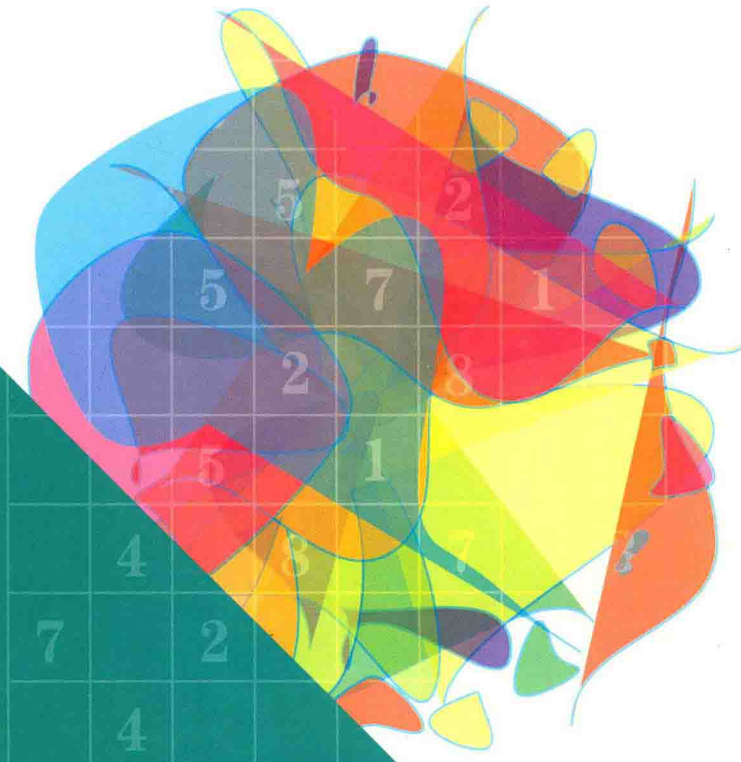
学数学丛书

全国高中数学联赛模拟试题精选

本书编委会 编



中国科学技术大学出版社

学数学丛书

全国高中数学联赛模拟试题精选

本书编委会

顾　问（按姓氏拼音排序）

常庚哲　陈　计　陈传理　冯跃峰
李尚志　林　常　刘裕文　单　墫
史济怀　苏　淳　苏建一　张景中
朱华伟

主　任　费振鹏
副主任　李　红
主　编　李　潜

编　委（按姓氏拼音排序）

安振平　蔡玉书　曹珏赟　程汉波
傅乐新　甘志国　顾　滨　顾冬华
韩京俊　雷　勇　李　伟　李昌勇
刘凯峰　刘利益　卢秀军　吕海柱
彭翕成　王慧兴　王永喜　武炳杰
肖向兵　闫伟锋　严文兰　杨　颙
杨全会　杨志明　张　雷　赵　斌

中国科学技术大学出版社

内容简介

本书第一部分包含24套全国高中数学联赛的模拟试题，第二部分包含2013—2016年历届“学数学”数学奥林匹克邀请赛试题. 所有试题均由《学数学丛书》编委会组织国内知名专家精心命制，来源广泛，尽可能地回避了市面上常见资料中的问题，且难度适中，具有较高的训练价值.

本书是优秀中学生参加数学竞赛的必备资料，也适合高中数学教师尤其是数学竞赛教练员研修参考.

图书在版编目(CIP)数据

全国高中数学联赛模拟试题精选/本书编委会编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2017.5(2017.6重印)
(学数学丛书)
ISBN 978-7-312-04198-3

Ⅰ. 全… Ⅱ. 本… Ⅲ. 中学数学课—高中—习题集 Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第066990号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号，230026
http://press.ustc.edu.cn
https://zgkxjsdxcbs.tmall.com
印刷 合肥市宏基印刷有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 787 mm×1092 mm 1/16
印张 23.25
字数 522千
版次 2017年5月第1版
印次 2017年6月第2次印刷
印数 5001—10000册
定价 58.00元

前　言

2013 年起,《学数学丛书》编委会开始陆续组织一些与数学竞赛相关的活动, 其中比较有代表性的就是每年的全国高中数学联赛考前强化冲刺班和“学数学”数学奥林匹克邀请赛.

