陈炼 王筑娟 主编
肖琴 周家华 张政 郁美玲 杨晓萍 副主编

高等应用数学习题册（下）

清华大学出版社

陈炼　王筑娟　主编
肖琴　周家华　张政　郁美玲　杨晓萍　副主编

高等应用数学习题册（下）

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分、曲面积分、无穷级数、微积分的应用.

本书与现行的大部分高等数学教材同步,可作为教材的同步练习.习题册配有全部习题答案和部分习题的解答提示,MATLAB程序实现部分为高等数学的应用提供了有益的帮助和启发.

本书既可以作为普通高等院校理工类、经管类本科生的参考资料,也可供研究生入学考试的备考训练使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学习题册.下/陈炼,王筑娟主编.—北京:清华大学出版社,2018
ISBN 978-7-302-49644-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①陈… ②王… Ⅲ.①应用数学—高等学校—习题集 Ⅳ.①O29-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第033884号

责任编辑: 汪 操
封面设计: 何凤霞
责任校对: 赵丽敏
责任印制: 刘海龙

出版发行: 清华大学出版社
网 址: http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地 址: 北京清华大学学研大厦A座 **邮 编:** 100084
社 总 机: 010-62770175 **邮 购:** 010-62786544
投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者: 北京泽宇印刷有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 260mm×185mm **印 张:** 8.5 **字 数:** 233千字
(附参考答案1本)
版 次: 2018年3月第1版 **印 次:** 2018年3月第1次印刷
印 数: 1～5000
定 价: 29.00元

产品编号:075078-01

前　言

本习题册包含多种题型：选择题、填空题、计算题、证明题、综合题.除每章的总习题外，主要按难度划分为基础题、提高题、综合题、思考题.基础题直接考查较简单的基本概念、性质、公式和方法；提高题则是需要多步骤计算或者涉及本节多个知识点的题目，但也属于必须掌握的范畴；综合题涉及多章节的知识点；思考题主要涉及较难理解、较易混淆的知识点或者比较复杂的解题思路和求解过程.读者可以根据自己的需求选择相应难度的题目进行练习.建议高等数学的初学者在学习过程中采取循序渐进的策略.每一章的总习题未进行难度划分，因为考虑到该章的学习已经结束，读者应该已经掌握判断本章题目难度的能力.另外，本习题册每节都给出了知识提要，方便读者进行知识回顾.

为使读者能够在高等数学的学习过程中逐步养成利用数学思维来思考问题的习惯，为了锻炼读者利用数学方法解决问题的能力，本书在一些章中增加了“程序实现”部分，给出了一些简单的 MATLAB 程序题，该部分也给出了示例程序.读者可以借鉴这些程序，对给出的问题进行编程计算.需要注意的是：下册的“程序实现”部分所涉及的问题比上册更复杂，且多以上册为基础，故希望读者能先熟练上册的内容.另一方面，最后一章“微积分的应用”讲述了四个专题，限于习题册的篇幅，都只给出了一个问题的分析、推导和求解，供读者参考，了解高等数学的部分应用实例.

在本习题册的编写过程中，严宗元老师认真负责地审阅了全书，提出了许多宝贵的意见，改正了不少错误，极大地提高了习题册的质量.习题册初稿完成后，杨蕊老师独立地给出了大部分习题的解答，很大程度上保证了习题答案的正确性.对严宗元老师和杨蕊老师的无私帮助，表示衷心的感谢.

由于时间仓促，编者水平有限，书中难免有疏漏和不足之处，恳请广大读者和同行提出宝贵意见，以便日后做出修订，使本习题册更加完善.

编　者

2017 年 11 月于上海应用技术大学

目　录

第 8 章　向量代数与空间解析几何

习题 8-1　空间直角坐标系和空间向量的线性运算

知识提要

1. 空间直角坐标系的要点.

(1) 3 个坐标轴(x 轴,y 轴,z 轴)相互垂直,按顺序满足右手法则;

(2) 3 个单位向量(沿各坐标轴的正向):$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$,$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$,$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$;

(3) 3 个坐标面(yOz 平面,zOx 平面,xOy 平面)分别垂直于 3 个坐标轴;

(4) 8 个卦限.

2. 向量的线性运算:

$$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2),$$
$$\lambda(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z).$$

3. 向量的相关概念.

