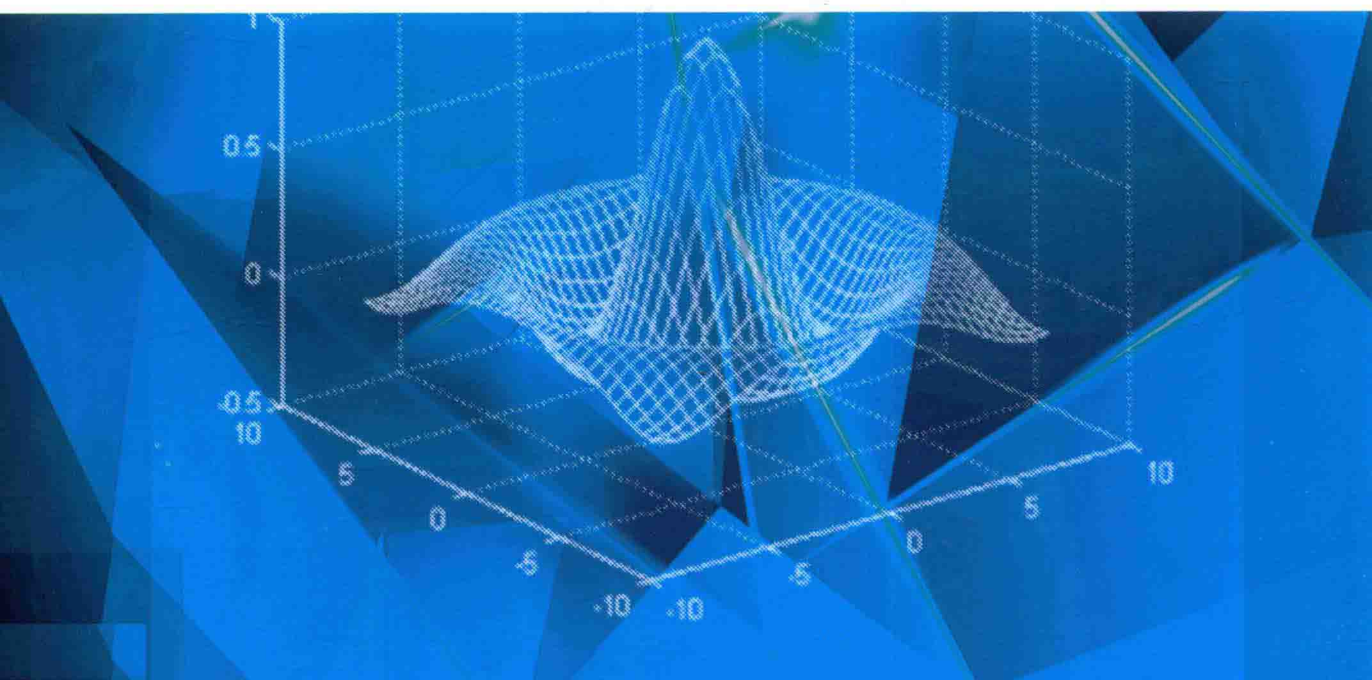
普通高等院校“十三五”规划教材

数学建模

SHUXUE JIANMO

主 编 傅海明 孙媛媛



河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS

普通高等院校“十三五”规划教材

SHUXUE JIANMO

数学建模

主　编　傅海明　孙媛媛
副主编　李再明　杨国翠　叶扩会

河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS
·郑州·

图书在版编目(CIP)数据

数学建模/傅海明,孙媛媛主编. —郑州:河南大学出版社,2016.8
ISBN 978-7-5649-2509-3

Ⅰ.①数… Ⅱ. ①傅… ②孙… Ⅲ.①数学模型-高等职业教育-教材 Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 200391 号

责任编辑 张雪彩
责任校对 李 蕾
装帧设计 郭 灿

出版发行 河南大学出版社
地址:郑州市郑东新区商务外环中华大厦 2401 号 邮编:450046
电话:0371-86059701(营销部) 网址:www.hupress.com
排 版 河南金河印务有限公司
印 刷 开封智圣印务有限公司
版 次 2017 年 1 月第 1 版
印 次 2017 年 1 月第 1 次印刷
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 10.25
字 数 243 千字
定 价 25.00 元