为了帮助参赛选手准备全国高中数学联赛, 每年联赛前, 我们都会组织一次为期半个月的全国高中数学联赛考前强化冲刺班. 这个班采用讲练结合的方式, 在邀请知名数学奥林匹克专家和优秀中青年教练授课的基础上, 还会安排多次全国高中数学联赛的模拟训练, 对学员的学习水平和状态进行跟踪掌握. 这些训练题来源广泛, 难度适中, 并且我们在选题时也尽可能地回避了市面上常见资料中的问题, 所以这些题目具有较高的训练价值. 在几年的实践中, 我们逐渐探索出了一套行之有效的赛前训练体系, 这对参赛选手保持状态、提高临场发挥水平起到了积极的作用, 相当数量的选手在随后的全国高中数学联赛中取得了理想的成绩. 本书的第一部分就是在这些训练题的基础上精心整理汇编而成的. 我们并不主张参赛选手做过多成套的模拟试题 (事实上, 对弱项进行针对性训练效果更好), 在赛前适当地选择一些质量较高的试题进行训练足矣. 希望我们选编的这些试题能使读者有所收获.

本书的第二部分是历届“学数学”数学奥林匹克邀请赛试题汇编. “学数学”数学奥林匹克邀请赛是由《学数学丛书》编委会发起并主办的一项面向高中数学竞赛选手的赛事. 该赛事旨在为各地教练和选手搭建一个交流、切磋的平台. 邀请赛形式灵活, 在学校报名后, 由组委会提前将试题电子版通过电子邮件发送至参赛学校, 再由参赛学校负责试卷印制、监考等工作, 并在考完后将答卷收齐寄至组委会统一评阅. 自 2013 年首次举办以来, “学数学”数学奥林匹克邀请赛得到了各方的关心和支持, 单墫教授亲自为赛事提供试题并撰写点评, 武钢三

中、成都七中、东北师大附中、深圳中学、长沙雅礼中学等数学奥林匹克传统强校也先后加入到邀请赛的行列. 目前, 每届邀请赛分春季赛、秋季赛两次举行. 春季赛于 4 月中旬举行, 试题均为解答题, 突出趣味性; 秋季赛于 8 月下旬举行, 按照全国高中数学联赛设置题型, 是一次权威的赛前演练. 每次邀请赛试题均由《学数学丛书》编委会组织专家精心命制, 具有较高的训练价值. 我们将在赛事命题、组织等环节继续努力, 将赛题做成精品, 让 "学数学" 数学奥林匹克邀请赛成为在全国真正有影响力的赛事.

本书的出版得到了中国科学技术大学出版社的大力支持和帮助, 书中部分试题选自林常、李建泉、萧振纲、叶中豪、纪春岗、黄利兵、安振平、李昌勇、刘凯峰等老师与编者交流的资料, 在此一并表示感谢. 由于编者水平有限, 书中错误和疏漏之处在所难免, 敬请读者指正.

编　者

2016 年 12 月

目　　录

第二部分　历届“学数学”数学奥林匹克邀请赛试题

第一部分

全国高中数学联赛模拟试题

全国高中数学联赛模拟试题（1）

第　一　试

一、填空题 (本题满分 64 分, 每小题 8 分)

1. 在金属丝制作的 $3\times4\times7$ 的长方体框架中放置着一个球, 则该球的半径的最大值为 ________.

2. 双曲线的左、右两焦点分别为 F_1, F_2, 一条过 F_2 的直线与双曲线的右支交于 A, B 两点. 若 $\triangle F_1AB$ 是正三角形, 则双曲线的离心率是 ________.

