



新世纪高等学校规划教材·数学系列



北京市高等教育精品教材立项项目

泛函分析讲义

(第三版)

北京师范大学数学科学学院◎组编

孙永生 王昆扬◎编著

FANHAN FENXI JIANGYI



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社



新世纪高等学校规划教材·数学系列



北京市高等教育精品教材立项项目

泛函分析讲义

(第三版)

北京师范大学数学科学学院◎组编

孙永生 王昆扬◎编著

FANHAN FENXI JIANGYI



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析讲义 /孙永生,王昆扬编著. —3版. —北京:北京师范大学出版社, 2018.6

(新世纪高等学校规划教材·数学系列)

ISBN 978-7-303-23760-9

I. ①泛… II. ①孙…②王… III. ①泛函分析—高等学校—教材 IV. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 105299 号

营 销 中 心 电 话	010-62978190 62979006
北师出版科技与经管分社	www.jswsbook.com
电 子 信 箱	jswsbook@163.com

出版发行:北京师范大学出版社 www.bnup.com

北京市海淀区新街口外大街 19 号

邮政编码:100875

印 刷:保定市中华美凯印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:730 mm×980 mm 1/16

印 张:15.25

字 数:262 千字

版 次:2018 年 6 月第 3 版

印 次:2018 年 6 月第 1 次印刷

定 价:34.90 元

策划编辑:刘凤娟 岳昌庆 责任编辑:刘凤娟

美术编辑:刘 超 装帧设计:刘 超

责任校对:赵非非 责任印制:赵非非

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话:010-62978190

北京读者服务部电话:010-62979006-8021

外埠邮购电话:010-62978190

本书如有印装质量问题,请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话:010-62979006-8006

内容提要

本书包括六章, 内容如下:

第一章介绍距离空间的基本概念, 并介绍了压缩映射原理及其对于微分方程理论的应用.

第二章介绍线性赋范空间的基本概念以及线性赋范空间上的线性算子, 包括线性泛函的基本概念.

第三章介绍内积空间的概念, 着眼于无限维空间, 介绍了不一定可分的内积空间的标准正交基的概念.

第四章介绍线性算子和线性泛函的基本理论, 包括Baire纲推理的方法, 开映射定理, 逆算子定理, 闭图像定理, 一致有界原理(共鸣定理), 以及Hahn-Banach的连续线性泛函保范延拓定理.

第五章讲述共轭空间和伴随算子, 详细介绍了一致连续函数空间的共轭空间, p 次可积函数空间的共轭空间. 讲述了弱收敛和弱星收敛的概念. 还介绍了一般线性赋范空间上线性算子的伴随算子, 以及Hilbert空间伴随算子及自伴算子.

第六章讲述紧算子, 全连续算子的概念. 介绍了无限维空间上的全连续算子的Schauder不动点定理及其在微分方程理论中的应用. 讲述了Hilbert空间上的线性全连续算子的性质, 研究了全连续自伴算子的谱结构. 作为例子考察了具有Hermite型核的积分算子.

每节后均配有习题. 书后附有名词索引.

本书可供综合大学和高等师范院校数学专业作为教材或教学参考书.

北京师范大学数学科学学院简介

北京师范大学数学系成立于1922年，其前身为1915年创建的北京高等师范学校数理部，1983年成立数学与数学教育研究所，2004年成立数学科学学院。学院现有教师78人，其中教授36人，副教授31人；有博士学位的教师占96%。特别地，有中国科学院院士2人，第三世界科学院院士1人，国家千人计划2人，青年千人计划1人，全国高校教学名师奖1人，教育部长江学者奖励计划特聘教授3人(青年学者1人)和讲座教授1人，国家杰出(优秀)青年基金获得者3人(2人)，入选新世纪百千万人才工程国家级人选2人。现有全日制在校生1 225人，其中本科生913人，硕士研究生221人，博士研究生91人。

数学科学学院1981年获基础数学、概率论与数理统计博士学位授予权，1986年获应用数学博士学位授予权。1988年，基础数学、概率论与数理统计被评为国家重点学科。1990年建立了北京师范大学第一个博士后流动站。1996年，数学学科成为国家211工程重点建设的学科。1997年成为国家基础科学人才培养基金基地。1998年获数学一级学科博士学位授予权。2001年概率论方向被评为国家自然科学基金创新群体。2005年进入“985工程”科技创新基础建设平台。2007年数学被评为一级学科国家重点学科。2008年数学与应用数学专业师范教育方向获第一批高等学校特色专业建设点。2009年教育部数学与复杂系统重点实验室挂牌，分析类课程教学团队被评为国家级优秀教学团队，调和分析与流形的几何方向被评为教育部创新团队。2012年在高校第3轮数学一级学科评估中排第5名。2017年9月，数学学科进入世界一流建设学科名单。2017年10月，数学学科在美国新闻与世界报道(US News)联合汤森路透公司发布的2018世界最佳大学学科前100排名榜中列45位(2017,2016,2015年分列30,29,40位)，在内地高校中排名第3位。学院还有6个硕士点，8个教研室和《数学通报》杂志编辑部。