前　言

近半个多世纪以来,随着计算机技术的迅速发展,数学的应用不仅在工程技术、自然科学等领域发挥着越来越重要的作用,而且以空前的广度和深度向经济、管理、金融、生物、医学、环境、地质、人口、交通等新的领域渗透,所谓数学技术已经成为当代高新技术的重要组成部分.数学模型是一种模拟,是用数学符号、数学式子、程序、图形等对实际课题本质属性的抽象而又简洁的刻画,它或能解释某些客观现象,或能预测未来的发展规律,或能为控制某一现象的发展提供某种意义下的最优策略或较好策略.数学建模是在20世纪60和70年代进入一些西方国家大学的,中国的几所大学也在80年代初将数学建模引入课堂.经过30多年的发展,绝大多数本科院校和许多专科学校都开设了各种形式的数学建模课程和讲座,为培养学生利用数学方法分析、解决实际问题的能力开辟了一条有效的途径.

尽管数学建模在中国发展得如火如荼,数学建模竞赛也是每年举办一次,但是,目前国内市面上关于数学建模的书籍,绝大部分是针对本科生而设计的,并没有适合高职高专这一阶层学生的教科书或辅导用书,本书正是在这种大背景下编写的.我们根据自己多年来参加数学建模竞赛的实际经验,结合高职高专学生的实际水平,参考近几年高职高专数学建模竞赛的题型,详细地将数学建模分为五大类,并一一举例讲解,务求读者能看懂、吃透.同时,为了能更有效地帮助高职高专学生更快、更好地理解以及掌握数学建模的精髓,我们在书中用大量的例子为高职高专学生指明了一条道路,尤为值得一提的是,本书最后,选取了部分全国数学建模竞赛试题以供读者参考.鉴于此,本书是一本非常实用、非常贴近高职高专学生水平的指导用书.

由于编者的水平有限,书中难免存在不足之处,敬请读者提出宝贵意见,以求日臻完善.

编　者

2016.6.1

目 录

第 1 章　建立数学模型

§1.1　数学模型与数学建模

一、基本概念

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学，其产生以及许多重大发展都是和现实世界的生产活动和其他相应学科的需要密切相关的；同时，作为认识世界和改造世界的强有力的工具，它反过来又促进了科学技术和生产建设的发展. 特别在当今时代，由于计算机软、硬件的迅速发展和普及，数学方法被广泛应用于生产实践、社会管理的各个领域和层面. 对具体的应用问题或问题类进行合理的简化假设以及适当的抽象并最终表述为某种数学结构，即我们在这里讨论的数学模型，是现代生产实践与社会生活实现优化决策和科学管理的必要环节. 而数学建模则是指根据实际需要或最终管理目标，对现实问题构建数学模型，并对模型进行分析求解，最终将模型解翻译为决策方案应用于实际的一个由诸多环节组成的完整过程.

为理解现实对象与数学模型的关系，以下给出数学建模的一个流程图：

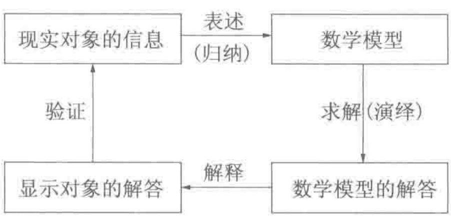


图 1－1

二、椅子的平稳放置问题

将(四脚)椅子置于不平的地面，通常只有三只脚着地，即放不稳；然而只需稍微挪动几次，就可以使四只脚同时着地，即放稳了. 这是我们在日常生活中遇到的一件很普通的

事情.这一现象究竟是偶然的呢,还是有其一定的必然性呢?下面这个数学模型给出了肯定的回答.

1. 模型假设

(1)椅子四条腿一样长,椅脚与地面接触处可视为一点,四脚的连线呈正方形.

(2)地面高度是连续变化的,沿任何方向都不会出现间断(没台阶),即地面可视为数学上的连续曲面.

(3)对于椅脚的间距和椅腿的长度而言,地面是相对平坦的,使椅子在任何位置上至少有三只脚同时着地.