3. 已知正实数 a, b, c 满足 $a+b+c=1$, 则 $a+\sqrt{b}+\sqrt[3]{c}$ 的最大值是 ________.

4. 从 9 位同学中选出 5 位组成班委会, 要求甲、乙二人或者同时入选, 或者同时不入选, 丙、丁二人不同时入选, 则符合要求的选法共有 ________ 种 (用数字作答) .

5. 已知在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC=\sqrt{5}$, 点 D, E, F 分别在边 AB, BC, CA 上, 且 $AD=DB=EF=1$. 若 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}\leqslant\dfrac{25}{16}$, 则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BA}$ 的取值范围是 ________.

6. 圆周上每个点都被染为红、黄、蓝三色之一, 并且三种颜色的点都有. 现从圆周上任取 n 个点, 若其中总存在三个点构成三个顶点同色的钝角三角形, 则 n 的最小可能值为 ________.

7. 已知 $\alpha,\beta\in[0,\pi]$, 则 $(\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta))\cdot\sin\beta$ 的最大值是 ________.

8. 设 $\dfrac{1}{1-x-x^2-x^3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 若 $a_{n-1}=n^2$, 则 n 的取值集合为 ________.

二、解答题 (本题满分 56 分)

9. (16 分) 求函数 $f(x)=2x^2+x\sqrt{4x^2-3}$ 的值域.

10. (20 分) 如图 1, 在平面直角坐标系 xOy 中, 以点 P 为圆心的圆 $\odot P$ 与双曲线 $xy=1$ 相交于点 A, B, C, D. 记线段 AB, CD 的中点分别为 E, F, 求证: 四边形 $OEPF$ 为平行四边形.

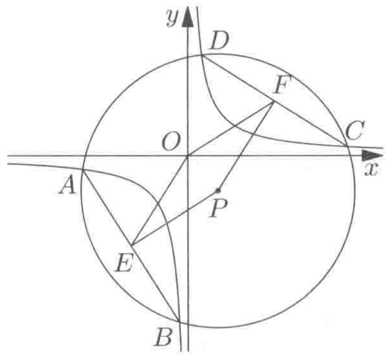


图 1

11. (20 分) 一条直路上依次有 $2n+1$ 棵树 $T_1,T_2,\cdots,T_{2n+1}$ (n 为给定的正整数). 一个醉汉从中间位置的树 T_{n+1} 出发, 并按以下规律在这些树之间随机游走 n 分钟: 当他某一分钟末在树 T_i $(2\leqslant i\leqslant 2n)$ 位置时, 下一分钟末他分别有 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ 的概率到达 T_{i-1}, T_i, T_{i+1} 位置.

(1) 求醉汉第 n 分钟末处在每棵树 T_i $(1\leqslant i\leqslant 2n+1)$ 位置的概率;

(2) 设相邻两棵树之间的距离为 1, 试求醉汉第 n 分钟末与起始位置 (即树 T_{n+1}) 之间的距离的数学期望 (用关于 n 的最简形式表示).

第 二 试

一 (本题满分 40 分)

在 $\triangle ABC$ 中, Γ_1 是过点 B 且与 CA 相切于 A 的圆, Γ_2 是过点 C 且与 AB 相切于 A 的圆, 圆 Γ_1 与圆 Γ_2 相交于 A, D 两点, 直线 AD 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于 E. 求证: D 为 AE 的中点.

二 (本题满分 40 分)

求出能表示为

$$n=\frac{(a+b+c)^2}{abc}\quad (a,b,c\in\mathbf{N}^*)$$

的所有正整数 n.

三 (本题满分 50 分)

设 $c_1,c_2,\cdots$ 为正整数数列, 且对任意满足 $1\leqslant m\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}c_i$ 的正整数 m, n, 存在正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 使得

$$m=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{a_i}.$$

试对每一个固定的 $i\ (i\in\mathbf{N}^*)$, 求 c_i 的最大值.

