义务教育初级中学课本(试用)

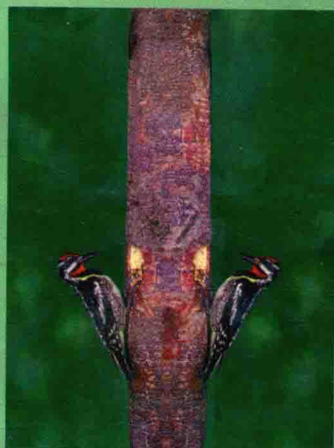
数学

第三册

浙江教育出版社

ISBN 7-5338-2953-0

9 787533 829537 >



义务教育初级中学课本(试用)

数　学

第三册

浙江教育出版社出版

浙江省出版公司重印

浙江淳安印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本 850×1168　1/32　印张 6.375　字数 138 000

1998 年 3 月第 3 版　1998 年 4 月第 7 次印刷

ISBN 7－5338－2953－0/G·2930　定价：6.65 元

目　录

Wong

第九章　三角形

前面我们学过用直尺和圆规画角的平分线和线段的中垂线，为什么那样的画法是正确的呢？

如果你画一个边长分别是 3 cm，4 cm，5 cm 的三角形，那么这个三角形一定是直角三角形，这里的依据又是什么呢？

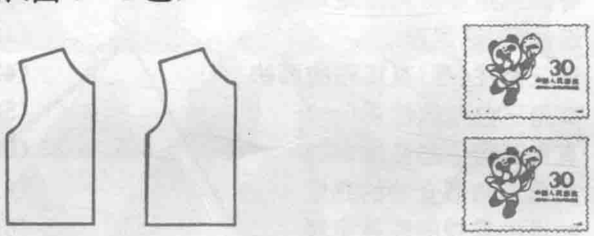
要解决这些问题，就需要进一步学习有关三角形及其推理论证方面的知识.

本章将学习全等三角形、等腰三角形和直角三角形的有关知识，学习简单的推理论证知识.

一　全等三角形

9.1　全等三角形

观察图 9—1 的两组图形：两块衣片（图 9—1 甲）和两张邮票（图 9—1 乙）.



甲　　乙

图 9—1

可以发现，它们都有一个共同的特点，就是每组里的两个图形的形状和大小都一样. 如果把同组的两个图形叠在

一起，这两个图形就能够完全重合.

能够完全重合的两个图形叫做**全等图形**.

在两张透明的绘图纸上，如果分别画两个边长都是 3 cm，2.4cm，1.5 cm 的三角形$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$（图 9—2），把它们叠在一起，那么它们就能够互相重合. 我们把能够互相重合的两个三角形叫做**全等三角形**.

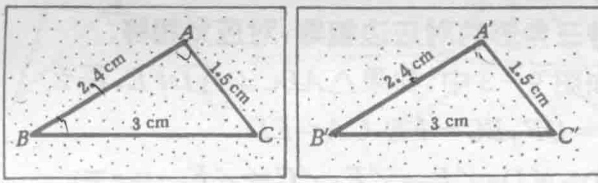


图 9—2

两个全等三角形重合时，互相重合的顶点叫做全等三角形的**对应顶点**，互相重合的边叫做全等三角形的**对应边**，互相重合的角叫做全等三角形的**对应角**. 图 9—2 中，A 和 A'，B 和 B'，C 和 C' 是对应顶点；BC 和 $B'C'$，CA 和 $C'A'$，AB 和 $A'B'$ 是对应边；$\angle A$ 和 $\angle A'$，$\angle B$ 和 $\angle B'$，$\angle C$ 和 $\angle C'$ 是对应角. 全等三角形对应边所对的角是对应角，对应角所对的边是对应边.

"全等"可用符号"$\cong$"来表示. 如$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$全等，就记作"$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$"，读作"三角形 ABC 全等于三角形 $A'B'C'$".

注意 记两个三角形全等时，通常把表示对应顶点的字母写在对应位置上. 例如，图 9—3 中的两个三角形全等，点 A 与点 D，点 B 与点 F，点 C 与点 E 是对应顶点，记作

$\triangle ABC \cong \triangle DFE$.