将椅子的四只脚按逆时针方向依次编号为 A,B,C,D,选定某初始位置,如图 1-2 所示,规定 CA 所在直线为 x 轴,CA 中点为原点 O.

(4)挪动椅子时,保持椅子的中心与 O 正对,可以用 CA 与 x 轴正向夹角 θ 来表示椅子位置;以 $f(\theta)$,$g(\theta)$ 分别表示 (A,C),(B,D) 两组点离开地面的竖直距离.

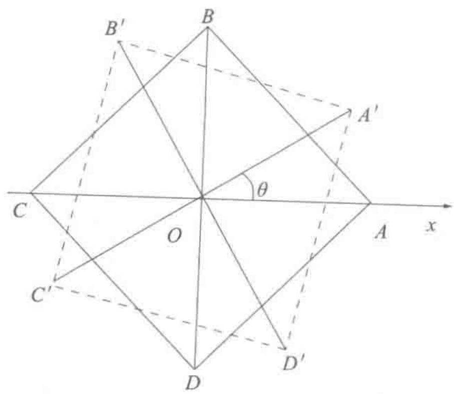


图 1-2

2. 模型建立与求解

(1)$f(\theta)$,$g(\theta)\geqslant 0$,且在 $[0,2\pi]$ 上连续.

(2)$f(\theta)\cdot g(\theta)\equiv 0(\forall\theta\in[0,2\pi])$.

(3)由于四椅脚中心对称,所以 $f\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=g(\theta)$,$g\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=f(\theta)$.

易知椅子放稳的条件为 $f(\theta)=g(\theta)=0$,因此可将椅子的平稳放置问题归结为:是否存在 $\theta_0\in[0,2\pi]$,满足 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

进一步讨论,若 $f(0)=g(0)=0$,即椅子的最初放置是平稳的;否则,不妨设 $f(0)>g(0)=0$,构造 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$,它同样在 $[0,2\pi]$ 上连续,于是有 $h(0)>0$,而 $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(0)-f(0)=-h(0)<0$. 所以,存在 $\theta_0\in[0,2\pi]$,满足 $h(\theta_0)=f(\theta_0)-g(\theta_0)=0$,结合 $f(\theta_0)\cdot g(\theta_0)=0$,得 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$,,即椅子在转动 θ_0 后被平稳地放置在地面上.

§1.2 数学建模的基本方法步骤

尽管现实世界中的应用问题表面上看起来形形色色、丰富多彩，但解决这些问题由其内在决定，就是要根据具体情况选择不同的方法以及与方法相适应的表现方式. 下面，我们将一些基本方法步骤归纳为图 1－3.

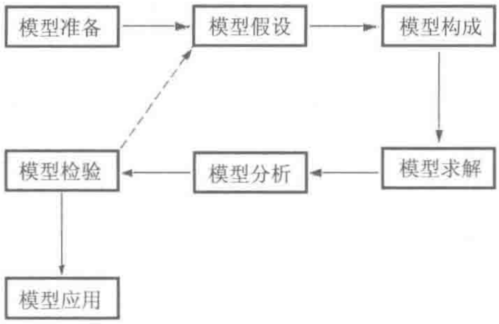


图 1－3

模型准备 了解问题的实际背景，明确建模的目的，搜集建模必需的各种信息、数据等.

模型假设 根据实际问题的特点和建模的目的，对问题进行合理的简化假设，这是建模最关键的一步，其基本内在决定了后续工作的展开和整个建模过程的成败. 因为影响一个现实事件的因素通常是多方面的，我们只能选择其中的主要影响因素以及它们中的主要矛盾予以考虑，但同时这种简化一定要合理，过分的简化会导致模型距离实际太远而变得失去建模的意义.

模型构成 在前面工作的基础上，将问题涉及的各个量符号化，以及各变量之间的内在联系形式化，利用适当的数学工具，将所关心的实际对象抽象为某个数学结构，可以是一个方程组的求解问题，也可以是一个最优化问题，也可以是其他问题等. 这一环节要求用尽可能清晰简洁的语言、符号和结构对经过简化的问题进行整理性的描述，只要做到准确和贴切简洁即可. 当然考虑到数学和应用数学学科的发展已足够成熟，也有大量的、丰富的概念与方法积淀，因此所建立的模型在表述上应尽可能符合一些已经成熟的规范，这也对建模者提出了更高的要求.

