普通高等院校“十三五”规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

主编◎李东方　李红武　陈晓婷

电子科技大学出版社
University of Electronic Science and Technology of China Press

普通高等院校“十三五”规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

主编◎李东方　李红武　陈晓婷

电子科技大学出版社
University of Electronic Science and Technology of China Press

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 李东方，李红武，陈晓婷主编.-- 成都：电子科技大学出版社，2018.1
ISBN 978-7-5647-5652-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… ②李… ③陈… Ⅲ. ①高等数学 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 019947 号

高等数学

李东方，李红武，陈晓婷　主编

策划编辑　汤云辉
责任编辑　汤云辉

出版发行　电子科技大学出版社
　　　　　成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦九楼　邮编 610051
主　　页　www.uestcp.com.cn
服务电话　028-83203399
邮购电话　028-83201495

印　　刷　三河市海新印务有限公司
成品尺寸　185mm×260mm
印　　张　16.5
字　　数　406 千字
版　　次　2018 年 1 月第 1 版
印　　次　2018 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5647-5652-9
定　　价　41.00 元

前　言

经过多年的教学改革实践，随着高等院校本科教学质量工程的推进及工科通识教育类课程的要求，对高等数学的教学提出了更高的目标.为满足新形势下培养高素质工科专门人才所必须具有的微积分知识的实际需要，迫切需要编写新的微积分教材以适应工科大类分类教学的要求.本书是编者在多年教学的基础上，按照突出数学思想和数学方法、淡化运算技巧、强调应用实例的原则，在经典教材的理论框架下编写而成.同时，从对学生的"知识贡献、能力贡献、素质贡献"出发，精心设计和安排了教材的内容体系和框架，以突出"培养创新精神和应用能力为核心"的指导思想.从而为工科类，尤其是电子信息类各专业的学生奠定更加牢固的数学基础，以适应新形势下国家和社会的需要.

为了更好地满足当前理工类各专业对微积分的实际需求及配合相关专业课程教学，提高学生应用数学知识解决实际问题的能力，我们以教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的新的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"为依据，以"必需、够用"为原则确定内容和深度，在知识点的覆盖面与"基本要求"相一致的基础上，力求将电子信息类各专业的相关应用实例融入高等数学的教材中，培养学生应用数学知识解决专业实际问题的能力.

本书的特色主要体现在以下三个方面.

1. 内容编排新颖，对高等数学教材的内容进行了较大幅度的调整.

2. 鉴于工科电子信息类各专业对微积分的实际需求，选取了大量例题和习题，将数学建模思想和数学在工程技术中的应用贯穿始终，以培养学生运用数学知识提出问题、分析问题和解决问题的能力.

3. 面对高等教育大众化的现实，同时兼顾学生的可接受性及与中学数学教学的衔接，适当降低了部分内容的深度和广度的要求，特别是淡化了各种运算技巧，但提高了数学思想和数学应用方面的要求.

本书共十章内容，其中包括：函数，数列、函数的极限，函数的连续性，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，简单微分方程，向量与空间解析几何初步，多元函数的微分及其应用.

本书在编写的过程中参考了大量的文献资料，在此，我们向有关文献的作者表示诚挚的谢意。

由于编写时间仓促，加之编者水平有限，书中疏漏与不当之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

2017年7月

目　录

第1章　函　　数

高等数学的一个主要部分是微积分. 微积分的研究对象是函数,它的任务是通过对函数的研究来认识事物的变化和运动,从而为解决生产实践中的问题提供有力的工具.

本章首先通过实例引入变量和函数的概念,并重点阐述函数概念所包含的三个内容,即函数的定义域、对应规律和函数值;其次,介绍建立函数关系的基本方法.

学习微积分应运用"运动变化"、"相互联系"的观点去理解函数概念的实质和学会函数关系式的建立,这在以后各章中,对学习导数、微分、积分等内容都是很重要的.