103年来，数学科学学院已毕业全日制本科生8 466人(不含辅仁大学数学系毕业生)。30多年来，已授予博士学位447人，硕士学位1 852人，研究生班毕业209人。据不完全统计，在博士毕业生中：有2人当选为中国科学院院士和1人当选为第三世界科学院院士，2人获全国高校教学名师奖，1人入选万人计划教学名师，3人任教育部长江学者特聘教授，1人获中国科学院百人计划，6人获国家杰出青年基金，4人获国家自然科学奖，3人获国家科技进步奖，2人获国家级有突出贡献的中青年专家称号，2人入选新世纪百千万人才工程国家级人选，2篇博士学位论文入选全国百篇优秀博士学位论文，5篇博士学位论文获全国百篇优秀博士学位论文提名奖。

(李仲来执笔) 2018-05-16

第三版编者的话

本书第一版是孙永生教授在多年讲课的基础上编写的，出版于30多年前，其后一直作为北京师范大学数学系（后为数学科学学院）本科生泛函分析课程的教材，也曾被其他一些兄弟院校采用。孙永生教授于2006年逝世。2007年本书做了部分修订后出版了第二版。这门课程，成为“北京师范大学分析类课程教学团队建设”项目的内容之一。后该团队被评为国家级优秀教学团队，并于2013年9月获第七届北京市高等教育教学成果奖二等奖。

为了配合本教材的使用，蒋铎、洪吉昌于1990年编写了《泛函分析讲义习题精解》（北京师范大学出版社，1990）。后来蒋铎教授逝世了。2007年，王晟博士与洪吉昌教授根据《泛函分析讲义》的第二版，对此“习题精解”作了补充修订，出版了《泛函分析讲义习题精解》第二版（北京师范大学出版社，2008）。

本书使用了30多年了，期间不少读者对于本书表示了热情的关注，指出过书中的疏漏之处。这次再版纠正的100多处错误，就包括他们所指正之处。借此机会，对他们一并表示诚挚的感谢。

王昆扬，2018年5月26日

第二版前言

1915年北京高等师范学校成立数理部,1922年成立数学系.2005年适逢数理部诞辰90周年,也是北京师范大学数学科学学院建院1周年.经过90年的风风雨雨,数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验.将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

1980年,北京师范大学出版社成立,给教材的出版提供了一个很好的契机.北京师范大学数学科学学院教师编著的数十种教材已先后在这里出版.除了北京师范大学现代数学丛书外,就大学教材而言,共有五种版本.第一种是列出编委会的高等学校教学用书,这是在1985年,由我校出版社王文涌先生约请北京师范大学数学与数学教育研究所所长严士健教授等组成编委会,研究编写出版一套数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材(共17部).在出版社的大力支持下,这一计划完全实现,满足了当时教学的需要.第二种是标注高等学校教学用书,但未列编委会的教材.第三种是(北京师范大学)面向21世纪课程教材.第四种是北京师范大学现代数学课程教材.第五种是未标注高等学校教学用书,但实际上是高等学校教学用书.在这些教材中,除再次印刷外,已经有五部教材进行了修订或出版了第二版.

前一段时间,王建华老师和王琦老师分别搜集了北京师范大学数学科学学院本科生的所有教材和研究生12门基础课教材的使用情况,李仲来教授汇总了北京师范大学数学科学学院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作,由李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商,由李仲来教授组编,准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用或誉印(出版社已经没有存书的教材)的北京师范大学出版社出版的部分教材进行修订后再版.计划用几年时间,出版数学及应用数学专业本科生、非数学专业本科生(大学数学基础课程)、课程与教学论、数学一级学科硕士研究生四个系列的主要课程教材.

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授(数学专业)和在职中学教师等使用和参考.

北京师范大学数学科学学院

2005-08-08

第二版编者的话

本书初版至今,已逾21年.其间曾多次在北京师范大学数学系(现为数学科学学院)作为教材使用.本人就曾用它讲过多次.