模型求解 根据所建模型的特点，采用适当的计算工具、计算方法，例如几何作图、数值计算等，经过一系列的计算，最终给出模型的解. 考虑到我们需要建模处理的通常是一大类型的问题，而数值计算却是针对某个特定问题求出具体结果，因此像解析法、归纳与演绎等逻辑方法会更能帮助我们得到更为一般和有意义的结果.

模型分析 对模型解答进行数学上的分析，比如根据问题的性质分析变量间的依赖关系，根据所得结果给出数学上的预报，在解的局部对模型中各参数和变量的微小扰动进行灵敏度、稳定性分析，在数值计算时还应对可能出现的误差进行分析等.

模型检验 把数学分析的结果解释为实际问题的解或方案,并用实际的现象、数据加以验证,检验模型的合理性和适用性.如果模型的结果距离实际太远,应当从改进模型的假设入手,可能是因为将一些重要的因素忽略了,也可能是将某些变量之间的关系作了过分简化的假设.如此,进入新一轮的建模分析,直到检验结果获得某种程度的满意,并最终将结果付诸实践,即模型的应用.

人口增长的建模

人类文明发展到今天,人们越来越意识到地球资源的有限性,我们感受到“地球在变小”,人口与资源之间的矛盾日益突出,人口问题已成为当今世界上最普遍关注的问题之一,当然人口增长规律的发现以及人口增长的预测,对一个国家制订比较长远的人口发展规划有着非常重要的意义.本节介绍几个经典的人口模型,也以此说明数学建模的一般步骤.

以 $P(t)$ 表示时刻 t 某地区(或国家)的人口数.

1. 指数增长模型(Malthus,1766~1834)

(1)模型假设.

① 时刻 t 人口增长的速率(即单位时间人口的增长量)与当时的人口数成正比,即人口的相对增长率为常数,记为 r.

② 设人口数 $P(t)$ 足够大,可以作为连续变量处理,且 $P(t)$ 关于 t 连续可微.

(2)模型建立及求解.

根据模型假设,得到如下初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=r\cdot P,\\ P(0)=P_0.\end{cases}$$

解之得 $P(t)=P_0\cdot \mathrm{e}^{rt}$.

(3)模型检验.

① 19 世纪以前欧洲一些地区的人口统计数据可以很好地与之吻合.但对于 19 世纪以后的许多国家,该模型遇到了很大的挑战.

② $\lim\limits_{t\to\infty}P_0\mathrm{e}^{rt}=+\infty$,地球是有限的,该模型不合常理.

2. 阻滞增长模型(Logistic)

一个模型的缺陷,通常可以在模型假设当中找到其症结所在,或者说,模型假设在数学建模过程中起着至关重要的作用,它决定了一个模型究竟可以走多远.在人口指数增长模型中,我们只考虑了人口数本身,这一个因素影响人口的增长速率,但事实上影响人口增长的另外一个重要因素就是资源,定性地分析,人口数与资源量对人口增长的贡献均应当是正向的.

(1)模型假设.

① 地球上的资源有限,不妨设为 1;而一个人的正常生存需要占用$\dfrac{1}{P^*}$(这里事实上也

内在地假定了地球的极限承载人口为 p^*).

② 在时刻 t,人口增长的速率与当时的人口数成正比,为简单起见也假设它与当时的剩余资源量 $s=1-\frac{p}{p^*}$成正比;比例系数 r^* 表示人口的固有增长率.

③ 设人口数 $p(t)$ 足够大,可以作为连续变量处理,且 $p(t)$ 关于 t 连续可微.

(2)模型建立及求解.

不难得到其数学模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=r^*\cdot p\cdot s,\\ s=1-\dfrac{p}{p^*},\\ p(0)=p_0.\end{cases}$$

化简得如下初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=r^*\cdot p\cdot\left(1-\dfrac{p}{p^*}\right),\\ p(0)=p_0,\end{cases}$$

解之得

$$p(t)=\frac{p^*}{1+\left(\dfrac{p^*}{p_0}-1\right)\cdot \mathrm{e}^{-r^*\cdot t}}.$$

(3)模型检验.