1.1　常量和变量

我们知道,客观世界的一切事物,总是处于不断地变化、运动和发展过程中. 我们要认识某一事物,只能从它的量和质的变化中去考察. 因此,通过事物的量的变化来帮助人们认识事物的质的变化不仅是可能的,而且是必要的. 例如,在化学中,一氧化碳 CO 和二氧化碳 CO_2,虽然都是由 C 和 O 两种元素合成,但它们所含的 O 的个数不同,即存在量的差别,因此,它们是完全不同的东西,CO 有毒,CO_2 无毒. 又如,在研究二次方程

$$ax^2 + 6x + c = 0\ (a \neq 0)$$

的根时,如果它的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 发生量的变化,由正变为负,则方程的两个根就要发生质的变化,由实根变为虚根.

在生产实践中,我们时常遇到各种各样的量,例如,河道中的水位,输水管道中的水流的速度,输电线中的电流,等等,这些量在一般情况下都在不断地变化着. 为了从数量上描述事物的运动和变化,我们引入变量的概念:如果有一个量,它在某一个过程中,可以取不同的值,这个量就叫作**变量**. 例如,某地区一天 24h 的温度 T 随时间变化,T 是一个变量.

与此相反,当我们在某些具体场合下研究问题时,把某些量看作相对静止的、不变的,即在一个过程中,始终保持同一数值的量叫作**常量**. 例如,自由落体过程中,物体下落的距离 s 与时间 t 的关系为 $s = \frac{1}{2}gt^2$,其中 $g = 9.8\text{m/s}^2$ 是重力加速度,它在某一个地区是一个常量.

一个量是常量还是变量,是由讨论的问题确定的. 同一个量在某些情况下是常量,而在另一种情况下就可能成为变量;有时,如果有些量的变化微不足道,对所考察的问题影响很小,那么,我们往往把这些量也看作常量. 这对简化问题或问题的解决来说,都是有益的. 所

以一个量看成是常量还是变量,要根据具体情况做具体分析.

习 题 1.1

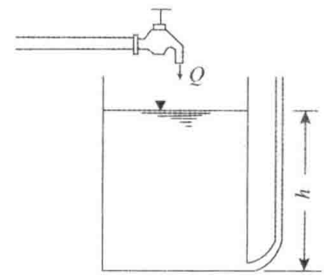

图 1-1

什么叫变量? 什么叫常量? 试回答下面问题.

(1) 火车在直线行驶过程中,可以近似看成匀加速运动. 在这一过程中,火车驶过的路程 s、其速度 v 和加速度 a 哪些是常量? 哪些是变量?

(2) 在建筑工地上,从自来水管中流出的水注入一底面为正方形的棱柱形水箱中(图 1-1). 在水流注入过程中,箱中水的体积 V、水深 h 和底面积 A 哪些是常量? 哪些是变量?

1.2 函 数

反映客观事物变化的量 —— 变量,它的变化并不是孤立的,它总是和另一些变量的变化相互联系、相互制约的. 在数量上,就是用函数关系来表达变量与变量之间的依赖关系.

例 1-1 打桩机的桩锤从高处自由下落过程中,下落的距离 s 与时间 t 都是变量,这两个变量的变化并不是孤立的,而是相互依赖的. 自由落体从高处下落的距离 s 随着下落的时间 t 而变化,其变化规律是

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

式中,g 为重力加速度,$g = 9.8\text{m/s}^2$.

根据这个规律,对于下落过程中每一个确定的时刻 t,就能算出相应的下落的距离 s. 例如,当 $t = 0.5\text{s}$ 时,$s = \frac{1}{2} \times 9.8 \times (0.5)^2 = 1.225\text{m}$;当 $t = 1\text{s}$ 时,$s = \frac{1}{2} \times 9.8 \times (1)^2 = 4.9\text{m}$.

例 1-2 一天中的气温 T 和时间 t 都是变量,而气温 T 随时间 t 一起变化,它们的变化规律可由温度自动记录仪记录下来. 图 1-2 就是气象站用温度自动记录仪记录的一昼夜温度变化曲线,它形象地表示了气温 T 随时间 t 的变化规律:对每一个确定的时刻 t,就有一个确定的温度 T 与它对应. 例如,当 $t = 13\text{h}$ 时,气温 $T = 22℃$.

