名品

高等院校精品课系列教材

高等院校经济数学系列教材

Probability Theory Exercises Set

概率论习题集

第二版

何其祥 主编

随书赠送

上海财经大学出版社

本书由上海财经大学浙江学院发展基金资助出版

高等院校精品课系列教材
高等院校经济数学系列教材

概率论习题集

（第二版）

何其祥　主编

上海财经大学出版社

目 录

第一章

随机事件与概率

§ 1.1 内容概述与基本要求

一、随机试验和随机事件

1. 随机现象

在基本条件不变的情况下，一系列试验或观察会得到各种不同的结果，就某一次试验或观察而言，可能出现这种结果，也可能出现那种结果，事先无法确定，呈现出一种偶然性，这种现象称为**随机现象**.概率论是研究随机现象的数量规律的学科.

2. 随机试验

对随机现象某一特征的试验或观察，称为**随机试验**，简称**试验**，记为 T.随机试验必须满足下列条件：

(1)试验可以在相同的条件下重复进行；

(2)试验之前能确定所有可能的结果；

(3)试验之前不能确定将会出现所有可能结果中的哪一个.

3. 样本点与样本空间

随机试验的每一可能结果称为**样本点**，用 ω 表示.

样本点全体组成的集合称为**样本空间**，用Ω表示.

4. 随机事件

由若干个样本点组成的集合或样本空间的某个子集，称为**随机事件**，简称**事件**，用$A,B,C,A_i,B_j,\cdots$等大写拉丁字母表示.

在某次试验中，若事件A中的某个样本点出现，则称A**发生**.

样本空间Ω包含了所有的样本点，在每次试验中它总发生，因此Ω就是**必然事件**，空集$\varnothing$不包含任何样本点，在每次试验中它总不发生，因此$\varnothing$即为**不可能事件**.

二、事件的关系与运算

1. 包含关系

若事件A的每一个样本点都属于事件B，则称A**包含于**B，或B**包含**A，记为$A\subset B$或$B\supset A$，这时事件A的发生必然导致B的发生.

2. 相等事件

如果同时成立$A\subset B$和$B\subset A$，则称事件A与事件B**等价**，或A**等于**B，记为$A=B$.此时A与B表示同一个事件，它们所包含的样本点完全相同.

3. 不相容事件

若在任何一次试验中，事件A与B都不可能同时发生，则称事件A与B**互不相容**，或A与B**互斥**.若n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互不相容，则称这n个事件互不相容.若可列个事件$A_1,A_2,\cdots$两两互不相容，则称$A_1,A_2,\cdots$互不相容.

4. 交(积)

由同时属于事件A与B的样本点组成的集合称为A与B的**交**(或**积**)，记为$A\cap B$或AB，事件AB表示A与B同时发生.事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的交事件记为$A_1A_2\cdots A_n$或$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，它由同时属于$A_1,A_2,\cdots,A_n$的样本点组成，表示$A_1,A_2,\cdots,A_n$同时发生.对可列个事件，定义$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

事件A与B互不相容即$AB=\varnothing$.n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$互不相容，即$A_iA_j=\varnothing$ $(i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j)$；可列个事件$A_1,A_2,\cdots$互不相容，即$A_iA_j=\varnothing(i,j=1,2,\cdots,i\neq j)$.

5. 并

由至少属于事件 A 与 B 中的一个样本点组成的集合称为 A 与 B 的**并**，记为 $A\cup B$，事件 $A\cup B$ 表示 A 与 B 中至少有一个发生，如果 A 与 B 互不相容，则称它们的并为**和**，记为$A+B$. 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，它由至少属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的一个样本点组成，表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少发生一个.如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则称它们的并为和，记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$. 对可列个事件，定义 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.若 $A_1,A_2,\cdots$互不相容，则称它们的并为和，记为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

6. 逆事件

由不属于 A 的样本点组成的集合称为事件 A 的**逆事件**或**对立事件**，记为 $\overline{A}$，$\overline{A}$ 表示事件 A 不发生.