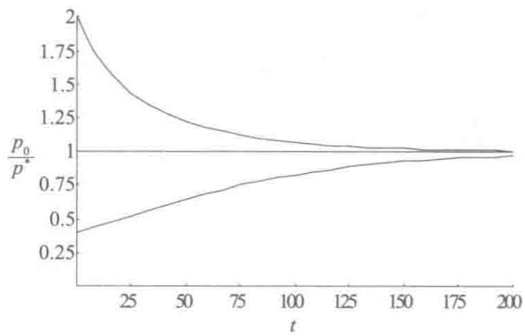


图 1-4

从图 1-4 可以看出,当人口数的初始值 $p_0>p^*$ 时,人口曲线(上面一条)单调递减,而当人口数的初始值 $p_0<p^*$ 时,人口曲线(下面一条)单调递增,但当 $t\to\infty$时,它们皆趋于 p^*.

阻滞增长模型从一定程度上克服了指数增长模型的不足,可以被用来做相对较长时期的人口预测,而指数增长模型在做人口的短期预测时因为其形式的相对简单性也常被采用.

不论是指数增长模型曲线还是阻滞增长模型曲线,它们有一个共同的特点,即均为单调曲线.但我们可以从一些有关我国人口预测的资料中发现这样的预测结果:在直到

2030 年这一段时期内,我国的人口将一直保持增加的势头,到 2030 年前后我国人口将达到峰值 16 亿,之后,将进入缓慢减少的过程,这是一条非单调的曲线,即说明其预测方法不是本节提到的两种方法中的任何一种. 还有比指数增长模型、阻滞增长模型更好的人口预测方法吗?

事实上,人口的预测是一个相当复杂的问题,除了受人口基数与可利用资源量影响外,还和医药卫生条件的改善、人们生育观念的变化等因素有关,特别是在做中短期预测时,我们希望得到满足一定预测精度的结果,比如刚刚经历过战争或是由于在特定的历史条件下采纳了特殊的人口政策等,这些因素本身以及由此而引起的人口年龄结构的变动就会变得相当重要,进而必须予以考虑.

习 题 1

1. 思考四椅脚呈矩形时的放置情形.

2. 某甲早 8:00 从山下旅店出发,沿一条路径上山,下午 5:00 到达山顶并留宿. 次日早 8:00 沿同一路径下山,下午 5:00 回到旅店. 某乙说,甲必在两天中的同一时刻经过路径中的同一地点. 为什么?

3. 37 支球队进行冠军争夺赛,每轮比赛中出场的每两支球队中的胜者及轮空者进入下一轮,直至比赛结束. 问:共需进行多少场比赛? 共需进行多少轮比赛? 如果是 n 支球队比赛呢?

第2章 初等模型

数学建模的核心是解决实际问题,而不在于所采用方法的深奥程度. 事实上,在对一个问题能够做到完好解决的前提下,朴素简洁性恰好是构成一个完美的数学模型或数学建模过程的一个重要侧面. 本章介绍的几个例子即能够用相对初等的方法得以很好地解决,这里强调选用怎样的工具通常是由问题本身的内在决定的,切忌为了炫耀方法而使问题的解决变得烦琐,这正如在良医的眼里,各种药材的价值在其用处及在行医过程中能做到对症,而不在其名贵程度.

§2.1 名额分配问题

问题 讨论一个学校中,三好学生评选名额在不同院系之间的公平分配问题. 问题产生的原因在于人数是一个整型量,因此在通常情况下不能严格保证各个院系(团体)最终分得的名额数与其人数取相同的比例,也即说对一个名额分配方案不能要求其在任何情况下均能做到绝对公平,但却可要求其分配结果的整体不公平程度尽可能降低.