四 (本题满分 50 分)

$n\ (n\geqslant 4)$ 支足球队参加单循环赛, 每两队赛一场, 每场胜方得 3 分, 负方得 0 分, 平局各得 1 分. 赛后发现, 各队的总分构成公差为 1 的等差数列, 求最后一名得分的最大值.

参考答案

第 一 试

一、填空题

1. $\dfrac{5}{2}$.

如果沿着长方体的长边观察所放置的球, 显然, 它的直径不能超过尺寸为 3×4 的长方形的外接圆的直径, 即它的直径不超过 $\sqrt{3^2+4^2}=5$, 故该球的半径的最大值为 $\dfrac{5}{2}$.

2. $\sqrt{3}$.

设双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$, 半焦距为 c, 则 $c^2=a^2+b^2$. 由

$$|F_1A|-|F_2A|=|F_1B|-|F_2B|=2a,\quad |F_1A|=|F_2A|+|F_2B|=|F_1B|,$$

解得 $|F_2A|=|F_2B|=2a$. 这表明 $AB\perp x$ 轴, 又易知此时 $|F_2A|=|F_2B|=\dfrac{b^2}{a}$, 结合 $c^2=a^2+b^2$, 解得双曲线的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{3}$.

3. $\dfrac{5}{4}+\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

由均值不等式, 得

$$\begin{aligned}&b+\frac{1}{4}\geqslant\sqrt{b},\\ &c+\frac{2}{3\sqrt{3}}=c+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\geqslant 3\sqrt[3]{c\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt[3]{c},\end{aligned}$$

所以

$$a+\sqrt{b}+\sqrt[3]{c}\leqslant a+b+\frac{1}{4}+c+\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{5}{4}+\frac{2\sqrt{3}}{9},$$

等号当且仅当 $a=\frac{3}{4}-\frac{1}{3\sqrt{3}}, b=\frac{1}{4}, c=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ 时成立.

因此, 所求的最大值为 $\frac{5}{4}+\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

4. 41.

当甲、乙同时入选时, 有 $C_7^3=35$ 种方法选择其他的成员, 而其中丙、丁同时入选的选法有 $C_5^1=5$ 种; 当甲、乙同时不入选时, 有 $C_7^5=21$ 种方法选择其他的成员, 而其中丙、丁同时入选的选法有 $C_5^3=10$ 种. 因此, 满足要求的选法共有 $(35-5)+(21-10)=41$ 种.

5. $\left[\frac{4}{3},2\right]$.

以 D 为原点, 射线 DB, DC 分别为 x, y 轴正方向建立平面直角坐标系, 则 $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,2)$. 设点 $E(x_1,y_1)$, $F(x_2,y_2)$, 其中, $y_1=-2x_1+2$, $y_2=2x_2+2$. 设线段 EF 的中点为 $M(x_0,y_0)$, 则

$$\begin{cases} y_1-y_2=-2(x_1+x_2)=-4x_0, \\ x_1-x_2=2-\dfrac{y_1+y_2}{2}=2-y_0. \end{cases}$$

由 $EF=1$, 可得

$$(4x_0)^2+(2-y_0)^2=1. \qquad ①$$

于是, $(4x_0)^2=1-(2-y_0)^2\geqslant 0$, 解得

$$1\leqslant y_0\leqslant 3. \qquad ②$$

又

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=\frac{1}{4}\left(\left(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF}\right)^2-\left(\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DF}\right)^2\right)=\overrightarrow{DM}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{EF}^2=\overrightarrow{DM}^2-\frac{1}{4}\leqslant\frac{25}{16},$$

即 $\overrightarrow{DM}^2\leqslant\frac{29}{16}$, 亦即

$$x_0^2+y_0^2\leqslant\frac{29}{16}. \qquad ③$$

将式 ① 代入式 ③, 消去 x_0, 整理得 $15y_0^2-4y_0-32\leqslant 0$, 解得

$$-\frac{8}{5}\leqslant y_0\leqslant\frac{4}{3}, \qquad ④$$

综合式 ②, ④, 可得 $1\leqslant y_0\leqslant\frac{4}{3}$, 则 $\frac{2}{3}\leqslant x_1-x_2\leqslant 1$, 因此

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BA}=(x_2-x_1,y_2-y_1)\cdot(-2,0)=2(x_1-x_2)\in\left[\frac{4}{3},2\right].$$

6. 13.