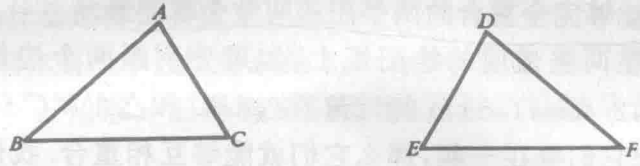


图 9－3

全等三角形有以下的性质：

全等三角形的对应边相等，对应角相等.

例如图 9－3 中，如果$\triangle ABC \cong \triangle DFE$，那么

$AB=DF, BC=FE, CA=ED$,

$\angle A=\angle D, \angle B=\angle F, \angle C=\angle E$.

例 如图 9－4，图中的两个三角形全等，A 和 B，C 和 D 是对应顶点.

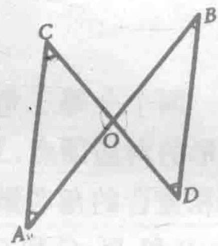


图 9－4

(1) 用符号表示这两个三角形全等；

(2) 写出它们的对应角、对应边；

(3) 用等号表示各对应角、各对应边之间的关系.

解：(1) $\triangle AOC \cong \triangle BOD$；

(2) $\angle A$ 和 $\angle B$，$\angle C$ 和 $\angle D$，$\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 是对应角；CO 和 DO，AO 和 BO，AC 和 BD 是对应边；

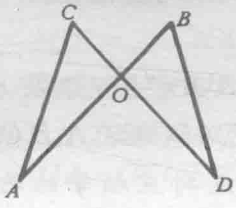
(3) $\angle A=\angle B, \angle C=\angle D, \angle AOC=\angle BOD$；

$CO=DO, AO=BO, AC=BD$.

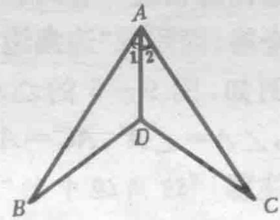
练习

1. 半径相等的两个圆是全等图形吗？验证一下你的判断.

2. （口答）如图，$\triangle OCA \cong \triangle OBD$，说出它们对应相等的角和边.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图的两个三角形全等，$\angle 1=\angle 2$，$AB=AC$，写出它们的对应角和对应边.

想一想

你能找出图中全等的"鱼"图吗？

9.2 三角形全等的判定公理 1

在两张透明的绘图纸上分别画$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$（图 9—5），使 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$\angle BAC=\angle B'A'C'$.

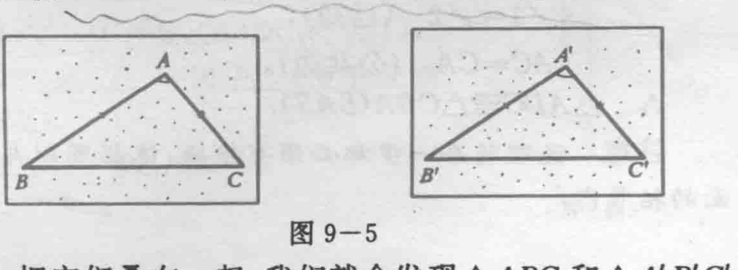


图 9—5

然后，把它们叠在一起，我们就会发现$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$

能够互相重合，也就是$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

再画几个试试，我们发现只要是两边和它们的夹角对应相等的两个三角形，它们都全等.

我们把上面的事实作为判定三角形全等的一个公理.

边角边公理　有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等（简写成“**边角边**”或“**SAS**”）.

例如，图 9－5 的$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，如果$AB=A'B'$，$\angle A=\angle A'$，$AC=A'C'$，那么$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

注意　边角边中的“角”，必须是对应相等的两边的夹角.

例 1　如图 9－6，已知$AD=CB$，$\angle 1=\angle 2$. 说出$\triangle ADC \cong \triangle CBA$的理由.

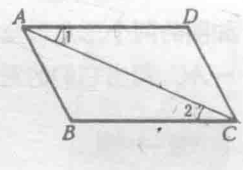


图 9－6

解：　已知$AD=CB$，$\angle 1=\angle 2$，AC是公共边，$AC=CA$. 根据边角边公理，$\triangle ADC \cong \triangle CBA$.