表2-1反映的是当总名额数分别为20,21时,参照惯例在人数分别为103,63,34的三个不同系的分配结果. "惯例"在这里是指首先计算各系按照比例所应该分得的名额,然后取其整数部分作为各系第一阶段分到的名额,而在第二阶段将剩余的名额按照各系比例分配数的小数部分的大小取较大的几个系,在它们已分得名额的基础上各增加1个.

表2-1 三个系名额分配

系别	学生人数	所占比例	20个名额的分配		21个名额的分配	
			比例分配的名额	参照惯例的结果	比例分配的名额	参照惯例的结果
甲	103	51.5	10.3	10	10.815	11
乙	63	31.5	6.3	6	6.615	7
丙	34	17.0	3.4	4	3.57	3
总和	200	100	20.0	20	21.000	21

从表2-1中发现,在总名额数为20个时丙系可分到4个,而当总名额数增加之后,丙系分到的名额反降为3个. 这一"矛盾性结果"同样不符合我们对一个好的名额分配算

法的预期:假定各系人数已确定,考虑总名额数增加时,一个名额分配算法的结果至少须保证对每一系所最终分得的名额数不减.要解决这个问题必须舍弃所谓的惯例,找到衡量公平分配名额的指标,并由此建立新的分配方法.

一、A,B 两方名额的公平分配

A,B 双方人数分别记为 p_1,p_2,占有名额分别记为 n_1,n_2,每个名额分别代表的人数应为$\frac{p_1}{n_1},\frac{p_2}{n_2}$.

若$\frac{p_1}{n_1}=\frac{p_2}{n_2}$,则公平.

通常,人数、名额都为整数,若$\frac{p_1}{n_1}\neq\frac{p_2}{n_2}$,则不公平,$\frac{p_1}{n_1},\frac{p_2}{n_2}$数值较大的一方吃亏.

1. 建立数量指标

标准Ⅰ·绝对不公平指标:

不妨假设$\frac{p_1}{n_1}>\frac{p_2}{n_2}$,考虑$\frac{p_1}{n_1}-\frac{p_2}{n_2}$.

(1) $(p_1,p_2)=(120,100)$,$(n_1,n_2)=(10,10)$,则$\frac{p_1}{n_1}-\frac{p_2}{n_2}=12-10=2$.

(2) $(p_1,p_2)=(1020,1000)$,$(n_1,n_2)=(10,10)$,则$\frac{p_1}{n_1}-\frac{p_2}{n_2}=102-100=2$.

常识:(2)的公平程度相比(1)大为改善了.

标准Ⅱ·相对标准:

若$\frac{p_1}{n_1}>\frac{p_2}{n_2}$,则 $r_A(n_1,n_2)=\dfrac{\frac{p_1}{n_1}-\frac{p_2}{n_2}}{\frac{p_2}{n_2}}$,称之为相对于 B 对 A 的相对不公平值.

若$\frac{p_2}{n_2}>\frac{p_1}{n_1}$,则 $r_B(n_1,n_2)=\dfrac{\frac{p_2}{n_2}-\frac{p_1}{n_1}}{\frac{p_1}{n_1}}$,称之为相对于 A 对 B 的相对不公平值.

制定名额分配方案的原则是使它们尽可能小.

2. 确定分配方案

设(p_1,p_2)固定,(n_1,n_2)已分好,总名额数增加“1”.

不失一般性,设$\frac{p_1}{n_1}>\frac{p_2}{n_2}$,即对 A 不公平,这时只会有如下两种情形.

(1) 若$\frac{p_1}{n_1+1}>\frac{p_2}{n_2}$,则增加名额给 A.

(2) 若$\frac{p_1}{n_1+1}<\frac{p_2}{n_2}$,则增加名额给 A 将变为对 B 不公平,计算

$$r_B(n_1+1,n_2)=\frac{p_2(n_1+1)}{p_1n_2}-1.$$

这时显然有$\frac{p_1}{n_1}>\frac{p_2}{n_2+1}$,则增加名额给 B 将对 A 更为不公平,计算

$$r_A(n_1,n_2+1)=\frac{p_1(n_2+1)}{p_2n_1}-1.$$

公平分配名额的原则是使得相对不公平值尽可能小,所以若 $r_B(n_1+1,n_2)<r_A(n_1,n_2+1)$,则增加名额给 A,反之增加名额给 B.

