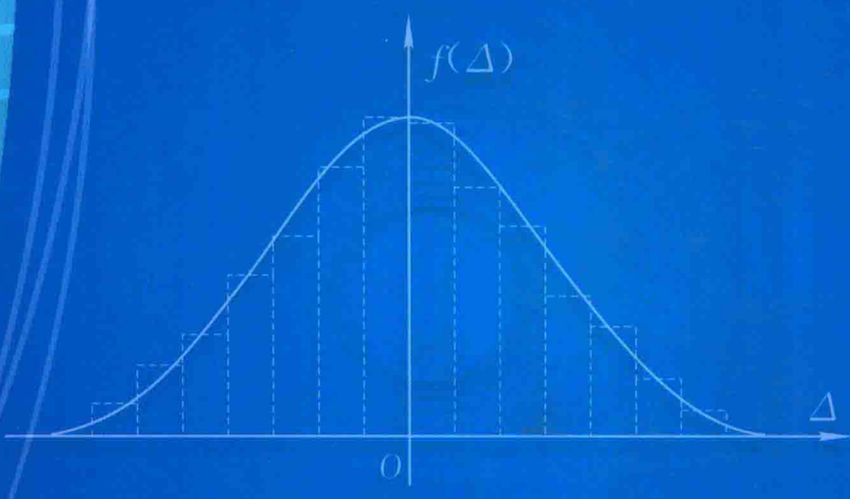
煤炭高等教育“十三五”规划教材

中国矿业大学（北京）越崎系列规划教材

误差理论与测量平差

Error Theory and Surveying Adjustment

戴华阳 雷斌 主编



测绘出版社

煤炭高等教育“十三五”规划教材
中国矿业大学(北京)越崎系列规划教材

误差理论与测量平差

主编　戴华阳　雷　斌
参编　李　军　金日守　刘吉波

测绘出版社
·北京·

内容提要

本书系统介绍了误差理论的基本知识和测量平差的基础方法，简要介绍了近代平差的原理。编写力求文字简洁、开门见山、知识连贯。选例求精简，应用有特色。本书可作为测绘工程本科专业的教材，也可供相关专业的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

误差理论与测量平差 / 戴华阳，雷斌主编. —北京 ：测绘出版社，2017.2
煤炭高等教育"十三五"规划教材
ISBN 978-7-5030-4032-0

Ⅰ. ①误…　Ⅱ. ①戴…②雷…　Ⅲ. ①测量误差—高等学校—教材②测量平差—高等学校—教材　Ⅳ. ①O241.1②P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 020852 号

策划 贾晓林　**责任编辑** 余易举　**封面设计** 李伟　**责任校对** 孙立新　**责任印制** 陈超

出版发行	测绘出版社	**电　话**	010—83543956(发行部)
地　址	北京市西城区三里河路 50 号		010—68531609(门市部)
邮政编码	100045		010—68531363(编辑部)
电子邮箱	smp@sinomaps.com	**网　址**	www.chinasmp.com
印　刷	北京京华虎彩印刷有限公司	**经　销**	新华书店
成品规格	184mm×260mm		
印　张	13	**字　数**	322 千字
版　次	2017 年 2 月第 1 版	**印　次**	2017 年 2 月第 1 次印刷
印　数	001—200	**定　价**	28.00 元

书　号 ISBN 978-7-5030-4032-0

序

测量数据不可避免地存在误差，而如何科学合理地分析处理误差，达到提高观测结果精度与控制质量的目的，则是测量工作者的主要任务。特别是以全球导航卫星系统（GNSS）、遥感（RS）、地理信息系统（GIS）为代表的近代测量数据，误差不仅存在，而且还比常规测量数据的误差更为复杂，这更加体现了测量数据处理的必要性和重要性。因此，测量数据处理的理论和方法，过去是，当今仍然是测绘学科中的核心研究内容。

“误差理论与测量平差”是高等学校测绘工程本科专业的一门重要专业基础课程，是教育部高等学校测绘学科教学指导委员会指定的测绘工程专业的几门核心课程之一。本书编写的思路、内容符合该核心课程的要求。