作为原著者孙永生教授的学生,我每次为学生讲这本书时,自己都首先从中获取宝贵的教益.不仅是在泛函分析学科的知识方面能有新的收获,更重要的是透过这本书,一次一次更深刻地感悟到先生的教学精神.正像先生在第一版前言中说的“本书力求不仅交待清楚证明过程的逻辑线索,而且尽可能地对证明的基本想法加以分析,同时揭示证明中使用的手法,以帮助学生理解其精神实质”.这几句话朴实无华,真正做到可并不容易.我觉得先生是做到了.他之所以能够做到,不但是由于他的学识过人,而且很重要的是由于他对于学生的满腔热情,为培养人才而无私奉献的精神.这就是我时时从这本书的字里行间感悟到的先生的教学精神.先生于去年不幸仙逝,但他的精神永远地留给了我们.这次再版,我竭力要坚持的,便是先生的此种精神.

在这种精神的指导下,根据20来年的教学实践,我尝试着对于书的内容安排作了一些调整.把原来的5章改编为6章,撤销了原来的第四章,把原第四章中的压缩映射原理及其应用调整到第一章.曾在多次教学实践中这样做过,似乎对于学生掌握距离空间比较方便.原第四章的Schauder不动点定理,以前常作为选读材料.这次被安排在更后一些的第六章,在介绍一般的不需要线性性质的全连续算子的时候来介绍,若课时允许,讲一讲这个定理也好.当然亦仍可作为选读材料.新加的第四章,着眼于强化对于线性算子的基本定理的学习.而第五章则意在加强对于伴随(共轭)理论的学习.以往学生对于弱收敛和弱星收敛的概念的掌握常有困难.集中起来讲,也许会起一点强化的作用.建议讲授学时72.

增加了几本参考书,有早年的也有近年的,也有供研究生用的.目的主要是供学有余力的学生参考.在本科教学中如何贯彻“因材施教”的思想,很值得重视和探索.

恳切希望读者不吝指正本次修订的不妥之处,把宝贵的意见用email发至
wangky@bnu.edu.cn .

王昆扬 于北京师范大学
2007年6月10日

第一版编者的话

这本书是以编者最近几年在北京师范大学数学系本科讲授泛函分析课的讲稿为基础写成的.全书共分五章.前三章介绍距离空间、线性赋范空间的基本知识.第四章介绍在分析中有广泛应用价值的不动点定理.第五章除了介绍Hilbert空间的基本知识外,着重叙述了Hilbert空间内全连续自伴算子的谱分解理论及其在古典分析中的实例.我们使用该教材的情况是,本书的基本内容(不包括加*号的部分)可以在60学时左右的时间内讲完.

我们在北京师范大学数学系讲授泛函分析的过程中了解到,不少的数学系三、四年级学生在学习这门课时还感到很困难.他们不但难于理解其一系列的抽象概念,尤其难于掌握其高度概括的证明方法和解题技巧.针对这种情况,本书在引入基本概念的时候,力求联系学生在代数、几何、数学分析、实函数论和微分方程等基础课中已经学过的数学知识,举出较多能为学生理解的例子,以增加学生的感性认识.在一些重要定理的证明中,本书力求不仅交待清楚证明过程的逻辑线索,而且尽可能地对证明的基本想法加以分析,同时揭示证明中使用的手法,以帮助学生理解其精神实质.

本书围绕着每一单元的主题都配备了一定数量的例题和习题,这些都是课程内容的重要组成部分.当然,例题并不需要都在课堂上讲解,有些可以留给学生自己阅读.本书的课文中有些简单定理的证明或一个复杂证明的某一个环节被省略了,这是编者有意这样做的.把这些简单的事实或证明的细节留给学生去补充,对于培养学生独立钻研能力或许有所帮助.本书中习题的难度参差不齐.为了较好地掌握课程的内容,光挑容易的题目做是不够的,学生至少需要独立做一部分较难的题.

在本书编写的过程中我们参考了许多泛函分析的著名的教科书和专著.其中主要有

- 1.夏道行等《实变函数论与泛函分析》上下册,人民教育出版社,1978, 1979, 北京.
- 2.郑维行、王声望《实变函数与泛函分析概要》,第一、二册,人民教育出版社,1980,北京.
- 3.关肇直《泛函分析讲义》,高等教育出版社,1958, 北京.

特别说明:我们从包括上面这些书在内的很多泛函分析的著作中选择了例题、习题,并且汲取了它们处理教材的一些独到的地方.这里就不一一列举了.