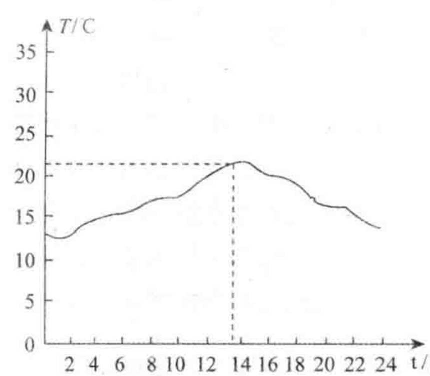

图 1-2

现在,我们来考察上述两个例子. 在例 1-1 中,距离 s 与时间 t 都是变量,它们之间存在着一个用公式表达的对应关系,当 t 取定一个确定的时刻,依照这个公式,s 的值随之确定;在例 1-2 中,温度 T 和时间 t 都是变量,它们之间存在着一个用图形表达的对应关系,当时间 t 取定一个确定的时刻,从图形上可以得到温度 T 的对应值.

类似上述关于变量之间的相互依赖关系的例子很多,尽管它们所包含的具体意义及变量之间的相互依赖关系及其表达形式各不相同,但通过上述例子,不难概括出下面这些共同特征.

(1) 在某一变化过程中都包含两个变量和确定的对应关系,尽管这个对应关系的表达形式各有不同,但它明确指出这两个变量相互联系、相互制约的具体内容. 也就是说,当其中一个变量取定了一个确定的值时,另一个变量按照一定规律(即对应关系),总是有确定的值和它对应. 我们把前一个变量叫作**自变量**;另一个通过对应关系而确定的变量,叫作**因变量**.

必须注意,某一现象中,哪个变量是自变量或因变量并不是绝对的. 例如在圆面积公式

$$A = \pi R^2$$

中指出了当圆的半径改变时,圆面积 A 与半径 R 之间的依赖关系. 这里半径 R 和圆面积 A 都是变量,半径 R 是自变量,圆面积 A 是因变量. 但如果我们把圆面积 A 作为自变量,那么圆的半径 R 就是因变量,此时

$$R = \sqrt{\frac{A}{\pi}}.$$

(2) 我们还发现,自变量与因变量之间的相互依赖关系中,自变量只能在一定范围内变化,否则两者之间的相互依赖关系不再成立,或者自变量本身是没有实际意义的. 例如,圆面积 $A = \pi R^2$ 中的半径 R 改变时就不允许取负值,因为负的半径是没有实际意义的. 又如,在例 1-1 中,打桩机的桩锤自由下落时间 t,也只有对桩锤抵达桩顶以前这一段时间而言,$s = \frac{1}{2}gt^2$ 才能成立,否则如果桩锤已与桩顶接触,此后,桩锤的状态已不是由自由落体运动的规律所能描述的了. 概括以上所述的这种变量之间的相互依赖关系,就可以抽象出如下的函数定义.

定义　设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y,如果对于在某个范围内变化的变量 x 取得的每一个值,按照一定规律,变量 y 总有确定的对应值,这时就称变量 y 是变量 x 的函数. 并可表达如下:

$$y = f(x). \tag{1-1}$$

其中,x 叫作自变量,y 叫作因变量(或函数),f 是表达函数关系(对应规律)的一种符号;自变量 x 所能取得值的全体(即变化范围)称为这个函数的**定义域**;而函数相应于其定义域所能取得值的全体,称为这个函数的**值域**.

反之,若将 y 当作自变量,x 当作函数,则由上述关系确定的函数

$$x = \varphi(y) \tag{1-2}$$

叫作函数 $y = f(x)$ 的反函数,$y = f(x)$ 叫作直接函数.

在同一坐标系中,式(1-1) 和式(1-2) 表示同一图形:在式(1-1) 中,x 是自变量,y 是函数;在式(1-2) 中,y 是自变量,x 是函数. 但习惯上把 x 当作自变量,y 当作函数,因此在式(1-2) 中将 x 改写为 y,将 y 改写为 x,则式(1-1) 的反函数的形式为

$$y = \varphi(x).$$

这时,x 是自变量,y 是函数. 反函数的定义域与值域分别是直接函数的值域和定义域.

1.3 关于函数的几点说明

在上节最后概括出来的函数定义中,包含三个内容:一是函数的定义域,即自变量 x 的变化范围;二是对应规律,即因变量依赖自变量的变化规律;三是函数值,即自变量取得的每一个值,因变量有确定的对应值. 下面我们再分别对它们作进一步说明.