《误差理论与测量平差》的编者具有该课程丰富的教学经验，所编教材能注重基础理论的叙述和方法的应用，为进一步学习近代测量数据处理打好基础。该书内容简洁，行文顺畅，便于学生自学，是一本具有新颖性的特色教材。

“误差理论与测量平差”是各学校测绘工程专业必修的课程，具有通用性。目前已出版多本同类教材，各有特色。我赞同从事这一领域研究和教学的教师总结教学经验，积极参与到教材改革和教学方法研究中来，为提高误差理论的教学质量而努力。

我祝贺《误差理论与测量平差》教材的出版！

教授 博士生导师
2016 年 10 月

前　言

“误差理论与测量平差”是高等学校测绘工程本科专业的基础核心课程。该课程理论性强、方法应用广泛，可谓难教难学，对教材的编写有较高的要求。

本书是编者在多年教学经历的基础上完成的，融入了编者的诸多体会和经验。全书分12章，内容包括观测误差、协方差传播规律、测量平差概述、条件平差、附有参数的条件平差、间接平差、附有限制条件的间接平差、平差结果的统计性质、点位精度与误差椭圆、平差系统的假设检验、近代平差方法简介和平差方法应用。

本书力求简明连贯，让读者体会误差的理论性和平差方法的思想韵味，并将应用实例单列一章，以便授课选择和学习参考。书中设置了多处辅助知识文本框，便于读者理解有关知识点。

本书由戴华阳、雷斌主编。编写人员及分工如下：戴华阳编写§1-1、§1-2、§1-4、§1-5，第二、三、四、七、八章；雷斌编写§1-3、§1-6、§1-7、§12-1，第五、十一章；李军编写第六、九章，各章习题；金日守编写第十章；刘吉波编写§12-2、§12-3、§12-4。全书由戴华阳统稿。

本书中部分实例和习题摘自武汉大学测绘学院测量平差学科组编著的《误差理论与测量平差基础》(第三版)、《误差理论与测量平差基础习题集》(第一版)，特此致谢！

本书被列入煤炭高等教育“十三五”规划教材和中国矿业大学(北京)越崎系列规划教材，并得到中国矿业大学(北京)越崎教材基金的资助和深部岩土力学与地下工程国家重点实验室的支持。

我国测量平差领域的著名学者陶本藻教授对本书进行审阅，并欣然作序鼓励。编者表示衷心感谢！

由于编者水平所限，错漏难免，还望读者批评指正。

戴华阳

2016年12月

目　录

Contents

第一章　观测误差

§1-1　观测量与观测值

一、观测工作与观测值

对于一项测量工程，观测设计、观测工作、数据处理是不可或缺的三个环节，由此获得的数据成果可应用于工程或进一步的观测设计中。

在测量学领域，观测工作是指观测者使用仪器设备对几何或物理量进行测定，从而获得被观测量的数据信息。观测(observe)、测量(survey)、监测(monitor)是相近词目。测绘工程中常见的观测工作有角度观测、边长观测、高差观测、坐标观测等，变形监测中有温度、应力、应变、速率等物理量观测。本书中主要以几何量观测为例进行讨论。

被观测的几何量或物理量称为观测量。通过观测工作得到的观测数值称为观测值。

观测工作包含 5 个要素(图 1-1)：

(1)观测者：进行观测方案设计、观测实施、数据处理等工作的执行者。

(2)观测量：如水平角、垂直角、高差、坐标、坐标差等物理量或几何量。

(3)观测仪器：经纬仪、钢尺、测距仪、水准仪、全站仪、全球定位系统(GPS)等。

(4)观测方法：测回法测角、方向法测角、分段测距、水准测量、三角高程法等。

(5)观测环境：观测过程中测区所处环境的大气压力、气温、地形、地貌等。

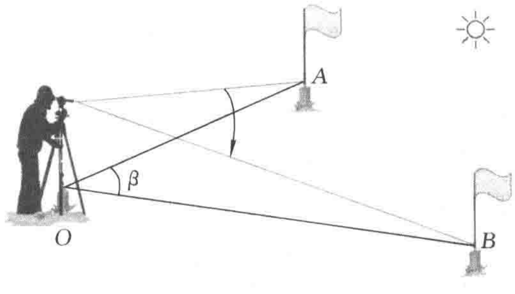


图 1-1　观测工作

观测的结果就是观测值。每一个被观测量在一定的时段内都存在一个反映其真实的几何或物理状况的值，称为被观测量的真值。在一定时段内，每一个被观测量具有唯一的真值，无论已知和未知，真值都客观存在。