上面的说理过程，可以表述成：

在$\triangle ADC$和$\triangle CBA$中，

$$\begin{cases} AD=CB & \text{（已知），} \\ \angle 1=\angle 2 & \text{（已知），} \\ AC=CA & \text{（公共边），} \end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle ADC \cong \triangle CBA$（$SAS$）.

注意　说理的每一步都必须有依据，依据可以写在后面的括号内.

例 2　如图 9－7，已知 AC 与 BD 相交于点 O，$OA=OC$，$OB=OD$. 说出$\triangle AOB\cong\triangle COD$ 的理由.

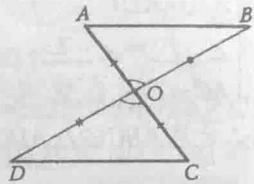


图 9－7

解：已知 $OA=OC$，$OB=OD$，因为$\angle AOB$ 和$\angle COD$ 是对顶角，所以$\angle AOB=\angle COD$. 根据边角边公理，$\triangle AOB\cong\triangle COD$.

在$\triangle AOB$ 和$\triangle COD$ 中，

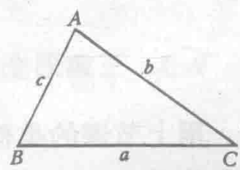
$$\begin{cases} OA=OC（已知），\\ \angle AOB=\angle COD（对顶角相等），\\ OB=OD（已知），\end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle AOB\cong\triangle COD(SAS)$.

练习

1. 填空：

如图，a，b，c 分别表示$\triangle ABC$ 的三边，那么 a，b 的夹角是 ∠C ；b，c 的夹角是 ∠A ；$\angle B$ 是 c 和 a 的夹角.



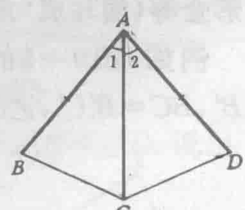
（第 1 题）

2. 如图，$AB=AD$，AC 平分$\angle BAD$. 说出$\triangle ABC\cong\triangle ADC$ 的理由（填空）.

解：$\because$　AC 平分$\angle BAD$（ 已知 ），

$\therefore$　$\angle$ 1 $=\angle$ 2 （角平分线定义）.

在$\triangle ABC$ 和$\triangle ADC$ 中，



（第 2 题）

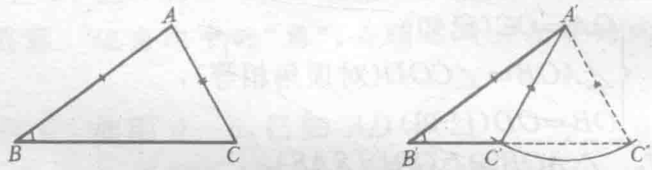
$$
\begin{cases}
AB=AD(\text{已知}),\\
\angle\underline{\ 1\ }=\angle\underline{\ 2\ },\\
AC=\underline{CA}(\text{公共边}),
\end{cases}
$$

ACA

$\therefore\ \triangle ABC\cong\triangle ADC($ SAS $)$.

想一想

能否把边角边公理说成“有两边和一角对应相等的两个三角形全等”？（结合图形回答）



9.3　三角形全等的判定公理 2

用上节课的类似方法就可以得到判定三角形全等的第二个公理．

角边角公理　有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等（简写成“**角边角**”或“***ASA***”）．

例如，图 9－8 的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，如果 $\angle B=\angle B'$，$BC=B'C'$，$\angle C=\angle C'$，那么 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$．

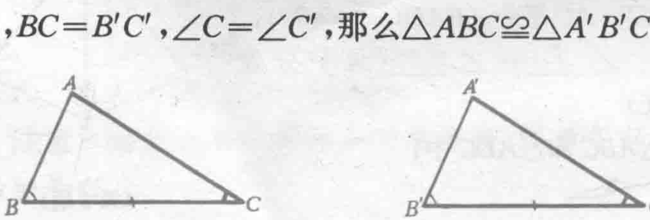


图 9－8

如果把这个问题的条件改为$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$BC=B'C'$，这两个三角形还能够全等吗？

事实上，由三角形的内角和等于180°，可知$\angle C=\angle C'$，于是由角边角公理可得$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$．即有以下推论：