(1) 模(即长度):$r=|(x,y,z)|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

(2) 单位向量:$\boldsymbol{a}^\circ=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$;

(3) 方向角:向量与各坐标轴(x 轴,y 轴,z 轴)正向的夹角 α,β,γ;

(4) 方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$:设 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$,$r=|\boldsymbol{a}|$,则

(a) $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\boldsymbol{a}^\circ$;

(b) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$;

(c) $x=r\cos\alpha,y=r\cos\beta,z=r\cos\gamma$;

(5) 向量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影:$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$,其中 θ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 的夹角.

4. $(x_1,y_1,z_1)\,/\!/\,(x_2,y_2,z_2)\Leftrightarrow(x_1,y_1,z_1)=\lambda(x_2,y_2,z_2)$.

5. $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$.

6. 空间两点(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)的距离

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ ①.$$

基础题

1. 下列说法正确的是(　　).

A. $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 是单位向量

B. $-\boldsymbol{i}$ 是单位向量

C. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

D. 与 x,y,z 三坐标轴的正向夹角相等的向量,其方向角一定为$\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}$

---

① 此公式可推广到任意维数的直角坐标系. $n(\in\mathbf{Z}^+)$维直角坐标系中两点 $M_i(x_1^i,x_2^i,\cdots,x_n^i)(i=1,2)$的距离 $d=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k^2-x_k^1)^2}$.

2. 填空题.

(1) 点$(2,-1,3)$在第________卦限,它关于 yOz 平面的对称点为________;

(2) 点$(2,-1,-2)$到三坐标轴的距离分别为__________;

(3) 已知 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$, 则 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=$________;

(4) 已知向量$\overrightarrow{AB}=(2,4,1)$,点 $A(1,0,2)$,则 B 的坐标为________;

(5) 设 $\boldsymbol{a}=(x,3,2)$, $\boldsymbol{b}=(-1,y,4)$, 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 则 $x=$________, $y=$________;

(6) 平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$的单位向量为________;

(7) $\boldsymbol{a}=(4,2,1)$在 $\boldsymbol{b}=(2,1,2)$上的投影 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=$________.

3. 求点 $A(a,b,c)$关于各个坐标轴(x 轴,y 轴,z 轴)以及各个坐标面(yOz 平面,zOx 平面,xOy 平面)的对称点的坐标.

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3,-4)$, $\boldsymbol{b}=(5,-1,1)$, 求 $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 及其在 x 轴上的投影和在 y 轴上的分向量.

5. 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$, $M_2(3,0,2)$. 计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角,以及与它同向的单位向量.

提高题

6. 设点 $A(4,0,5)$, $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{14}$, 向量$\overrightarrow{AB}$的方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=-\dfrac{2}{\sqrt{14}}$, 则点 B 坐标为(　　).

A. $(10,2,1)$　　B. $(-10,-2,-1)$

C. $(6,2,-4)$　　D. $(-6,-2,4)$

7. 以点(1，−2，3)为球心，且通过坐标原点的球面方程为________________________________.

8. 已知点 $A(2,3,1)$ 和 $B(4,5,3)$.

(1) 求 z 轴上与 A,B 距离相等的点的坐标；

(2) 求 xOy 平面上与 A,B 距离相等的点的轨迹方程，并指明其图形的形状；

(3) 求三维空间中与 A,B 距离相等的点的轨迹方程，并指明其图形的形状.

9. 在 yOz 平面上，求与 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$ 等距离的点的坐标.

综合题

10. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

习题 8-2　空间向量的数量积和向量积

知识提要

1. 概念对比.

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$.

记号	结果	名称			读法	计算公式
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$	实数	数量积	内积	点积	$\boldsymbol{a}$ 点乘 $\boldsymbol{b}$	$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$
$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$	向量	向量积	外积	叉积	$\boldsymbol{a}$ 叉乘 $\boldsymbol{b}$	$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

2. 性质对比.

设 $\theta=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

数量积	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert^2$
向量积	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$
数量积	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos\theta$	$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$
向量积	$\lvert\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\rvert=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\sin\theta$	$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$

3. $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}/\lvert\boldsymbol{b}\rvert=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^\circ$，可理解为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上(带符号)的有效长度.

4. 应用.

(1) 数量积：向量夹角余弦 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$；

(2) 向量积：以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为边的三角形面积 $S=\dfrac{1}{2}\lvert\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\rvert$.

5. 意义对比.

运算	几何意义	物理意义举例
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$	在 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 方向上的有效长度的乘积	(常力沿固定方向)做功
$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$	垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$(张成的平面)的向量	(力对定点的)力矩

基础题

1. 选择题.