注意：对立事件一定互不相容，但互不相容的事件不一定互为对立事件.

7. 差事件

由属于事件 A 而不属于 B 的样本点组成的集合称为事件 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$，事件 $A-B$ 表示 A 发生而 B 不发生.显然，$A-B=A\overline{B}=A-AB$.

事件运算的顺序是：首先进行逆的运算，再进行交的运算，最后才进行并或差的运算.

由于事件本质上是集合，所以事件之间的关系与运算和集合之间的关系与运算相类似，两者的对应关系见表 1－1.

表 1－1

符号	概率论	集合论
Ω	样本空间(必然事件)	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点	元素
A	事件	子集
$A\subset B$	事件 A 的发生必然导致 B 的发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与 B(等价)相等	A 与 B 相等
$AB=\varnothing$	事件 A 与 B 互不相容	A 与 B 没有公共的元素
$A\cap B$	事件 A 与 B 同时发生	A 与 B 的交

续表

符号	概率论	集合论
$A\cup B$	事件 A 与 B 中至少发生一个	A 与 B 的并
$\overline{A}$	事件 A 的逆事件(对立事件)	A 的余集
$A-B$	事件 A 发生而 B 不发生	A 与 B 的差

事件之间的关系与运算 $A\subset B, AB=\varnothing, A\cap B, A\cup B, \overline{A}, A-B$ 可以用 Venn 图直观地表示.

8. 事件之间的运算法则

事件之间的运算满足以下法则:

(1)**交换律** $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2)**结合律** $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3)**分配律** $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C), (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4)**德莫根 (De Morgan)定理** $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

分配律和德莫根定理可以推广到有限个甚至可列个事件:

分配律:$(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)B=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_iB, (\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i)\cup B=\bigcap\limits_{i=1}^{n}(A_i\cup B)$,

$$(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)B=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_iB, (\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i)\cup B=\bigcap_{i=1}^{\infty}(A_i\cup B).$$

德莫根定理:$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}, \overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$;

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}, \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

三、概率的定义与性质

1. 频率稳定性及概率的统计定义

对于随机事件 A,若在 n 次试验中发生了 μ_n 次,则称 $F_n(A)=\frac{\mu_n}{n}$ 为 A 在 n 次试验中出现的**频率**.

在一次试验或观察中,事件 A 是否发生是偶然的.但在大量重复试验中,A 出现的频率总在某个固定常数附近摆动,而且一般来说,试验次数越多,摆动的幅度越小,这一现象称为**频率**

稳定性.

在频率稳定性中,频率 $F_n(A)$的稳定值称为 A 发生的概率,以 $P(A)$表示,称这一定义为**概率的统计定义**,它度量了事件 A 发生的可能性大小.

2. 古典概型和概率的古典定义

(1)古典概型

古典概型是指具有以下两个特征的一类特殊概率模型:

(i)试验的全部可能结果只有有限个,即样本空间只含有限个样本点,$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,$n$ 为有限正整数;

(ii)每个样本点出现的可能性相同,即 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\dfrac{1}{n}$.

(2)概率的古典定义

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的样本点数}}{\text{样本点总数}}$$

在利用上述定义计算事件的概率时,经常用到两条基本原理,即**乘法原理**和**加法原理**,以及排列和组合的基本公式.

乘法原理:设完成某件事须经过 m 个步骤,其中完成第 i 个步骤有 $n_i(i=1,2,\cdots,m)$种方法,则完成该事情总共有 $n_1\cdot n_2\cdot\cdots\cdot n_m$ 种方法.

加法原理:设完成某件事有 m 种方式,而第 i 种方式有 $n_i(i=1,2,\cdots,m)$种方法,则完成该事情总共有 $n_1+n_2+\cdots+n_m$ 种方法.

排列:(i)从 n 个不同的元素中有放回地任意取出 r 个,按照一定的次序进行排列,不同的排列数为 n^r.