有两个角和其中一角的对边对应相等的两个三角形全等(简写成“**角角边**”或“***AAS***”)．

例1 如图9－9，已知$AB=AC$，$\angle B=\angle C$，说出$\triangle ABD\cong\triangle ACE$的理由．

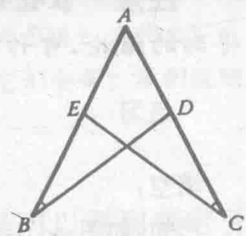


图9－9

分析：已知$AB=AC$，$\angle B=\angle C$，再由图形容易发现$\angle A$是这两个三角形的公共角，由角边角公理即可判定$\triangle ABD\cong\triangle ACE$．

解：在$\triangle ABD$和$\triangle ACE$中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle C & \text{（已知）}，\\ AB=AC & \text{（已知）}，\\ \angle A=\angle A & \text{（公共角）}，\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACE(ASA)$．

问：图9－9中，$BD=CE$吗？为什么？

例2 如图9－10，已知$\angle 1=\angle 2$，$\angle B=\angle D$．说出下列判断成立的理由：

(1) $\triangle ABC\cong\triangle ADC$；

(2) $AB=AD$．

解：(1) 在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中，

$$\begin{cases}\angle 1=\angle 2 & (\text{已知}),\\ \angle B=\angle D & (\text{已知}),\\ AC=AC & (\text{公共边}),\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle ADC(AAS)$.

(2) ∵ $\triangle ABC\cong\triangle ADC$,

∴ $AB=AD$(全等三角形的对应边相等).

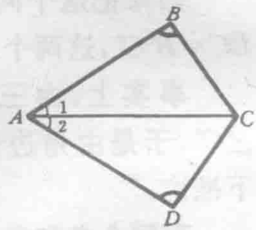


图 9—10

注意 在说理过程中，上一步得到的结论，可作为下一步说理的依据.

练习

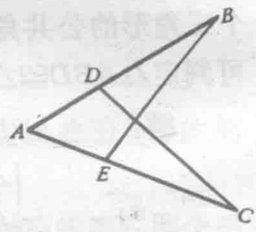
填空：

1. 已知：如图，$\angle B=\angle C$，$AD=AE$. 说出$\triangle ABE\cong\triangle ACD$的理由.

解：在$\triangle ABE$和$\triangle ACD$中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle \underline{C}(\text{已知}),\\ \angle A=\angle \underline{A}(\text{公共角}),\\ AE=\underline{AD}(\text{已知}),\end{cases}$$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle ACD$(AAS)



(第 1 题)

2. 已知：如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

说出下列判断成立的理由：

(1) $\triangle ABD\cong\triangle ABC$；　(2) $AD=AC$.

解：(1) ∵ $\angle 3=\angle 4$(已知)，

∴ $\angle ABC=\angle ABD$(等角的补角相等).

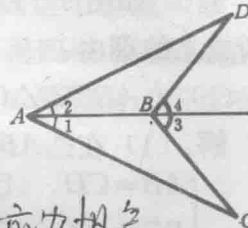
在$\triangle ABC$和$\triangle ABD$中，

$$\begin{cases}\angle 1=\angle 2(\text{已知}), \\ AB=AB(\text{公共边}), \\ \angle 3=\angle 4,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC \cong \triangle ABD$(ASA).

(2) ∵ $\triangle ABC \cong \triangle ABD$,

∴ $AC=$ AD (全等三角形对应边相等



(第 2 题)

想一想

1. 有一个锐角和斜边对应相等的两个直角三角形是否全等？有一个锐角和一条直角边相等的两个直角三角形呢？为什么？
2. 三个角对应相等的两个三角形能否判定它们全等？举例说明.

9.4 三角形全等的判定公理 3

用类似 9.2 节的实验方法，我们还可以得到判定三角形全等的第三个公理：

边边边公理　有三边对应相等的两个三角形全等（简写成“**边边边**”或“*SSS*”）. 问角ss行吗

例如，图 9－11 的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，如果 $BC=B'C'$，$CA=C'A'$，$AB=A'B'$，那么 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

图 9—11

例 1 如图 9－12，已知 $AB=CD$，$BC=DA$. 说出下列判断成立的理由：

(1) $\triangle ABC\cong\triangle CDA$；　(2) $\angle B=\angle D$.