观测值分两类：直接观测值和间接观测值。直接观测值是通过观测工作直接获得的观测值，如经纬仪测得的水平角值、竖直角值，测距仪测得的边长值。间接观测值是指由其他观测值运算得到的观测值，如面积观测值、后方交会的坐标观测值、三角形内角和观测值等。

二、观测误差

从观测者的期望而言，观测的目的是获取被观测量的准确值。但观测值会与被观测量的客观真值一致吗？通常不一致，两者之间会存在偏差。实际表明，观测值并不完美，测不准是普遍现象。

我们把观测值与被观测量的客观真值的偏差称为**观测误差**，简称**误差**，又称**真误差**。

被观测量的真值客观存在但通常不可知，这给误差的确定带来困难。观测误差有两种显现方式：

(1)同一个量的各观测值之间存在差异。我们用钢尺测量同一个条边，进行 3 次观测，观测值分别为 10.006 m、10.009 m、10.003 m。3 个观测值各不相同，而该边长的真值只有 1 个，说明这 3 个观测值存在误差。这是通过对一个观测量的多次**重复观测**发现误差的例子。

(2)观测值与其理论真值之间存在差异。对一个三角形的 3 个内角进行观测，得到 3 个观测值 $40°00'05''$、$100°00'02''$、$40°00'01''$，发现 3 个内角观测值之和为 $180°00'08''$，与理论上的真值 $180°$相差 $8''$，说明这个内角和观测值存在误差，也说明 3 个内角观测值存在误差。这是通过**多余观测**发现误差的例子，如果只进行 2 个或 1 个内角观测，则不能轻易发现误差的存在。

一个观测值 L，对应于一个观测量及其真值 $\tilde{L}$，就相应地存在一个观测误差 Ω。根据定义，观测值 L 的误差为：误差＝真值－观测值，即

$$\Omega = \tilde{L} - L \tag{1-1}$$

误差有何影响或危害吗？有，或大或小。带有误差的观测数据如果直接用于工程施工，则可能给实际工程与设计带来偏差，甚至造成工程的失败。在隧道贯通工程中，测量工作和误差处理就直接影响工程的成败。因此，我们需要了解观测误差，掌握误差的处理方法，获得最优的数据成果，为工程应用服务。这正是学习本课程的目的。

三、误差的要素

(1)误差的大小：误差一般不大，是个小不点，但不为 0。

(2)误差的符号：误差有“＋”有“－”，观测值大于真值时，误差为“－”，否则误差为“＋”。

(3)误差的单位：与对应观测值 L 的单位同类，但单位级别一般不同，如观测值单位为 m、(°　′　″)等时，对应误差的单位分别用 mm、(″)，这样可使误差数值放大，便于计算。

(4)误差的个数：1 个观测值对应 1 个误差，n 个观测值就有 n 个误差。

(5)误差的分布：对大量误差进行统计分析，可以了解误差的分布情况。

这几点对于我们认识误差、分析误差和处理误差均非常重要。

§1-2　误差的来源和分类

一、误差的来源

观测误差产生于观测记录过程中，主要来源于三个方面：

1. 观测者

观测过程中，观测者操作仪器，对中、整平、读数等均存在偏差。观测者的视觉敏锐度、身

体状况、注意力、操作经验等因素，都可能对观测值造成影响。

2. 观测仪器

观测仪器的精密度、完好状况对观测结果有影响，如水准尺尺长误差、水准仪的视准轴不平行于水准轴、电磁波测距仪的调制频率误差、GPS测量中卫星与接收机钟误差等，都会引起观测误差。

3. 观测环境

观测是在一定的外界环境下进行的，环境因素如温度、风力、大气折光等对仪器性能、测点标志识别等有直接影响，因而对观测结果产生影响。外界环境的变化会使观测数据发生变化，如大气密度的不均匀会引起角度测量时视线发生弯曲，大气折射会引起GPS测量和电磁波测距中信号出现延迟。