1.3.1 函数的定义域

前面已经说过,在表达因变量 y 与自变量 x 之间对应规律的函数关系中,自变量 x 的变化有它的取值范围. 所谓函数的定义域,就是函数有意义的自变量的取值范围. 也就是说,只有当自变量在函数的定义域中取值时,因变量才有确定的对应值,即函数才有意义. 例 1-1 中打桩机的桩锤自由下落到桩顶时间为 10s,则函数的定义域就是 $0 \leqslant t \leqslant 10\text{s}$;如果时间 t 在这个范围以外取值,例如,$t = 12\text{s}$,这时桩锤早已在桩顶上甚至静止不动了,此时若用桩锤自由下落规律 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 去计算下落距离(因变量)s 的对应值是无意义的.

所以在实际问题中,函数的定义域是根据函数关系所反映的客观事物的实际意义来确定的.

但是数学上,我们讨论的函数仅写出它的数学算式,而不考虑它的实际意义. 这时,我们约定,函数的定义域就是使数学算式有意义的自变量的变化范围. 于是函数的定义域便可直接从表达函数的数学算式本身来确定,如函数

$$y = \frac{5}{x-3}$$

的定义域是使分母不为零的全体 x,即 $x - 3 \neq 0$ 或 $x \neq 3$,即除了 $x = 3$ 以外的一切实数,记作 $-\infty < x < 3$ 和 $3 < x < +\infty$($+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作正无穷和负无穷,它们不是数,仅仅是记号).

为了简便起见,通常还用“区间”来表示函数的定义域. 如果变量 x 的变化范围是 $a \leqslant x \leqslant b$,我们就说变量 x 的变化范围是闭区间,记作 $[a,b]$;如果变量 x 的变化范围是 $a < x < b$,我们就说变量 x 的变化范围是开区间,记作 (a,b). 闭区间和开区间的区别是闭区间包含区间的两个端点,而开区间不包含端点.还有一种区间叫无穷区间:如果 x 的变化范围是 $a \leqslant x < +\infty$,就说变量 x 的变化范围是无穷区间 $[a, +\infty)$;如果 x 的变化范围是 $-\infty < x < b$,就说变量 x 的变化范围是无穷区间 $(-\infty, b)$;如果 x 的变化范围是任何实数,即 $-\infty < x < +\infty$,就说变量 x 的变化范围是无穷区间 $(-\infty, +\infty)$. 上面前四种区间可以在数轴上表示出来,如图 1-3 所示. 把区间 $(-\infty, +\infty)$ 在数轴上表示出来,就是整个数轴. 例如,在例 1-2 中,$T = f(t)$ 的定义域为 $[0,24]$;$y = \frac{5}{x-3}$ 的定义域为两个无穷区间 $(-\infty, 3)$ 和 $(3, +\infty)$.

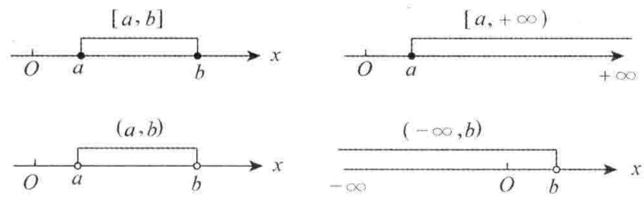

图 1-3

例 1-3 半径为 r、圆心为原点 O 的圆方程是 $x^2+y^2=r^2$，或写为 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$，它表示圆上的点的横坐标 x 与纵坐标 y 之间的依赖关系. 当 $x^2\leqslant r^2$ 时，y 有一个或两个数值与之对应，所以 y 是变量 x 的函数，它的定义域是闭区间 $[-r,r]$.

例 1-4 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$；(2) $y=\sqrt{1-x^2}$；(3) $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}$.

解 (1) 对于函数 $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$，只有当 $x=1$ 时，分母为零，y 才没有确定的对应值，即函数没有意义. 因此，函数的定义域为 $x\neq 1$ 的所有实数，或记作 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$.

(2) 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，在实数范围内，只有当 $1-x^2\geqslant 0$ 时，根式才有意义，即函数的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$，或记作 $[-1,1]$.

