义域
$y=\sqrt{x}$	$x\geqslant 0$
$y=\dfrac{1}{x}$	$x\neq 0$
$y=\log_a x$	$x>0$
$y=\sin x$，$y=\cos x$	$(-\infty,\ +\infty)$
$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$
$y=\cot x$	$x\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$
$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$	$[-1,\ 1]$
$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,\ +\infty)$

例 2　判断下列各组函数是否相同：

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$；

(2) 函数 $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}$ 与 $g(x)=|1-x|$.

解：(1) 由于 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$，$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$，两个函数的定义域不同，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同的两个函数.

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}=|1-x|$ 虽然两个函数的表现形式不同，当它们的定义域与对应法则都相同，所以这两个是同一函数.

小结：判断两个函数是否相同只需要判断函数的两个要素，即求定义域和对应法则，只有这两个要素完全相同时才表示同一函数，否则表示不同函数.

例 3 判断 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x}(-1<x<1)$

解：$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-e^x}{1+e^x}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\frac{1-e^x}{1+e^x}\ln\frac{1-x}{1+x}$

$$=\frac{e^x-1}{1+e^x}\ln\frac{1-x}{1+x}=f(x)$$

$\because f(-x)=f(x)$

$\therefore f(x)$为偶函数.

小结：判断函数的奇偶性时一般先算出 $f(-x)$的解析式，然后运用已知条件和计算技巧尽量把 $f(-x)$化成与原解析式相仿的形式，最后根据定义做出判断. 即如果 $f(-x)=f(x)$则 $f(x)$为偶函数；如果 $f(-x)=-f(x)$则 $f(x)$为奇函数. 另外一个有效方法是求和 $f(x)+f(-x)$或求差 $f(x)-f(-x)$，前者等于零，表明$f(x)$为奇函数；后者等于零，$f(x)$为偶函数.

例 4 将下列复合函数分解成基本初等函数或基本初等函数的和、差、积、商.

（1）$\cos\left(\frac{5x+3}{x-1}\right)$；（2）$e^{\sin\sqrt{x}}$.

解：（1）$y=\cos u$，$u=\frac{5x+3}{x-1}$；

（2）$y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{x}$.

小结：对于分解复合函数，关键是弄清楚复合的过程，将复合函数从外向内逐层分解.

例 5 计算极限：

（1）$\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-3}{2x^2+x+1}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3e^x-2e^{-x}}{2e^x+3e^{-x}}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

解：（1）$\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)\overset{\frac{1}{0}-\frac{1}{0}}{=}\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=-1.$$

（2）$\because|\sin 2x|\leqslant 1$ 有界，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，即$\frac{1}{x}$是$x\to\infty$时的无穷小，由“有界变量与无穷小的乘积是无穷小”可得，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}=0$.

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-3}{2x^2+x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-\frac{3}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{5}{2}$.

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3e^x-2e^{-x}}{2e^x+3e^{-x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2e^{-2x}}{2+3e^{-2x}}=\frac{3}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1+x}-1)((\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1)}{x((\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1}=\dfrac{1}{3}.$

小结：第（1）题通分、约分后再利用极限的四则运算法则.

第（2）题利用无穷小的性质：有界变量与无穷小的乘积是无穷小.

第（3）题先把分子分母同除以分母的最高次幂，使分子、分母不同时趋于无穷大后再利用极限的四则运算法则.

第（4）题先把分子分母同除函数 e^x，使分子分母不都趋于无穷大，再利用极限的四则运算法则.

第（5）题先对分子有理化后，去掉分母的零因子，再利用极限的四则运算法则.

所以在今后的学习过程中要善于总结化简的技巧.

例 6　利用两个重要极限公式求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{6}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{1-x}$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5=5$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}=\dfrac{3}{5}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{6}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(-\dfrac{6}{x}\right)\right]^{-\frac{x}{6}\cdot(-3)}=\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(-\dfrac{6}{x}\right)\right]^{-\frac{x}{6}}\right\}^{-3}=e^{-3}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-2x)]^{-\frac{1}{2x}\cdot(-2)}=e^{-2}$；

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{1-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{1-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot(-2)}=e^{-2}$.

小结：(1)、(2)、(3) 题利用重要极限公式一：$\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$；(4)、(5)、(6) 题利用重要极限公式二：$\lim\limits_{f(x)\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e$.

求极限的常用方法：（1）恒等变形法：对于分式的极限，先分别求分子分母的极限，若分子分母极限同为0（即$\frac{0}{0}$型）或同为∞（即$\frac{\infty}{\infty}$型），可以通过恒等变形约去分子、分母中的零因子或无穷因子，再利用极限的四则运算法则求解，常用的恒等变形有分解因式，分子、分母同乘除某个因子，根式有理化等；

（2）利用两个重要极限公式；

（3）利用洛必达法则求$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型的极限（参见第三章）.

例 7 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0\\ 2x-b, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，求 b 的值.

解：$f(0)=-b$；

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$；

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x-b)=-b$

因为 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，故 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

即 $b=-1$.

小结：函数在 $x=x_0$ 处连续，即 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

例 8 已知 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0\\ \ln(1+x), & -1<x\leqslant 0\end{cases}$，求 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点所属类型.

解：因为 $f(1)$ 无意义，所以 $x=1$ 一定是间断点.

又$\because \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$

$\therefore x=1$ 为第二类间断点，且为无穷间断点.

又在 $x=0$ 处 $f(0)=0$，

$\because \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(1+x)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{1}{e}$

$\therefore x=0$ 也是 $f(x)$ 的间断点，且为第一类间断点，跳跃间断点.

小结：不连续点即为间断点，即 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 不成立的点，所以无论判断连续还是间断，都要求 $f(x_0)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，全相等则连续，不能全相等则不连续. 间断点分类的依据是左、右极限是否都存在，都存在则为第一类间断点，否则为第二类间断点.

例 9 当 $x\to 1$ 时，将下列无穷小量与 $x-1$ 进行比较.

（1）x^3-3x+2；（2）$\lg x$；（3）$(x-1)\sin\frac{1}{x-1}$.