观测误差能不能避免？由于人的感官局限性、仪器的精密度有限、外界因素影响不可避免，因此观测误差**不可避免**。

影响观测结果的条件包括观测者状况、观测仪器情况、外部环境、观测方法、观测数据处理方法等，总称为观测条件。当**观测条件相同时，测量数据就可认为有相同的质量(同精度)**。为了提高测量数据的质量或可靠性，应改善测量条件，如采用更高精度的仪器、更合理的观测方法及数据处理方法等。

观测误差来源于三个方面的许多因素。不同仪器对观测值的影响不同，同一台仪器的不同部件对观测值的影响方式也不相同。实际上，我们计算得到的观测误差是许多误差项共同积累与作用的结果。一个观测值的总误差为Ω，则有

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \cdots + \Omega_n \tag{1-2}$$

式中，$\Omega_i (i=1,2,\cdots,n)$为不同的来源构成的误差项。

二、误差的分类

误差的影响因素众多，进行误差分类有利于更好地了解误差和处理误差。如何分类？按误差的大小分大误差和小误差，或是按误差的正负分为正误差和负误差。这样都只能反映误差的表象而未触及误差的来源。为此，需要按照各因素引起的误差在大小、正负及它们的变化规律方面进行误差分类，也就是按误差对观测值的影响性质来分类，分为**偶然误差Δ、系统误差ε、粗差$\Delta_{粗}$**。

(一)偶然误差

在**相同的观测条件**下，对某一量进行一系列观测，得到一系列误差：单个观测值不论从大小还是正负上看均没有规律性，但大量的误差会呈现统计上的规律性。这类误差称为偶然误差。偶然误差的大小或正负呈现随机性，不可预知，又称随机误差。

例如，用经纬仪测角时，测角误差包括：①照准误差，为偶然误差，因为十字丝切目标时或偏左或偏右，是偶然的结果；②读数误差，为偶然误差，因为估读刻度间的数值时，是凭感官判断的，读数可能偏大也可能偏小，误差可能为负也可能为正，具有偶然性，没有规律。

(二)系统误差

在相同的观测条件下进行一系列的观测，得到一系列误差，误差的大小或符号呈现某种规律性。这类误差称为系统误差。

系统误差产生的原因是多方面的，如测量仪器本身的误差、测量仪器安置及操作错误、观

测方法的不合理、外界环境的影响及人为因素等，都可能引起系统误差。

例如：由于水准尺扶持不直导致的读数偏大而引起的误差为正，具有规律性，是系统误差；某钢尺存在尺长误差，当用其连续测量一段距离时，尺长误差所引起的距离误差与所测距离的长度成正比增加，距离愈长所累计的误差也愈大，呈规律变化，则尺长误差为系统误差。

系统误差有多种表现特性，如固定性、累积性、周期性、随机性。影响因素不同，则系统误差特性不同。

(1)固定性：系统误差的大小和符号保持不变，如电磁波测距中的常数项误差，经纬仪、全站仪的三轴误差(视准轴、横轴和竖轴)、竖直度盘指标差等系统误差。

(2)累积性：误差随着测量值的增加而增加，如电磁波测距中比例误差项与距离成正比。

(3)周期性：误差的大小及符号表现出规律性的变化，如经纬仪水平度盘刻画误差引起的读数误差。

(4)随机性：有些系统误差呈现出复杂的规律性变化，或呈现出某种随机性。

(三)粗差

数值比正常观测条件下出现的最大误差还要大的误差称为粗差。从统计意义上理解，粗差就是超出正常范围的大误差。在相同条件下，对某一量进行了一系列观测，如果其中个别误差的数值比其他误差大很多，如相差几倍，则可以认为这些个别误差是粗差。

产生粗差的原因很多，如读数及记录错误、仪器操作不当、仪器使用时间过长、观测时外部环境的急剧变化等。在现代测量中，如全球定位系统、摄影测量与遥感、地理信息系统等，经常出现大规模自动化测量数据采集的情形，此时较容易出现粗差。