(3) 函数 $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}$ 的定义域为两个函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=\sqrt{x}$ 定义域的公共部分. $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=\sqrt{x}$ 的定义域分别是 $-1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant +\infty$. 所以函数的定义域为 $0\leqslant x\leqslant 1$，或记作 $[0,1]$.

1.3.2 对应规律和函数值

对应规律是因变量 y 和自变量 x 依赖关系（即函数关系）的具体表现，它是函数定义中最本质的要素.

函数 $y=f(x)$ 中的记号 f，代表变量 y 和变量 x 的对应规律. $f(x)$ 是一个完整记号，不可误解为相乘，正如 $\sin x$ 不可看作 sin 乘 x 一样. 至于这种对应规律究竟是一种什么具体关系，则完全由问题所决定. 如例 1-1 中下落距离 s 是时间 t 的函数，用 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 所规定的对应关系：自变量 t 取桩锤自由下落过程中的某一时刻时，就可用公式 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 求得相应下落距离. 又如例 1-2 中气温 T 是 t 的函数，记为 $T=f(t)$，这里的记号"f"代表图 1-2 中曲线所规定的对应关系，自变量 t 作为横坐标，由此便可找到曲线上对应点的纵坐标，即气温 T.

当自变量 x 取一定值 x_0 时，对应的函数所取的值，叫作函数值. 例如，函数 $y=2x^2+5x+1$，用记号 $y=f(x)$ 表示时，有 $f(x)=2x^2+5x+1$，这时，记号"f"表示对应的函数值 y 是由括号内自变量 x 经过 $2(\ )^2+5(\ )+1$ 运算得到的.

当自变量 x 取一定值 x_0 时，对应的函数值用 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 表示. 例如，对函数 $f(x)=2x^2+5x+1$ 来说，当 $x=0$ 时，$f(x)=2(0)^2+5(0)+1=1$；当 $x=1$ 时，$f(x)=2(1)^2+5(1)+1=$

8;当 $x=-2$ 时,$f(x)=2(-2)^2+5(-2)+1=-1$;当 $x=x_0$ 时,$f(x)=2(x_0)^2+5(x_0)+1$.由此看来,在定义域中取 x_0 代替 $f(x)$ 中的 x,就得到 $y=f(x)$ 在一点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$.

例 1-5　求函数 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$ 在 $x=0,x=-1,x=x_0,x=x_0+h$ 各点的函数值.

解　$f(0)=\dfrac{2\times0-1}{0^2+1}=-1$;

$$f(-1)=\frac{2\times(-1)-1}{(-1)^2+1}=-\frac{3}{2};$$

$$f(x_0)=\frac{2x_0-1}{x_0^2+1};$$

$$f(x_0+h)=\frac{2(x_0+h)-1}{(x_0+h)^2+1}=\frac{2x_0+2h-1}{x_0^2+2hx_0+h^2+1}.$$

在同一个问题中,如果要同时讨论几个不同的函数,为了避免混淆,要用不同的函数记号来表示. 例如,如果我们要同时讨论两个不同的函数 $y=x^3$ 和 $y=\dfrac{1}{x+1}$ 时,不妨分别记为 $f(x)=x^3$ 和 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

有时为了方便起见,也用记号 $y=y(x)$,$u=u(x)$,$v=v(x)$ 来表示函数,这里,$y=y(\quad)$,$u=u(\quad)$,$v=v(\quad)$ 表示对应规律.

顺便指出,在上述函数的定义中,并不要求自变量变动时,函数的对应值也一定要变动,重要的一点是:当自变量 x 在函数的定义域取得一个任意数值时,函数有确定的对应值. 因此,完全不变的量,我们可以把它当作函数看待. 换句话说,常量也看作函数,即常量是这样的一个函数:对于自变量的一切值来说,这个函数的值都是相等的.

习题　1.3

1.在例 1-1 中,打桩机的桩锤自由下落规律是 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$,如果桩锤从高度 H 处落到桩顶,问:函数的定义域是什么?

2.求下列函数的定义域:

(1)$y=\dfrac{1}{x-1}$;　(2)$y=\sqrt{3x+2}$;　(3)$y=\dfrac{1}{x^2-1}$;

(4)$y=\sqrt{x^2-4}$;　(5)$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;　(6)$y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$;

(7)$y=\ln(x+1)$.