首先说明 $n \geqslant 13$. 若 $n \geqslant 13$, 根据抽屉原则, 知这 n 个点中一定存在 $\left[\dfrac{13-1}{3}\right]+1=5$ 个点同色 (不妨设为红色). 任取 5 个红色点, 易知总存在一条直径, 它的端点不属于这 5 个点. 根据抽屉原则, 这 5 个红色点中总有三个位于这条直径的同侧, 这三个点构成的三角形一定是钝角三角形.

而当 $n=12$ 时, 考虑如下情形: 选取三个圆内接正方形 $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$, $C_1C_2C_3C_4$, 这三个正方形的顶点分别同为红、黄、蓝色. 此时, 所有的三个顶点同色的三角形均为直角三角形, 因此 $n=12$ 不合要求.

综上所述, 所求 n 的最小可能值为 13.

7. $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$.

根据柯西不等式, 得

$$\begin{aligned}(\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta))^2&=(\sin\alpha+\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2=(\sin\alpha(1+\cos\beta)+\cos\alpha\sin\beta)^2\\&\leqslant(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)((1+\cos\beta)^2+\sin^2\beta)=2+2\cos\beta=4\cos^2\frac{\beta}{2}.\end{aligned}$$

由 $\beta\in[0,\pi]$, 得 $\dfrac{\beta}{2}\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, 从而

$$\begin{aligned}(\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta))\cdot\sin\beta&\leqslant 2\sin\beta\cos\frac{\beta}{2}=4\sin\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}=8\sqrt{\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}}\\&\leqslant 8\sqrt{\left(\frac{\sin^2\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}}{3}\right)^3}=\frac{8\sqrt{3}}{9}.\end{aligned}$$

以上两式中, 等号分别当且仅当 $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\beta}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}$ 并且 $\sin^2\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1}{2}\cos^2\dfrac{\beta}{2}$ 时成立, 此时, $\beta=2\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha=\arctan\sqrt{2}$. 因此, 所求 $(\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta))\cdot\sin\beta$ 的最大值是 $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$.

8. $\{1,9\}$.

将 $\dfrac{1}{1-x-x^2-x^3}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_nx^n$ 左右两边同乘 $1-x-x^2-x^3$, 得

$$1=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1-a_0)x^2+\cdots,$$

比较系数, 得 $a_0=1$, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}$ $(n\geqslant 3)$. 由此易得数列 $\{a_n\}$ 开始的一些项依次为: 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, $\cdots$. 从而, $a_1=1^2$, $a_8=9^2$.

下面证明, 当 n 更大时, 不会有满足 $a_{n-1}=n^2$ 的项. 这只需证明: $a_n>\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ $(n\geqslant 3)$

(事实上, 当 $n\geqslant 6$ 时, 恒有 $\dfrac{n^2}{(n-1)^2}<\dfrac{3}{2}$, 而当 $n=10$ 时已有 $a_{n-1}>n^2$, 当 $n>10$ 时更不会有满足 $a_{n-1}=n^2$ 的项).

用数学归纳法. 当 $n=3, 4, 5$ 时结论显然成立. 假设当 $n\leqslant k$ 时结论成立, 则

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=a_k+a_{k-1}+a_{k-2}>\left(\frac{3}{2}\right)^k+\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}+\left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}\left(1+\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)>\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}.\end{aligned}$$

因此, 当 $n\geqslant 3$ 时, 有 $a_n>\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

综上所述, 满足条件的 n 的取值集合为 $\{1,9\}$.