三、误差的处理

误差的处理顺序通常是按先粗差、再系统误差、再偶然误差，分类有序处理。误差处理的基本方法是去除粗差、消减系统误差、平抑偶然误差。本书主要讨论偶然误差的处理。

(一)粗差的处理

粗差只存在于个别观测值之中，但粗差对测量数据质量的影响较大，应采取适当的观测方法和数据处理方法予以避免和消除。

粗差需要先识别后处理。粗差处理的办法有两种：①对于检测确定含有粗差的观测值，直接去掉或重测补充，然后进行后续数据处理；②采用稳健估计等方法进行粗差处理。

(二)系统误差的处理

当系统误差和偶然误差共存于观测值中时，严格区分观测值中的偶然误差和系统误差非常困难，且两种误差可能发生转变。由于系统误差表现出某种规律性，通常需要采取适当措施予以减弱。系统误差的消减措施包括：

(1)进行仪器的检验校正。通过检验校正，使仪器的几何轴线满足规定的技术条件，以最大限度减弱可能产生的系统误差。例如：作业前对经纬仪、全站仪的三轴关系进行校正等。

(2)采用合理的观测方法或程序。例如：在利用经纬仪进行角度测量过程中，可以利用盘左和盘右读数来减弱仪器的 2C 值、竖直度盘指标差等观测数据中的系统误差；在水准测量中，通过使前后视距相等以减少由于视准轴与水准管轴不平行，或视准轴与自动安平装置垂线不垂直造成的高差误差。

(3)加入改正数。例如：利用加常数改正、气象改正和周期误差改正的方法，改正电磁波测

距中的系统误差;在三角高程测量中,加入地球曲率和大气折光改正等。

这些措施既有实施于观测前的,也有观测过程中的,还有观测完成之后的。系统误差具有累积作用,对成果影响显著,可通过改善观测方法消除系统误差或减小其对观测成果的影响。

(三)偶然误差的处理

偶然误差的处理是在去除粗差、消减系统误差之后的数据处理环节。此时,观测误差中偶然误差占优,可以近似认为观测误差便是偶然误差。

由于偶然误差的随机性、无规律性,使得其处理难度和复杂性比粗差和系统误差更甚。认识偶然误差、处理偶然误差几乎是本书后续章节的全部内容,并且,我们把关注点从误差的大小、正负,转移到了误差的分布特性及其数学描述上。

§1-3　偶然误差的随机特性

如前所述,偶然误差具有随机性,单个偶然误差的大小及正负没有规律可循,不可预知,但是在相同观测条件下的大量偶然误差呈现统计上的规律性。

为了揭示偶然误差的概率分布特征,我们对在相同观测条件下获得的 $N=817$ 个三角形的角度观测值(图 1-2) 进行统计分析,每组 3 个内角观测值 α_i、β_i、γ_i 构成一个内角和观测值 Σ_i(属间接观测值),其真值 $\widetilde{\Sigma}_i=180°$。

运用误差公式可得到观测值 Σ_i 的误差为

$$\Delta_i=\widetilde{\Sigma}_i-\Sigma_i=180°-(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i)\qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{1-3}$$

而 $w_i=(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i)-180°$,称为三角形内角观测闭合差,它与相应的内角和误差反号。由此计算出各三角形内角和误差 Δ_i。以 $\mathrm{d}\Delta$ 表示误差区间并取为 $0.5''$,按误差 Δ_i 的正负和大小统计误差出现在各区间的个数 n_i,计算出误差出现在某区间内的频率 n_i/N,其结果列于表 1-1 中。

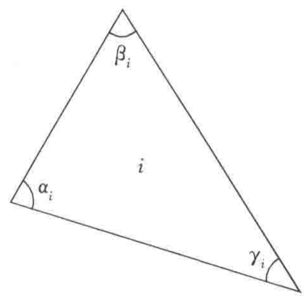


图 1-2

表 1-1　误差个数统计(按正负、区间)

误差区间 /(″)	Δ(−)			Δ(+)		
	n_i	n_i/N	$n_i/N/\mathrm{d}\Delta$	n_i	n_i/N	$n_i/N/\mathrm{d}\Delta$
0.0～0.5	123	0.151	0.301	121	0.148	0.296
>0.5～1.0	104	0.127	0.255	90	0.110	0.220
>1.0～1.5	75	0.092	0.184	78	0.095	0.191
>1.5～2.0	55	0.067	0.135	51	0.062	0.125
>2.0～2.5	27	0.033	0.066	39	0.048	0.095
>2.5～3.0	20	0.024	0.049	15	0.018	0.037
>3.0～3.5	10	0.012	0.024	9	0.011	0.022
>3.5	0	0.000	0.000	0	0.000	0.000
小计	414	0.507	1.013	403	0.493	0.987