(ii)从 n 个不同的元素中不放回地任意取出 r 个,按照一定的次序进行排列,不同的排列数为 $P_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1)$.

组合:从 n 个不同的元素中不放回地任意取出 r 个组成一组,不考虑元素之间的顺序,不同的组合数有 $C_n^r=\dfrac{n!}{r!\ (n-r)!}$.

3. 几何概率

记 A_D 为事件“在区域 Ω 中随机地取一点，而该点落入子区域 D 中”，称 $P(A_D)=\dfrac{D\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}}$ 为**几何概率**.区域 Ω 和 A_D 可以是一维的，也可以是高维的.其中的测度是一个广义的概念，可以指区间的长度、平面上区域的面积、空间区域的体积等.与概率的古典定义类似，几何概率也是通过等可能性来定义的，这里的等可能性是指：随机选取的点落入区域 D 的概率与 D 的测度成正比，而与 D 的位置、形状无关.

4. 概率的公理化定义

设 Ω 是随机试验 T 的样本空间，对 T 的每个随机事件 A，都对应一个实数 $P(A)$，满足如下条件：

(1)**(非负性)**对任意事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2)**(规范性)**$P(\Omega)=1$；

(3)**(可列可加性)**设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是互不相容的事件，则

$$P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称 P 为**概率**.

在这一定义中，概率是事件的函数，并没有给出具体的计算公式.

概率具有以下性质

性质 1 $P(\varnothing)=0$.

性质 2 **(有限可加性)**若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

性质 3 对任何事件 A，有 $P(A)=1-P(\overline{A})$.

性质 4 如果 $A\supset B$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B),P(A)\geqslant P(B).$$

性质 5 **(概率的加法定理)**对任何两个事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，成立

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k)$$
$$-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

四、条件概率与乘法定理

1. 条件概率

设 A 与 B 为两个事件，若 $P(B)>0$，则称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**.

一般情况下，条件概率不等于无条件概率.

对于固定的 B，条件概率 $P(A|B)$ 满足概率公理化定义的三个条件，即条件概率仍然是概率，从而条件概率具有概率的所有性质.

2. 概率的乘法定理

若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$；

若 $P(B)>0$，则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$；

一般地，如果 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$.

五、全概率公式和贝叶斯公式

1. 样本空间的分割

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 为事件，满足

(i) $A_iA_j=\varnothing$，$P(A_i)>0$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots$；

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i=\Omega$，

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 为样本空间 Ω 的分割.

2. 全概率公式

设 $A_1,A_2,\cdots A_n,\cdots$ 为样本空间 Ω 的一个分割，B 为任意事件，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

3. 贝叶斯公式

设 $A_1,A_2,\cdots A_n,\cdots$ 为样本空间 Ω 的一个分割，B 为任意满足 $P(B)>0$ 的事件，则

$$P(A_j\mid B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)P(B\mid A_i)},j=1,2,\cdots.$$

在全概率公式和贝叶斯公式中，通常将事件 B 理解为某一试验的结果，而将 $A_1,A_2,\cdots$ 理解为导致 B 发生的“可能原因”，因此贝叶斯公式反映了该结果(B)是由各原因引起的可能性大小的认识.

六、事件的独立性

1. 两个事件的独立性

(1)定义

设事件 A,B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称**事件 A,B 相互独立.**

(2)性质

若事件 A,B 相互独立，则下列三对事件均相互独立：

$$A\text{ 与 }\overline{B},\overline{A}\text{ 与 }B,\overline{A}\text{ 与 }\overline{B}.$$

2. 三个事件的独立性

设 A,B,C 为三个事件，若下列四个式子同时成立：

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B)\\P(BC)=P(B)P(C)\\P(AC)=P(A)P(C)\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\end{cases},$$

则称 A,B,C **相互独立**.

若 A,B,C 相互独立，则 A,B,C 两两相互独立，即上述前三个等式成立；反之，不一定成立.