二、Q - 值法与 m 方的名额分配

在 A,B 两方公平分配名额情况的讨论中,我们可以按照相对不公平指标来确定新增 1 个名额的归宿,等价于对 $Q_A=\frac{p_1^2}{n_1\cdot(n_1+1)}$与 $Q_B=\frac{p_2^2}{n_2\cdot(n_2+1)}$的比较,则二数中大的所对应的一方名额加 1.

不难将之推广到 m 方的名额分配的问题,归结为如下的 Q - 值法.

设有 m 个团体,$p_i(i=1,\cdots,m)$表示第 i 个团体的人数,$p=\sum\limits_{i=1}^{m}p_i$ 为总人数,$n_i(i=1,\cdots,m)$表示第 i 个团体分得的名额数,N 为总名额数.

第一步:令 $n_i=[N-\frac{p_i}{p}]$,计算 $Q_i=\frac{p_i^2}{n_i\cdot(n_i+1)}$,这里 $i=1,\cdots,m$.

第二步:令 $n=\sum\limits_{i=1}^{m}n_i$,若 $n=N$,停,则 $n_i(i=1,\cdots,m)$ 即为第 i 个团体最终分得的名额数,否则转第三步.

第三步:选最小的 i^*,使得 $Q_{i^*}=\max\{Q_i\mid i=1,\cdots,m\}$,$n_{i^*}=n_{i^*}+1$,$Q_{i^*}=\frac{p_{i^*}^2}{n_{i^*}\cdot(n_{i^*}+1)}$,转第二步.

作为 Q - 值法的应用,本文给出的三好学生名额的分配问题的结果为:(11,6,3)对应总名额数 20,(11,6,4)对应总名额数 21.

三、进一步讨论

事实上要我们说 Q - 值法与参照“惯例”的算法孰优孰劣是不适当的,它们遵循了两种不同的“公平”标准:Q - 值法关心一个团体的名额在增加与不增加 1 时对这个团体中个体的心理感受,而参照“惯例”的算法却是把一个团体视为一个整体来考察的.

Q - 值法的导出,是以其他团体的名额分配为参照来衡量一个团体名额分配中的相对不公平程度,事实上当总人数 p 与总名额数 N 一定时,以$\frac{p}{N}$这一客观标准作参照应当

更为合理,而由此导出的算法我们发现恰好是按照绝对不公平指标 $H_i=\frac{p_i}{n_i}(i=1,\cdots,m)$ 来决定新增加名额的归宿,将 Q - 值法中的 Q_i 都换为 H_i,得到的算法这里称为 H - 值法. 就文中算例而言,(10,6,4)对应总名额数 20,(10,7,4)对应总名额数 21.

我们也构造了一个对名额分配方案不公平程度的评价指标函数 $\max\{\frac{p_i}{n_i}\mid i=1,\cdots,m\}$,我们发现 H - 值法的结果优于 Q - 值法.

定理 2.1 设有 m 个团体,$p_i(i=1,\cdots,m)$表示第 i 个团体的人数,$p=\sum_{i=1}^{m}p_i$ 为总人数,N 为总名额数,$n_i^*(i=1,\cdots,m)$表示由 H - 值法给出的第 i 个团体分得的名额数,则 $n_i=n_i^*(i=1,\cdots,m)$必是最优化问题 $\min\{\max\{\frac{p_i}{n_i}\mid n_i$为非负整数,且 $\sum_{i=1}^{m}n_i=N\}\}$ 的最优解.

我们在文中建立不公平程度数量指标的讨论中,曾举例说明绝对不公平指标是有缺陷的,为了克服其缺陷而建立了相对不公平指标,并最终导出 Q - 值法;可是我们最终给出了 H - 值法的结果优于 Q - 值法的结论,当然从简单性方面来考察,H - 值法同样优于 Q - 值法. 而 H - 值法事实上即是绝对不公平指标,请读者试着找找本文的论证缺陷所在.