一、误差分布直方图

上述三角形内角和真误差的分布也可以用直方图表现。如图 1-3(a)所示,其中横坐标

表示误差的大小，纵坐标为误差落入该区间的频率密度，即 $\frac{n_i/N}{\mathrm{d}\Delta}$，则每个矩形的面积代表该区间内的偶然误差出现的频率。

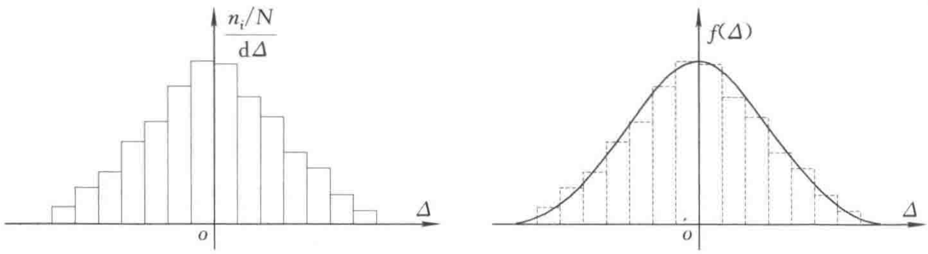
二、误差分布曲线

当观测次数趋向于无穷大，误差区间间隔趋向于无限小时，直方图中顶边折线将变成光滑的曲线，即该观测条件下误差的概率分布密度曲线，简称误差分布曲线，如图 1-3（b）所示，相应的误差频率密度则变为概率密度函数 $f(\Delta)$，即

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \mathrm{d}\Delta\to 0}} \frac{n_i/N}{\mathrm{d}\Delta} = f(\Delta) \tag{1-4}$$

此时，误差落入某区间内的频率将变为落入该区间的固定概率值，即误差出现频率的理论值。例如，误差落入区间 (a,b) 的概率为

$$P(a < \Delta < b) = \int_a^b f(\Delta)\mathrm{d}\Delta \tag{1-5}$$



（a）误差分布直方图　　（b）误差分布曲线

图 1-3　误差分布直方图和误差分布曲线

三、偶然误差的特性

从以上分析可知偶然误差的分布特性：

(1)有限性：偶然误差存在某一限值，超过这一限值的偶然误差出现的概率为零。

(2)集中性：绝对值小的误差比绝对值大的出现的概率大，误差分布集中于小误差附近。

(3)对称性：绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

(4)根据对称性，偶然误差的算术平均值趋向于零，即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i}{n} = 0 \tag{1-6}$$

四、真值的估值——最或是值

被观测量的真值通常是不可知的，那么如何才能获得真值的一个合适的接近值呢？不难想到，可以通过观测值对真值进行估计。

按照某种合适的准则和估计方法获得的某种估计值，称为最或是值，也称最优估值。

例如，在相同条件下对某一量进行一系列观测，如果观测值中不存在系统误差，则算术平均值将趋近于真值，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}L_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widetilde{L}_i-\Delta_i)=\widetilde{L}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i=\widetilde{L} \tag{1-7}$$

从这个意义上讲，在一定条件下，同一量的多个观测值的算术平均值是最或是值。

§1-4　正态分布的观测值

偶然误差因其随机特征可视为随机变量。在没有系统误差时，观测值是真值与偶然误差的差，所以观测值就是随机变量。这是我们对偶然误差和观测值在认识上的引申。根据偶然误差的分布特性，偶然误差和观测值的分布具有正态随机变量的基本特征，因此，我们**近似地**认为，偶然误差和观测值是正态随机变量。这就要求，对误差理论的研究方法应基于概率论和数理统计的数学基础。