在本书的编写过程中,得到了蒋硕民老师的热情关怀和支持. 蒋铎, 洪吉昌, 韩丽娟, 钱佩玲等同志在教学中试用了本书的油印稿, 他们帮助改正了原稿中的多处错误和不足之处. 特别是蒋铎, 洪吉昌二位同志在紧张的教学之余, 仔细审查了本书的全部习题, 并为之配备了解法提示. 我向以上各位老师和同志表示衷心感谢. 最后, 由于编者水平有限, 本书定有不妥之处, 衷心希望读者予以指正.

孙永生谨识

1985年9月15日于北京师范大学

关于记号的说明

一个特别常用的记号是 $:=$ 和 $\equiv$, 式子 $a := b$ 和 $b \equiv a$ 都表示“ a ”是用“ b ”定义的, 也就是说, 挨着冒号的符号是用挨着等号的表达式来定义的.

另一个特别常用的记号是 $\{x : x \text{ 满足的条件}\}$, 它表示一个集合, 如果它的元素用字母 x 表示的话, 则冒号后面的语句确定 x 的属性, 这个集合就是具有这种属性的元素的全体.

本书使用以下符合国家标准的通用数学记号:

$\mathbb{N}_+$: 正整数集;

$\mathbb{Z}$: 整数集;

$\mathbb{Q}$: 比例数(rational number)(俗称有理数)集;

$\mathbb{R}$: 实数集, 或一维Euclid空间, 或实直线;

$\mathbb{C}$: 复数集.

另外的一些通用的数学记号是:

$\text{card } A$: 集合 A 的基数;

$\mathbb{R}^n$: n 维Euclid空间;

若 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 $|E|$ 表示 E 的Lebesgue测度;

若 E 是集合, 则 χ_E 代表 E 的特征函数, 即

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

a.e. 表示几乎处处(almost everywhere)或(对于)几乎每个(for almost every).

目录

第一章 距离空间	1
§1 基本概念	1
习题一	19
§2 完备性	23
习题二	30
§3 列紧性	32
习题三	43
§4 压缩映射原理及其应用	45
习题四	53
§5 线性距离空间	55
习题五	57
第二章 线性赋范空间	59
§1 定义和简单性质	59
习题一	68
§2 有限维线性赋范空间	70
习题二	74
§3 线性赋范空间上的线性算子	75
习题三	82
§4 算子赋范空间和线性泛函	84
习题四	90
第三章 内积空间	93

§1 定义和简单性质	93
§2 正交性及正交分解	100
§3 标准正交系	103
习 题	112
第四章 线性算子和线性泛函	115
§1 算子代数	115
习题一	123
§2 纲推理及开映射定理	124
习题二	131
§3 一致有界性定理	132
习题三	143
§4 Hahn-Banach 线性泛函延拓定理	144
习题四	151
第五章 共轭空间与伴随算子	153
§1 几个具体空间的共轭空间	153
习题一	164
§2 二次共轭空间, 自反性	166
习题二	169
§3 弱收敛和弱星收敛	170
习题三	175
§4 伴随算子	177
习题四	186
第六章 全连续算子及其谱	187
§1 全连续算子	187
习题一	192
§2 Hilbert空间上的线性全连续算子	193
习题二	197
§3 H 空间上全连续自伴算子的谱	199
习题三	215
§4 具有Hermite型核的积分算子	217

习题四	222
参考文献	223
索引	225

第一章 距离空间

泛函分析是起源于古典分析的一个数学分支,其研究对象主要是定义在无限维空间上的映射(算子).正如在数学分析中实数域起着基本作用一样,在泛函分析中各种类型的抽象空间起着基本的作用.所谓抽象空间,就是在其元素间规定了某种关系的集合,而这种关系通常是借助于一组公理来刻画的.本章要讨论的距离空间便是一类基本的抽象空间.所谓距离空间乃是一个在其中规定了距离的集合.我们在本章将借助于距离空间内的极限概念,对涉及极限过程的一些基本概念做较广泛的讨论.

§1 基本概念

1.1 距离空间的定义和例

距离的概念是现实物质世界中物体之间距离关系的本质特征的数学抽象.

定义1.1-1 给定非空集 X ,实数集 $\mathbb{R}$.如果存在一个 $X \times X^1$ 到 $\mathbb{R}$ 的二元函数 $\rho(x, y)$ 满足条件

(1) $\rho(x, x) = 0$; $\rho(x, y) > 0$ 对 $x \neq y$ 成立,

(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (对称性),

(3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (三点不等式),

则称 X 是以 ρ 为距离的距离空间,简记为 (X, ρ) . ρ 称为 X 上的一个距离函数. $\rho(x, y)$ 称为 x, y 的距离.距离空间中的元素也叫做点.