3. n 个事件的独立性

(1)定义

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,若对于任意 k 个事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$,成立

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**.

(2)性质

(i)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则其中任意少于 n 个事件也相互独立.

(ii)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则 $\hat{A}_1,\hat{A}_2,\cdots,\hat{A}_n$ 也相互独立,其中 $\hat{A}_i$ 为 A_i 或 $\overline{A}_i$, $i=1,2,\cdots,n$.

(iii)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$.

七、贝努利概型

1. 若试验 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 满足以下条件:

(i)$T_1,T_2,\cdots,T_n$ 相互独立;

(ii)每次试验都只有两个可能的结果:A 和 $\overline{A}$;

(iii)每次试验中,$p=P(A)$从而 $q=1-p=P(\overline{A})$保持不变,

则称 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 为 n **重贝努利试验**或**贝努利概型**.

2. **定理**　在 n 重贝努利试验中,事件 A 恰好出现 k 次的概率为

$$b(k;n,p)=C_n^k p^k q^{n-k},k=0,1,\cdots,n.$$

其中 $p=P(A),q=1-p=P(\overline{A})$,且 $\sum\limits_{k=0}^{n}b(k;n,p)=1$.

本章的基本要求是了解随机现象与随机试验,了解样本空间的概念.理解随机事件的概念,掌握随机事件之间的关系与运算.了解事件频率及频率稳定性的概念,了解概率的统计定义,理解概念的古典定义和几何概念的定义,会计算古典概率和几何概率.了解概率的公理化定义,了解概率的性质.了解条件概率的概念、概率的乘法定理、全概率公式和贝叶斯公式,会应用它们解决一般的问题.理解事件独立性的概念,并会用独立性解决一般的问题.了解贝努利概型,并能运用这一概型解决有关概率的计算问题.

§1.2 典型例题

例 1 写出下列随机试验的样本空间:

(1)掷一枚均匀的骰子两次,观察两次出现的点数之和;

(2)箱子中有标号为 1,2,3 的 3 件产品,不放回地接连抽取产品,直到取到 1 号产品;

(3)10 件产品中有 6 件正品、4 件次品,有放回地每次任取一件,直到次品全部取出,记录抽取的次数;

(4)口袋中装有若干个红球、白球和蓝球,从中任取 4 只,观察球的颜色;

(5)将 A、B 两封信任意投入三个邮筒内,观察信的分布情况;

(6)在单位圆内任选两点,观察这两点的距离;

(7)观察某地一天内的最高气温和最低气温(假定最高气温不高于 C_1,最低气温不低于 C_2).

(8)在半径为 R 的圆周上任投 A,B,C 三点,考察所得三段弧的长度.

解 (1)骰子两次出现的点数之和最小为 2,最大为 12,故样本空间为

$$\Omega_1=\{2,3,\cdots,12\}.$$

(2)1 号产品可能在第一、第二或第三次被抽到,因此样本空间为

$$\Omega_2=\{(1),(2,1),(3,1),(2,3,1),(3,2,1)\}.$$

(3)为取出全部次品,最少需抽 4 次,由于采用有放回的抽样,无法确定抽样次数的上界,因此样本空间为

$$\Omega_3=\{4,5,\cdots\}.$$

(4)以 r,w,b 分别表示红色、白色和蓝色,rw 表示红、白两种颜色,rb 表示红、蓝两种颜色,wb 表示白、蓝两种颜色,rwb 表示红、白、蓝三种颜色,于是样本空间为

$$\Omega_4=\{r,w,b,rw,rb,wb,rwb\}.$$

(5)记样本点为(x_1,x_2,x_3),x_i 为 A、B、AB、0 分别表示第 i 个邮筒内放入了信件 A、信件 B、同时放入信件 A 及信件 B,没有放入信件,则样本空间为

$$\Omega_5=\{(A,B,0),(A,0,B),(B,A,0),(B,0,A),(0,A,B),$$

$(0,B,A),(AB,0,0),(0,AB,0),(0,0,AB)\}$.