(1) 关于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，下列说法正确的是(　　)；

A. 它是平行于 $\boldsymbol{a}$ 但不平行于 $\boldsymbol{b}$ 的向量

B. 它是垂直于 $\boldsymbol{a}$ 但不垂直于 $\boldsymbol{b}$ 的向量

C. 它是垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量

D. 它是标量

(2) 向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的位置关系是(　　).

A. 斜交　　B. 平行　　C. 垂直　　D. 以上都不对

2. 填空题.

(1) 设向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\lambda\boldsymbol{k}$，则当 $\lambda=$________时，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，当 $\lambda=$________时，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；

(2) $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1,4)$，当 $\lambda=$________时，$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直；

(3) 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________，$\boldsymbol{a}\times3\boldsymbol{b}=$________，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

提高题

3. 选择题.

(1) 下列等式成立的是(　　)；

A. $\lvert\boldsymbol{a}\rvert\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

B. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

D. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$

(2) 设 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{4}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=($　　$)$；

A. $\sqrt{5}$　　B. $1+\sqrt{2}$　　C. 1　　D. 2

(3) 设三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足关系式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=($　　$)$.

A. $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$　　C. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$　　D. $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

4. 填空题.

(1) 设 $\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{n}=k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 若 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，则 $k=$________；

(2) 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都是单位向量，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$________；

(3) 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，则 $S_{\triangle OAB}=$________.

5. 设向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$ 平行，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$. 求 $\boldsymbol{x}$.

6. 设 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$. 试计算 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

7. 求同时垂直于 y 轴和 $\boldsymbol{a}=(3,6,-4)$ 的单位向量.

8. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,2,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-2,1)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

(2) 以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积；

(3) 向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影；

(4) 同时垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的单位向量.

9. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个非零不共线向量,求证:$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

综合题

10. 设 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1),\boldsymbol{b}=(1,-2,3),\boldsymbol{c}=(2,1,2)$. 向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直且 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{r}=14$. 试求 $\boldsymbol{r}$.

11. 设 $|\boldsymbol{a}|=4,|\boldsymbol{b}|=3,\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$. 求以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为边的三角形面积.

思考题

12. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则必有(　　).

A. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

B. $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

C. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

D. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

13. 设 $\boldsymbol{a}=(4,-3,2)$,$\boldsymbol{b}$ 与三个坐标轴的夹角相等且为锐角. 试求 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

14. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量,且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

15. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的交角为 $\frac{\pi}{4}$, $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, 求 $|(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|$.

习题 8-3　空间平面

知识提要

1. 平面方程.

(1) 点法式：$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0\Rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$（平面上以 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为起点的任意向量与法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 垂直）；

(2) 一般式：$Ax+By+Cz+D=0$；

(3) 截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，其中 a,b,c 分别为平面在 x,y,z 轴上的截距.

2. 两平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的关系，设 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$.

(1) 夹角余弦：$\cos\varphi=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$；

(2) 平行 $\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow(A_1,B_1,C_1)=\lambda(A_2,B_2,C_2)$；

(3) 垂直 $\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

3. 点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

基础题

1. 选择题.

(1) 平面 $2y-3z=0$(　　)；

A. 平行于 x 轴　　B. 经过 x 轴

C. 平行于 y 轴　　D. 经过 y 轴

(2) 点(1,2,1)到平面 $x+2y+2z-1=0$ 的距离为(　　)；

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

(3) 两平面 $x+y-z+1=0$ 与 $x-y=0$ 的夹角为(　　).

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{3\pi}{2}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

2. 填空题.

(1) 设平面 Π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，

(a) 当________时，Π 平行于 y 轴；

(b) 当________时，Π 过 z 轴；

(c) 当________时，Π 过原点；

(2) 过点 $M(2,9,-6)$ 且与向量 $\overrightarrow{OM}$ 垂直的平面方程为________；

(3) 平行于 zOx 平面且经过点 $M(2,-5,3)$ 的平面为________.

提高题

3. 过三点$(1,1,-1)$，$(-2,-2,2)$，$(1,-1,2)$的平面方程为________.

4. 某平面过点$(1,0,-1)$且平行于向量$\boldsymbol{a}=(2,1,1)$和$\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$. 试求此平面的方程.

5. 求通过z轴和点$(-3,1,2)$的平面方程.