给定距离空间 (X, ρ) , X 的非空子集 Y 按照距离 ρ 也是一个距离空间,称为 X 的子空间. Y 的距离函数是 $\rho(x, y)$ 在 $Y \times Y$ 上的限制,称为 ρ 在 Y 上的导出距离.

有了距离空间概念,就可以像数学分析中一样定义点列的收敛概念.

¹ $X \times X$ 表示卡式积,即由一切序偶 (x, y) 所成之集,这里 $x, y \in X$.

定义1.1-2 设 $x_n (n = 1, 2, 3, \dots)$, $x_0 \in X = (X, \rho)$, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$, 则称点列 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0 , 记作 $x_n \rightarrow x_0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

下面给出距离函数和收敛点列的一些简单命题, 它们皆可由定义直接导出.

命题1.1-1 $\forall x, y, z, u \in X = (X, \rho)$ 有

$$|\rho(x, y) - \rho(z, u)| \leq \rho(x, z) + \rho(y, u). \quad (1.1)$$

证 由三点不等式得

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, u) + \rho(u, y), \quad \rho(z, u) \leq \rho(z, x) + \rho(x, y) + \rho(y, u).$$

由此, 并利用 ρ 的对称性得

$$\pm(\rho(x, y) - \rho(z, u)) \leq \rho(x, z) + \rho(y, u). \quad \square$$

命题1.1-2 距离空间内的点列至多收敛到一个点.

证 设 $\{x_n\} \subset X$, x', x'' 是其极限. 则有

$$\rho(x', x'') \leq \rho(x', x_n) + \rho(x_n, x''), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

由 $\rho(x', x_n) \rightarrow 0, \rho(x'', x_n) \rightarrow 0$ 得 $\rho(x', x'') = 0$, 从而 $x' = x''$. $\square$

命题1.1-3 距离函数 $\rho(x, y)$ 是两个变元的连续函数, 即若 $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$, 则 $\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x_0, y_0)$.

证 由命题1.1-1得

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0)| \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0),$$

从而 $\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x_0, y_0)$. $\square$

距离空间中的收敛点列还具有普通的收敛数列所具有的某些别的属性, 比如有界性. 我们下面给出距离空间中有界集的定义.

定义1.1-3 给定 (X, ρ) , $x_0 \in X, r > 0$. 点集 $B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$ 叫做 X 内以 x_0 为中心, r 为半径的**开球**.

设 $A \subset X$. 如果存在一个 X 内的开球 $B(x_0, r) \supset A$, 那么就称 A 是 X 内的**有界集**.

命题1.1-4 距离空间内的收敛点列是有界集.

证 设 $x_n \rightarrow x_0$. 取 $\varepsilon = 1$, 则有自然数 N , 对一切 $n > N$ 都有 $\rho(x_n, x_0) < 1$. 记 $a = \max\{\rho(x_1, x_0), \dots, \rho(x_N, x_0)\}$ 便得

$$\rho(x_n, x_0) < 1 + a, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \square$$

下面给出距离空间的几个具体例子, 并且解释在这些空间内点列收敛性的具体含义.

例1.1-1 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$. 其元素是一切形如 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 的 n 元有序实数组. $\mathbb{R}^n$ 内任意两点 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ 的距离, 常叫做**Euclid距离**, 由下式给出

$$\rho(x, y) = \left\{ \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.2)$$

$\rho(x, y)$ 满足定义1.1-1的三个条件. 条件(1)、(2)是明显的. 仅需验证三点不等式. 为此先建立

Schwarz 不等式 任给 $2n$ 个实数 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, 有

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2. \quad (1.3)$$

事实上, 任取实数 λ , 则由

$$0 \leq \sum_{k=1}^n (a_k + \lambda b_k)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^n a_k b_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^n b_k^2,$$

知右端二次三项式的判别式不大于零, 这便是(1.3). 由Schwarz 不等式易得

Minkowski 不等式 任给 $2n$ 个实数 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, 有

$$\left\{ \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \sum_{k=1}^n a_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{k=1}^n b_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.4)$$

事实上, 由(1.3)得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\ &= \left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2. \end{aligned}$$

这就证明了(1.4).

由(1.4), 只需令 $a_k = x_k - y_k$, $b_k = y_k - z_k$, $k = 1, \dots, n$, 这里 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, 便得到三点不等式.