3.指出下列各式哪些不是函数关系,为什么?

(1)$y=x+1$;　(2)$y=3$;　(3)$x^2+y+1=0$;　(4)$x^2+y^2+1=0$.

4.若 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,求 $f(x)$.

5. 设 $y=\frac{1}{2x}f(t-x)$，当 $x=1$ 时，$y=\frac{1}{2}t^2-t+5$，求 $f(x)$.

6. 设函数 $y=\sqrt{x^2+4}$，求函数 $y|_{x=0}$，$y|_{x=-1}$，$y|_{x=x_0+1}$ 的值.

7. (1) 已知 $\Phi(x)=\log_a x$，证明 $\Phi(x)+\Phi(x+1)=\Phi[x(x+1)]$.

(2) 已知 $F(z)=a^z$，证明 $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$.

8. 已知交流电的电压 u 随时间 t 的规律为 $u(t)=U_0\sin\omega t$（U_0，ω 为常量），求 $t=0$，$t=\frac{\pi}{2\omega}$，$t=\frac{\pi}{\omega}$，$t=\frac{3\pi}{2\omega}$，$t=\frac{2\pi}{\omega}$ 时的电压 u.

1.4 函数的表示方法

1.4.1 函数的三种表示方法

表达函数的方法通常有公式法、列表法和图示法三种.

(1) 公式法。例 1-1、例 1-4 等都是用数学式的形式来表达自变量和因变量之间对应关系，这种方法称为**公式法**. 其优点是简单准确，便于分析与计算，但不够直观. 有些实际问题遇到的函数关系，很难用公式法表示，往往采用列表法或图示法表示.

(2) 列表法。工程实践中，变量之间的函数关系有时是以列表的形式表示出来的，平时所用的三角函数表、对数表等，都是列表法表示函数的例子. 列表法的优点是给定了自变量的数值后，可以直接查到因变量的对应值（即函数值），但表中的数据往往不完全，同时也不便于理论分析.

(3) 图示法。工程上也常常用几何图形 —— 平面直角坐标系上的一条曲线，表示两个变量之间的函数关系，这种表示方法称为**图示法**，如例 1-2. 图示法的优点是鲜明直观，能看出函数变化趋势，可启发我们推断出函数的某些性质，是研究函数时的重要辅助工具.

今后我们主要用公式法表示函数，并借助其他两种方法对函数进行分析研究. 例如，函数 $y=\sqrt{x}$ 是用公式法表示的，我们可以在其定义域内作出表 1-1 所示的函数表，然后依次在平面直角坐标系：xOy 上描出相应的点 (x,y)，再将所得各点连成一条曲线，就得到函数 $y=\sqrt{x}$ 的图像（图 1-4）. 这个图像帮助我们直观地了解函数 $y=\sqrt{x}$ 变化情况.

表 1-1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
$\sqrt{x}$	0	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45	2.65	2.83	…

一般地，对于函数 $y=f(x)$，在其定义域内，每取一个 x 值时就可得到确定的对应值 y，以这一对 x，y 值为坐标，在平面直角坐标系 xOy 中定出一个点 $M(x,y)$，当 x，y 变化时，M 点就在

平面上移动,并描出一条曲线(图 1-5),这条曲线即为函数 $y=f(x)$ 的图形.

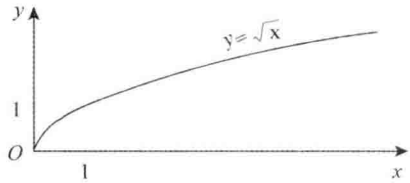

图 1-4

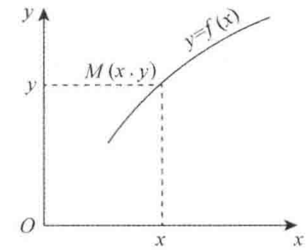

图 1-5

1.4.2 分段函数

但是,在工程实践中有些问题,当用公式法表示函数时,对于自变量的一切值不一定用一个关系式就可以把它们表示出来的,可能会遇到这种情况:对于自变量的某一部分数值,用一个关系式来表示;对于自变量的另一部分数值,用另一个关系式来表示. 也就是说,在自变量的不同变化范围内,它指明了因变量与自变量之间的不同变化规律,即函数用不同的式子分段表示出来,这样的函数叫作**分段函数**.