(6)设两点的坐标分别为(x_1,y_1)和(x_2,y_2),则样本空间为

$$\Omega_6=\{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\mid x_1^2+y_1^2<1,x_2^2+y_2^2<1\}.$$

(7)设样本点为(x,y),其中x,y分别表示最低气温和最高气温,则样本空间为

$$\Omega_7=\{(x,y)\mid C_1\leqslant x<y\leqslant C_2\}.$$

(8)设三段弧的长度分别为x,y,z,样本空间为

$$\Omega_8=\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0,x+y+z=2\pi R\}.$$

例2 在篮球比赛中,一选手连续投篮三次,记A_i为第$i(i=1,2,3)$次投中的事件,用A_1,A_2,A_3表示下列事件:

(1)第三次没投中;

(2)第一次投中,后两次均未投中;

(3)恰好一次投中;

(4)至少有一次投中;

(5)恰好有两次投中;

(6)至多一次投中;

(7)至少有两次投中;

(8)三次中至多两次投中.

解 (1)$\overline{A}_3$.

(2)$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

(3)$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

(4)$A_1\cup A_2\cup A_3$.

(5)$A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$.

(6)$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

(7)$A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$,或$A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3$.

(8)$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$,或$\overline{A_1A_2A_3}$.

例 3 指出下列关系中哪些成立？哪些不成立？

(1)$A\cup B=A\overline{B}\cup B$；

(2)$(\overline{A\cup B})C=\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

(3)若 $A\subset B$，则 $A=AB$；

(4)若 $A\subset B$，则 $\overline{B}\subset\overline{A}$；

(5)若 $AB=\varnothing$，且 $C\subset A$，则 $BC=\varnothing$；

(6)$(AB)(A\overline{B})=\varnothing$；

(7)$\overline{A}B=A\cup B$.

解 (1)成立.$A\overline{B}\cup B=(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)=(A\cup B)\cap\Omega=A\cup B$.

(2)不成立.$(\overline{A\cup B})C$ 发生，即$\overline{A\cup B}$发生且 C 发生，C 发生则 $\overline{C}$ 不发生，所以 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 也不发生.因此，$(\overline{A\cup B})C\neq\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

(3)成立.首先，显然有 $AB\subset A$，其次，若 A 发生，由于 $A\subset B$，则 B 必发生，即 $A\subset AB$，从而 $A=AB$.

(4)成立.因为 $A\subset B$，所以 A 的每个样本点都属于 B，从而 $\overline{B}$ 的每个样本点都属于 $\overline{A}$，即 $\overline{B}\subset\overline{A}$.

(5)成立.由于 $C\subset A$，因此 $BC\subset AB=\varnothing$，但另一方面，显然成立 $\varnothing\subset BC$，所以 $BC=\varnothing$.

(6)成立.$(AB)(A\overline{B})=A(B\overline{B})=A\varnothing=\varnothing$.

(7)不成立.若 $\overline{A}B=A\cup B$，则 $A\overline{A}B=A(A\cup B)$，即 $\varnothing=A\cup AB=A$，矛盾.

例 4 任取一整数 N，求 N^3 的最后两个数字均为 1 的概率.

解 记 A 为"N^3 的最后两个数字均为 1"的事件.将 N 写成 $N=a+10b+\cdots$，其中 $a,b,\cdots$ 可以取 $0,1,\cdots,9$ 中的任意值.由于

$$N^3=a^3+30a^2b+\cdots=a^3+10\cdot 3a^2b+\cdots$$

因此 N^3 的最后两个数字仅由 a 和 b 决定，从而样本点总数 $n=10\cdot 10=100$.因为 N^3 的最后一个数字为 1，所以 $a^3=1$ 即 $a=1$.而$\dfrac{N^3-1}{10}=3b+\cdots$的最后一个数字亦应为 1，即 $3b$ 由 1 结尾，此时 b 只能为 7，从而 $m(A)=1\cdot 1$，所求概率 $P(A)=\dfrac{m(A)}{n}=0.01$.