二、解答题

9. 易求得函数的定义域为 $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$.

(1) 易知函数 $f(x)=2x^2+x\sqrt{4x^2-3}$ 在 $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$ 上是增函数, 所以当 $x\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 可得 $f(x)\geqslant\dfrac{3}{2}$.

(2) 当 $x\leqslant-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时

$$\begin{aligned}f(x)&=x(2x+\sqrt{4x^2-3})=\frac{x(2x+\sqrt{4x^2-3})(2x-\sqrt{4x^2-3})}{2x-\sqrt{4x^2-3}}\\&=\frac{3x}{2x-\sqrt{4x^2-3}}=\frac{3}{2-\dfrac{\sqrt{4x^2-3}}{x}}=\frac{3}{2+\sqrt{4-\dfrac{3}{x^2}}}.\end{aligned}$$

因为 $x\leqslant-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $0\leqslant 4-\dfrac{3}{x^2}<4\Rightarrow 2\leqslant 2+\sqrt{4-\dfrac{3}{x^2}}<4$, 所以

$$\frac{3}{4}<\frac{3}{2+\sqrt{4-\dfrac{3}{x^2}}}\leqslant\frac{3}{2},$$

即 $\dfrac{3}{4}<f(x)\leqslant\dfrac{3}{2}$.

综上可知, $f(x)>\dfrac{3}{4}$, 即函数 $f(x)$ 的值域为 $\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

10. 设 $A\left(t_1,\dfrac{1}{t_1}\right)$, $B\left(t_2,\dfrac{1}{t_2}\right)$, $C\left(t_3,\dfrac{1}{t_3}\right)$, $D\left(t_4,\dfrac{1}{t_4}\right)$, 圆心 $P(a,b)$, 圆的方程为 $x^2+y^2-2ax-2by+f=0$. 将圆的方程与 $xy=1$ 联立, 得 $x^4-2ax^3+fx^2-2bx+1=0$.

由韦达定理, 得

$$t_1t_2t_3t_4=1, \tag{①}$$

$$t_1+t_2+t_3+t_4=2a, \tag{②}$$

$$t_1t_2t_3+t_2t_3t_4+t_3t_4t_1+t_4t_1t_2=2b. \tag{③}$$

由式 ①, ③, 得

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4}=2b.$$

记 $S=t_1+t_2+t_3+t_4$, $T=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4}$, 则圆心 $P(a,b)$ 即 $\left(\frac{S}{2},\frac{T}{2}\right)$, 线段 OP 的中点 $M\left(\frac{S}{4},\frac{T}{4}\right)$.

设线段 EF 的中点为 M', 则 M' 的横坐标为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{t_1+t_2}{2}+\frac{t_3+t_4}{2}\right)=\frac{S}{4},$$

纵坐标为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4}\right)\right)=\frac{T}{4},$$

即 $M'\left(\frac{S}{4},\frac{T}{4}\right)$, 从而点 M' 与点 M 重合.

这表明, 线段 EF 与 OP 互相平分, 因此四边形 $OEPF$ 是平行四边形.

11. (1) 不妨认为 $2n+1$ 棵树 $T_1,T_2,\cdots,T_{2n+1}$ 从左到右排列, 每两棵树的间距为 1 个单位. 将以 $\frac{1}{2}$ 的概率向左或向右走 0.5 个单位定义为一次随机游走. 根据题目所述的概率分布特征, 醉汉每分钟的运动状况恰可分解为两次随机游走. 故原问题等价于求醉汉从 T_{2n+1} 出发, 经 $2n$ 步随机游走后处在 T_i 位置的概率 p_i.