解：(1) 在$\triangle ABC$和$\triangle CDA$中，

$$\begin{cases}AB=CD & \text{（已知），}\\ BC=DA & \text{（已知），}\\ AC=CA & \text{（公共边），}\end{cases}$$

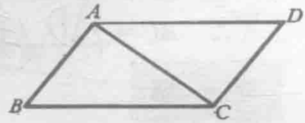


图 9－12

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle CDA(SSS)$.

(2) $\because$ $\triangle ABC\cong\triangle CDA$，

$\therefore$ $\angle B=\angle D$（全等三角形的对应角相等）.

例 2 图 9－13 是我们所熟悉的用圆规和直尺画已知角的平分线的示意图，说出该画法正确的理由.

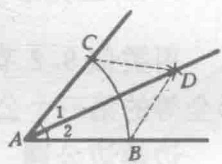


图 9－13

解：连结 BD，CD. 在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，

$$\begin{cases}AB=AC & \text{（画法），}\\ BD=CD & \text{（画法），}\\ AD=AD & \text{（公共边），}\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$ (SSS).

$\therefore$ $\angle 2=\angle 1$（全等三角形的对应角相等），

即 AD 平分$\angle BAC$.

由边边边公理可知，当三角形三边的长度固定，这个三角形的形状和大小就完全确定. 例如，取三根长度适当的木条，用钉子把它们钉成一个三角形框架（图 9－14），所得到

的框架形状和大小就固定了. 三角形的这个性质叫做三角形的稳定性，这是三角形特有的性质. 用四根木条钉成的框架，它的形状是可以改变的(图 9—15)，可见四边形没有这个性质.

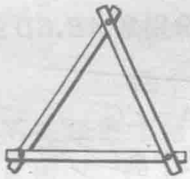


图 9—14

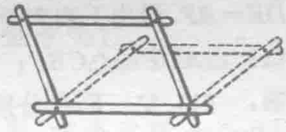


图 9—15

三角形的稳定性在生产和日常生活中有广泛的应用. 例如，房屋的人字架，大桥的钢梁，起重机的支架，都采用三角形结构，以起到稳固的作用(图 9—16).

图 9—16

练习

填空(第 1～2 题)：

1. 已知：如图，点 B,E,C,F 在同一直线上，$AB=DE$，$AC=DF$，$BE=CF$. 说出$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 的理由.

(第 1 题)

解：∵ $BE=CF$(已知)，

∴ $BE+EC=EC+CF$.

∴ $BC=EF$.

在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，

$$\begin{cases} AB = \underline{DE}\text{（已知）}, \\ \underline{AC} = DF\text{（已知）}, \\ BC = \underline{FE}, \end{cases}$$

∴ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$（SSS）.

2. 已知：如图，$AB=CD$，$AD=CB$，E，F分别是AB，CD的中点，且$DE=BF$. 说出下列判断成立的理由：

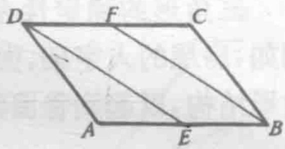
(1) $\triangle ADE \cong \triangle CBF$； (2) $\angle A=\angle C$.

解：(1) ∵ E，F分别是AB，CD的中点（已知），

∴ $AE=\frac{1}{2}AB$，$CF=\frac{1}{2}CD$（线段中点的定义）.

又∵ $AB=CD$（已知），

∴ $AE=CF$.



(第 2 题)

在$\triangle ADE$和$\triangle CBF$中，

$$\begin{cases} AE = \underline{CF}, \\ \underline{AB} = \underline{CD}\text{（已知）}, \\ \underline{AD} = \underline{CB}\text{（已知）}, \end{cases}$$

∴ $\triangle ADE \cong \triangle CBF$（SSS）.

(2) ∵ $\underline{\triangle ADE \cong \triangle CBF}$

∴ $\angle A=\angle C$（全等三角形对应角相等

3. 举出一些应用三角形稳定性的实例.

想一想

如图，四边形$ABCD$中，$AB=CD$，$AD=CB$. 你能通过添画线段，把它分成两个全等三角形吗？有几种添法？