分段函数的定义域是各个定义域的并集.

例如,函数 $y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+1 & x>1\end{cases}$ 及函数 $y=g(x)=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$ 都是分段函数,它们的定义域分别是 $[0,1]\cup(1,+\infty)=[0,+\infty)$ 和 $(-\infty,+\infty)$.

分段函数的函数值按不同区间的对应关系求得,例如在上面的函数中,$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$,$f(\mathrm{e})=\mathrm{e}+1$,$g(-\pi)=\pi$……

习 题 1.4

1. 列表绘制函数 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 的图形.

2. 绘制函数 $|x|+|y|=1$ 的图形.

3. 图 1-6 是自动水位记录仪在坐标纸上记录的某城市河道一天内潮水水位变化的曲线图,其中横坐标为时刻 t,纵坐标为水位 H. 试从图上查取表 1-2 所列各时刻的潮水位和最高、最低潮水位,并记录在表 1-2 中.

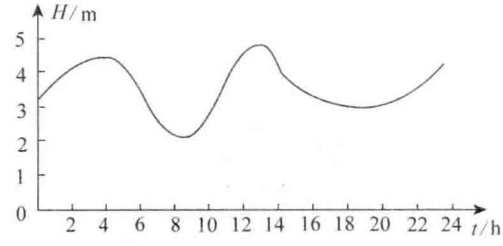

图 1-6

表 1-2

时刻 t	0	4	8	12	16	20	24	最高潮水位	最低潮水位
水位 H									

1.5 函数关系的建立

运用数学工具解决实际问题时,通常要找出问题中变量之间的函数关系,用数学公式把它表示出来,然后进行分析与计算.由于实际问题各不相同,所以建立函数关系也没有一个统一的方法.我们必须遵循对具体的事物进行具体分析的原则,分析实际问题中的数量关系,确定自变量和因变量,并用字母表示出来;再根据问题中给出的条件,运用数学、物理和力学等方面的知识,列出函数关系式.下面通过若干实例,说明建立函数关系的过程.

例 1-6 图 1-7 所示为一长度 l 的供水管道,每单位长度连续泄出流量 q,设管道进口处流入的流量为 Q_0,求距管道进口处为 x 的管道横断面上通过的流量.

解 设距管道进口处为 x 的管道横断面上通过的流量为 Q_T,则

$$Q_T = Q_0 - qx$$

就是 Q_T 与距离 x 之间的函数关系,其定义域为 $0 \leqslant x \leqslant l$.

例 1-7 设有质量为 m 的物体,以初速度 v_0 铅直向上抛出(图 1-8).如果忽略空气阻力,试将物体动能表示成时间的函数.

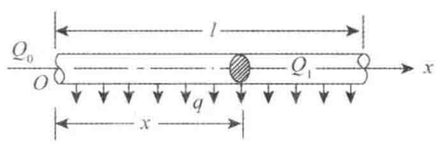

图 1-7

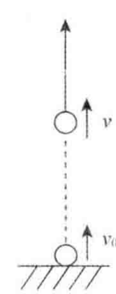

图 1-8

解 设物体的质量为 m、速度为 v,由物理学可知,物体的动能 E 为

$$E = \frac{1}{2}mv^2, \tag{1 - 3}$$

即上抛过程中物体的动能 E 是速度 v 的函数.

因为在忽略空气阻力假定下,物体竖直上抛过程中的速度 v 又是时间 t 的函数,即

$$v = v_0 - gt. \tag{1 - 4}$$

式中,g 为重力加速度.

将式(1 - 4)代入式(1 - 3),便得到物体动能和时间 t 的函数关系为

$$E = \frac{1}{2}m(v_0 - gt)^2. \tag{1 - 5}$$

由于上抛到最高点时,物体的速度 v 变为零.因此,上抛过程所需的全部时间可由 $v = 0$ 求出,即式(1 - 4)变为 $0 = v_0 - gt$,得 $t = \frac{v_0}{g}$.从而确定函数的定义域为 $0 \leqslant t \leqslant \frac{v_0}{g}$.