一、随机变量概述

（一）随机变量

随机变量是表征随机试验的结果及其发生可能性的变量。随机变量用 X 表示，试验的结果用数值 x 表示，出现结果的可能性遵从一定的概率分布规律，用概率值或其分布函数来表示。X 的取值 x 随偶然因素而变化，事先不可预知；而普通变量只涉及变量的取值变化。

试验结果有限、可数的称为离散型随机变量，试验结果无限、不可数的称为连续型随机变量。考虑观测值的特性，本书只列出连续型随机变量的有关公式

$$\text{离散型随机变量 } X\begin{cases}\text{取值 } x_i(i=1,2,\cdots,n),\ x_i\in \mathrm{R}\\ \text{概率 } p_i,\ 0\leqslant p_i\leqslant 1\end{cases}$$

$$\text{连续型随机变量 } X\begin{cases}\text{取值 } x, x\in \mathrm{R}\\ \text{概率分布密度函数 } f(x), f(x)\geqslant 0\end{cases}$$

n 维随机变量是指 n 个试验结果同时发生的事件，而 n 个随机变量是描述 n 个独立试验结果的。

（二）随机变量的概率分布

1．随机变量的概率分布函数（简称分布函数）$F(x)$

随机变量 X 的取值不超过实数 x 的事件的概率为

$$F(x)=P(X\leqslant x)\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

2．连续型随机变量概率分布密度函数（简称密度函数）$f(x)$

连续型随机变量 X 有无穷多个取值点，每个取值点及其概率均不能一一列出，故用分布密度函数来描述。若连续型随机变量 X 的概率分布函数 $F(x)$ 可表示为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t\qquad(f(t)\geqslant 0)$$

则称 $f(t)$ 为 X 的分布密度函数，简称密度函数。

（三）随机变量的分布参数——数字特征

1．数学期望

数学期望是描述随机变量概率分布特征的一个重要指标，是指随机变量在其定义域上的概率平均值，即随机变量的概率分布重心。对于离散型随机变量 X，数学期望定义为

$$\left.\begin{aligned}E(X)&=p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n\\ \sum p_i&=1\end{aligned}\right\}\tag{1-8}$$

式中，x_i 为离散型随机变量 X 的取值，p_i 为相应取值的概率。式(1-8)可直观地理解为，随机变量 X 以取值概率为权的加权平均值。

对于概率密度为 $f(x)$ 的连续型随机变量 X，数学期望定义为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x\tag{1-9}$$

2. 方　差

方差是描述随机变量概率分布特征的另一个重要指标，是指随机变量的取值相对于概率分布重心(数学期望)的离散或密集程度。其定义式为

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}\tag{1-10}$$

即 X 与 $E(X)$ 差值平方的概率平均值，亦可理解为随机变量函数 $[X-E(X)]^2$ 的数学期望。对于连续型随机变量，方差为

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)\mathrm{d}x\tag{1-11}$$

3. 两个随机变量的协方差

两个随机变量 X、Y 构成的函数 $g(X,Y)=[X-E(X)][Y-E(Y)]$ 的数学期望，称为 X、Y 的协方差 D_{XY} 或 σ_{XY}，即

$$D_{XY}=\sigma_{XY}=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}\tag{1-12}$$

对于连续型随机变量，$D_{XY}=\sigma_{XY}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)][y-E(Y)]f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，令

$$\rho_{XY}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=E\left\{\frac{[X-E(X)]}{\sigma_X}\frac{[Y-E(Y)]}{\sigma_Y}\right\}\tag{1-13}$$

则称 ρ_{XY} 为随机变量 X 与 Y 的相关系数，$-1\leqslant\rho_{XY}\leqslant+1$。

4. 矩

分别取随机变量 X 的函数 $g(X)=X^k$，$g(X)=[X-E(X)]^k$，$g(X)=[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l$，则称 $E(X^k)$ 为 X 的 k 阶原点矩，$E\{[X-E(X)]^k\}$ 为 X 的 k 阶中心矩，$E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}$ 为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩。

(四)数学期望、方差的运算关系

X、Y 为两个随机变量，C 为常数。

1. 数学期望的运算性质

(1) $E(C)=C$。

(2) $E(CX)=CE(X)$。

(3) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$。

证明：
$$\begin{aligned}E(X+Y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}\left[y\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\end{aligned}$$