对某个 i $(1\leqslant i\leqslant 2n+1)$, 设从 T_{n+1} 经过 $2n$ 步随机游走到达 T_i 的全过程中, 向右走 0.5 个单位和向左走 0.5 个单位分别有 k 次和 $2n-k$ 次, 则

$$n+1+\frac{k-(2n-k)}{2}=i,$$

解得 $k=i-1$, 即在 $2n$ 步中 $i-1$ 次向右游走, $2n-(i-1)$ 次向左游走, 而这样的情形共 C_{2n}^{i-1} 种, 故所求的概率

$$p_i=\frac{\mathrm{C}_{2n}^{i-1}}{2^{2n}}\quad(1\leqslant i\leqslant 2n+1).$$

(2) 对 $i=1,2,\cdots,2n+1$, 树 T_i 与 T_{n+1} 相距 $|n+1-i|$, 而醉汉到树 T_i 的概率为 p_i, 故所求的数学期望为

$$E=\sum_{i=1}^{2n+1}|n+1-i|\frac{\mathrm{C}_{2n}^{i-1}}{2^{2n}}.$$

根据求和指标变换及组合数的性质有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n+1}|n+1-i|\mathrm{C}_{2n}^{i-1}&=\sum_{j=0}^{2n}|n-j|\mathrm{C}_{2n}^{j}=2\sum_{j=0}^{n}(n-j)\mathrm{C}_{2n}^{j}=2\sum_{j=0}^{n}n\mathrm{C}_{2n}^{j}-2\sum_{j=0}^{n}j\mathrm{C}_{2n}^{j}\\&=2n\sum_{j=0}^{n}\mathrm{C}_{2n}^{j}-2\sum_{j=1}^{n}2n\mathrm{C}_{2n-1}^{j-1}=2n\cdot\frac{1}{2}\left(\mathrm{C}_{2n}^{n}+\sum_{j=0}^{2n}\mathrm{C}_{2n}^{j}\right)-4n\sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{C}_{2n-1}^{j}\\&=n(\mathrm{C}_{2n}^{n}+2^{2n})-4n\cdot\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2n-1}\mathrm{C}_{2n-1}^{j}=n(\mathrm{C}_{2n}^{n}+2^{2n})-2n\cdot 2^{2n-1}\\&=n\mathrm{C}_{2n}^{n}.\end{aligned}$$

因此, $E=\dfrac{n\mathrm{C}_{2n}^{n}}{2^{2n}}$.

第 二 试

一 (法一) 如图 2, 记 $\triangle ABC$ 的外心为 O, 圆 Γ_1, Γ_2 的圆心分别为 O_1, O_2. 联结 O_1A, O_2A, O_1O_2, OO_1, OO_2, OD, 记 AO 与 O_1O_2 交于点 M, AD 与 O_1O_2 交于点 N. 由题设知 $O_1A\perp CA$, $OO_2\perp CA$, $OO_1\perp AB$, $AO_2\perp AB$, 于是 $OO_1/\!/AO_2$, $OO_2/\!/O_1A$, 从而四边形 AO_1OO_2 为平行四边形, 故 $AM=OM$.

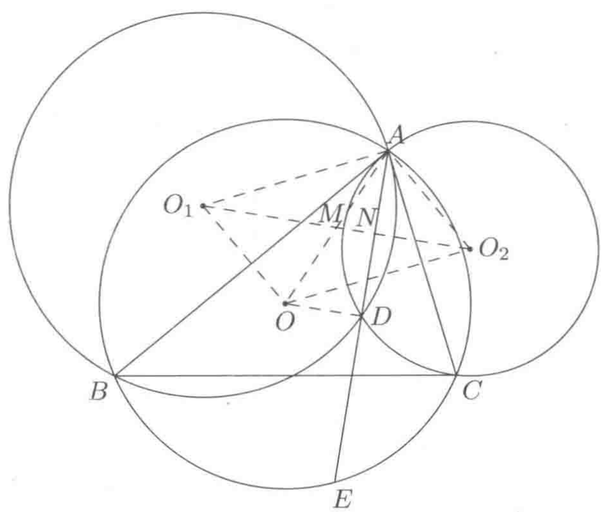


图 2

注意到 $AN=DN$, 则 $MN/\!/OD$, 结合 $O_1O_2\perp AD$ 知 $OD\perp AD$, 从而由垂径定理知 $AD=DE$.