6. 求过点$(5,-7,4)$且在三个坐标轴上的截距相等的平面方程.

7. 求过点$(1,-1,1)$且与两平面$x-y+z-1=0$及$2x+y+z+2=0$垂直的平面方程.

综合题

8. 某平面通过z轴且与平面$2x+y-\sqrt{5}=0$的夹角为$\frac{\pi}{4}$,试求它的方程.

习题 8-4　空间直线

知识提要

1. 直线方程.

(1) 点向式(对称式):

(a) $s /\!/ \overrightarrow{P_0P} \Leftrightarrow \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$;

(b) 理解:直线上以 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为起点的任意向量与方向向量 $s=(m,n,p)$ 平行;

(2) 参数式:$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt; \end{cases}$

(3) 一般式:

(a) $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0; \end{cases}$

(b) 理解:将直线视为两平面的交线;

(c) 方向向量 $s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$.

2. 两直线(方向向量分别为 s_1,s_2)的夹角余弦:$\cos\varphi=\dfrac{|s_1\cdot s_2|}{|s_1||s_2|}$.

3. 直线(方向向量为 s)与平面(法向量为 n)的关系.

(1) 夹角正弦:$\sin\varphi=\dfrac{|s\cdot n|}{|s||n|}$;

(2) 平行 $\Leftrightarrow s\perp n \Leftrightarrow s\cdot n=0$;

(3) 垂直 $\Leftrightarrow s /\!/ n \Leftrightarrow s=\lambda n$.

基础题

1. 填空题.

(1) 直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$ 的参数方程为__________;

(2) 直线 $\begin{cases} x=2t-2, \\ y=t+1, \\ z=t \end{cases}$ 的对称式方程为__________;

(3) 经过点 $(4,-1,3)$ 且平行于直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{5}$ 的直线方程为__________;

(4) 经过点 $(2,3,-5)$ 且垂直于平面 $9x-4y+3z-1=0$ 直线方程为__________;

(5) 直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{4}$ 与 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$ 的夹角为______.

提高题

2. 填空题.

(1) 过点 $(4,-1,3)$ 和 $(-1,0,2)$ 的直线方程为__________;

(2) 当 $\lambda=$______时,直线 $2x=3y=z-1$ 平行于平面 $4x+\lambda y+z=0$;

(3) 直线$\begin{cases}x-y+z=1,\\2x+y+z=4\end{cases}$的方向向量为__________,对称式方程为__________,参数式方程为__________.

3. 选择题.

(1) 直线 $x-1=y=z+1$ 与直线 $x=-(y-1)=\frac{z+1}{0}$的位置关系为(　　);

A. 垂直　　B. 平行　　C. 重合　　D. 异面

(2) 直线$\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$和平面 $4x-2y-2z+4=0$ 的位置关系为(　　);

A. 垂直　　B. 平行

C. 相交但不垂直　　D. 直线在平面上

(3) 直线$\frac{x}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$过原点且(　　);

A. 垂直于 x 轴　　B. 垂直于 y 轴

C. 垂直于 z 轴　　D. 以上都不对

(4) 下列方程是直线$\begin{cases}2x-y+z-9=0,\\3x-6y+z-27=0\end{cases}$的对称式方程的是(　　).

A. $\frac{x+2}{5}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-9}{-9}$　　B. $\frac{x-3}{5}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-9}$

C. $\frac{x+2}{5}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-9}{-9}$　　D. $\frac{x-3}{5}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{-9}$

4. 求过点$(1,-2,1)$且垂直于直线$\begin{cases}x+y-z+2=0,\\x-2y+z-3=0\end{cases}$的平面方程.

5. 求过点$(0,2,4)$且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

6. 求直线$\begin{cases}x+y+3z=0,\\x-y-z=0\end{cases}$与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角.

7. 求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z=0$ 上的投影.

综合题

8. 求过原点及直线 $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$ 的平面方程.

9. 求过点 $(-1,0,4)$ 且与直线 $\begin{cases}x+2y-z=1,\\ x+2y+2z=4\end{cases}$ 垂直,又与平面 $3x-4y+z-10=0$ 平行的直线方程.

思考题

10. 求点 $(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0,\\ 2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离.

11. 求直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0,\\ 3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

12. 总结以下几个问题的求解方法.

(1) 已知直线 L 为两平面 π_1,π_2 的交线(或平行于两平面的某条直线),求过某点 M 和 L 的平面方程;