评注 读者除了寻找适当的数学方法解决名额的公平分配这一问题外,还应当从"建立了相对不公平指标并最终导出 Q - 值法"这一过程中得到启发. 尽管 Q - 值能否被发现并不影响名额分配的最终方案,但用 Q - 值法来表述会使得算法更加简洁有效,而且很容易将两个团体名额分配的算法推广到多个团体的情形,读者还需认真领会"内容"与"形式"的辨证关系.

至于 H - 值法的导出及其结果优于 Q - 值法的结论,也表明对一个数量大小的衡量在有客观标准存在时,我们宁愿以客观标准为参照;另外,在对实际应用问题分析建模的过程中,应养成自觉的否定和自我否定精神,当然这同样应当建立在严格求证的基础之上.

§2.2 双层玻璃窗的功效问题

问题 在北方城镇,许多建筑物的窗户是双层的,即在窗户上装两层玻璃且中间留有一定空隙,这样就减缓了室内外热量的交换,特别是在冬天,这样做的保暖效果是很有效的. 那么能否建立一个适当的数学模型分析其有效性,并给出相应的实用设计呢?

1. 模型假设

(1)热量的传播形式只考虑传导,没有对流,即假定窗户的密封性能很好,两层玻璃之间的空气是不流动的.

(2)室内温度 T_1 和室外温度 T_2 保持不变,热传导过程已处于稳定状态,即沿热传导方向,单位时间通过单位面积的热量是常数.

(3)玻璃材料均匀,热传导系数是常数 k_1,空气的热传导系数是常数 k_2.

2. 模型建立

物理定律　厚度为 d 的均匀介质,两侧温度差为 ΔT,则单位时间内由温度高的一侧向温度低的一侧通过单位面积的热量 Q,与 ΔT 成正比,与 d 成反比,即 $Q = k \cdot \dfrac{\Delta T}{d}$,$k$ 为热传导系数.

设 d,l 分别表示玻璃以及中间夹层的厚度,则由

$$Q = k_1 \frac{T_1 - T_a}{d} = k_2 \frac{T_a - T_b}{l} = k_1 \frac{T_b - T_2}{d},$$

消去 T_a,T_b,得

$$Q = \frac{k_1 \cdot k_2}{l \cdot k_1 + 2d \cdot k_2}(T_1 - T_2).$$

因为玻璃的规格通常是一定的,因此,在这里可将热量 Q 视为 l 的一元函数.

3. 模型求解

不难发现 $Q(l)$ 为一单调递减函数,因此在建筑材料与设计美观允许的前提下,应尽可能加大两层玻璃中间的空隙,即让 $Q(l)$ 尽可能小.

下面我们是从分析其功效的角度考虑的,我们以 $Q(0) = k_1 \dfrac{T_1 - T_2}{2d}$ 为参照,记 $h\left(\dfrac{l}{d}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{k_1}{2k_2} \cdot \dfrac{l}{d} + 1}$. 常用玻璃的导热系数 k_1 为 $4 \times 10^{-3} \sim 8 \times 10^{-3}$ J/(cm · s · ℃),做保守估计,取 $k_1 = 4 \times 10^{-3}$ J/(cm · s · ℃),干燥空气的导热系数为 $k_2 = 2.5 \times 10^{-4}$ J/(cm · s · ℃).

这时 $h\left(\dfrac{l}{d}\right) = \dfrac{1}{8 \cdot \dfrac{l}{d} + 1}$.

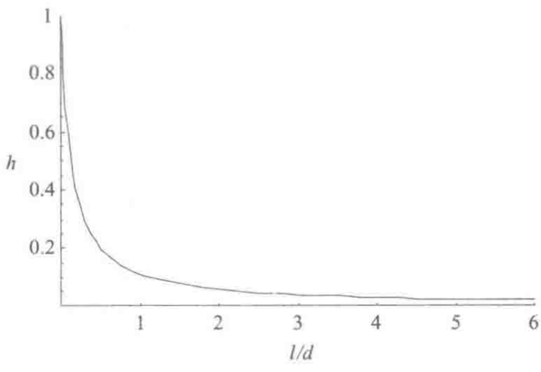


图 2-1

从图 2-1 可看出,当 l 由 0 增加时,曲线迅速下降,特别地,当 $l = 4d$ 时,窗户的散热