例 5 从 1,2,…,10 共 10 个数字中有放回地每次任取一个,共取 7 次,试求下列事件的概率:

(1)A_1:7 个数字全不相同;

(2)A_2:7 个数字中不含 1 与 10;

(3)A_3:10 恰好出现两次;

(4)A_4:10 至少出现两次.

解 (1)由于采用有放回的抽取,因此样本点总数为 10^7,7 个数字全不相同(A_1)的样本点数为 P_{10}^7,因此

$$P(A_1)=\frac{P_{10}^7}{10^7}.$$

(2)7 个数字中不含 1 与 10,则 7 次都只能在 2,…,9 中抽取,A_2 的样本点数为 8^7,因此

$$P(A_2)=\frac{8^7}{10^7}.$$

(3)10 恰好出现两次,必须有某两次取到 10,而另外 5 次不取 10,于是 A_3 的样本点数为 $C_7^2 \cdot 9^5$,因此

$$P(A_3)=\frac{C_7^2 \cdot 9^5}{10^7}.$$

(4)与(3)同理,10 恰好出现 k 次的概率为

$$p_k=\frac{C_7^k \cdot 9^{7-k}}{10^7},$$

从而

$$P(A_4)=\sum_{k=2}^{7} p_k=\sum_{k=2}^{7} \frac{C_7^k \cdot 9^{7-k}}{10^7}.$$

例 6 从 1~9 这九个正整数中,有放回地取三次,每次任取一个,求所得的三个数之积能被 10 整除的概率.

解 所取出的三个数的乘积能被 10 整除,这三个数中必须有 5 和偶数.记 A 为取出的三个数中含有 5 的事件,B 为取出的三个数中含有偶数的事件,所得的三个数之积能被 10 整除即为 AB,故所求概率为

$$P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})$$
$$=1-[P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B})]$$
$$=1-\left(\frac{8}{9}\right)^3-\left(\frac{5}{9}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^3\approx0.214.$$

例 7 某城市发行 A,B,C 三种报纸.经统计,订阅 A 报纸的有 45%的住户,订阅 B 报纸的有 35%的住户,订阅 C 报纸的有 30%的住户,同时订阅 A 报纸与 B 报纸的有 10%的住户,同时订阅 A 报纸与 C 报纸的有 8%的住户,同时订阅 B 报纸与 C 报纸的有 5%的住户,同时订阅 A 报纸、B 报纸和 C 报纸的有 3%的住户,试求下列事件的概率:

(1)只订阅 A 报纸;

(2)只订阅一种报纸;

(3)正好订阅两种报纸;

(4)至少订阅一种报纸;

(5)不订阅任何报纸;

(6)至多订阅一种报纸.

解 (1)$P(A\overline{B}\overline{C})=P(A\overline{B}-C)=P(A\overline{B})-P(A\overline{B}C)=P(A-B)-P(AC-B)$

$$=P(A)-P(AB)-[P(AC)-P(ABC)]=0.45-0.1-(0.08-0.03)$$
$$=0.3.$$

(2)与(1)类似,可求得

$$P(\overline{A}\overline{B}C)=P(\overline{A}C-B)=P(\overline{A}C)-P(\overline{A}BC)$$
$$=P(C)-P(AC)-[P(BC)-P(ABC)]$$
$$=0.3-0.08-(0.05-0.03)=0.2.$$
$$P(\overline{A}B\overline{C})=P(\overline{A}B-C)=P(\overline{A}B)-P(\overline{A}BC)$$
$$=P(B)-P(AB)-[P(BC)-P(ABC)]$$
$$=0.35-0.1-(0.05-0.03)=0.23.$$

从而只订阅一种报纸的概率为

$$P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)+P(\overline{A}B\overline{C})=0.3+0.2+0.23=0.73.$$