(法二) 如图 3, 记 $\triangle ABC$ 的外心为 O, 联结 OB, OC, OD, BD, CD. 由题设知 $\angle CAD=\angle ABD$, $\angle BAD=\angle ACD$, 所以, $\angle BDC=\angle DBA+\angle BAC+\angle ACD=2\angle BAC=\angle BOC$.

从而, B, O, D, C 四点共圆, 可得 $\angle ODE=\angle ODC-\angle EDC=180^\circ-\angle OBC-$

$\angle DAC - \angle DCA = 180^\circ - (\angle OBC + \angle BAC) = 90^\circ$. 即 $OD \perp AD$. 从而由垂径定理知 $AD = DE$.

(法三) 如图 4, 联结 BE, CE, 由题设, $\angle CBE = \angle CAD = \angle ABD$, $\angle BCE = \angle BAD = \angle ACD$, 从而, $\triangle ABD \sim \triangle CAD$, 则有

$$\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow AD^2 = CD \cdot BD.$$

又 $\angle CED = \angle CEA = \angle CBA = \angle ABD + \angle CBD = \angle CBE + \angle CBD = \angle EBD$, 类似有 $\angle BED = \angle ECD$, 从而, $\triangle CED \sim \triangle EBD$, 则有

$$\frac{CD}{DE} = \frac{ED}{BD} \Rightarrow ED^2 = CD \cdot BD.$$

从而, $AD = DE$, 命题得证.

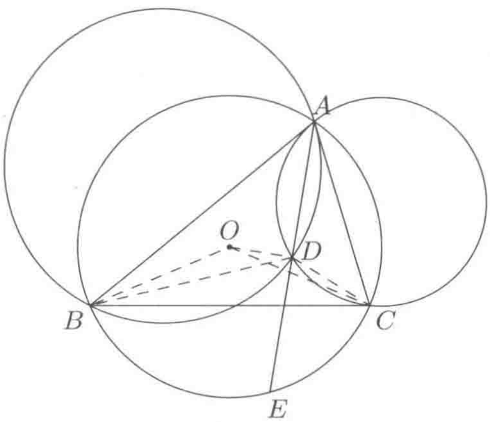


图 3

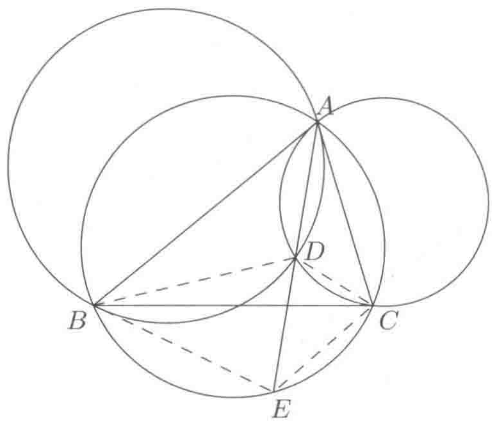


图 4

二　不妨设 $a \leqslant b \leqslant c$, (a,b,c) 是使 c 最小的一组解. 由 $n = \dfrac{(a+b+c)^2}{abc}$, 得

$$c^2 + 2(a+b)c + (a+b)^2 = nabc,$$

即

$$c^2 - (nab - 2(a+b))c + (a+b)^2 = 0. \qquad ①$$

设方程 ① 的另一根为 c', 则 $c + c' = nab - 2(a+b) \in \mathbf{Z}$, $cc' = (a+b)^2 > 0$, 所以 $c' \in \mathbf{N}^*$. 因而 (a,b,c') 也是满足题设的一组解, 且 $c' \geqslant c$, 因此, $(a+b)^2 = cc' \geqslant c^2$, 故 $c \leqslant a+b$.

又 $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$, $\dfrac{a}{b} \leqslant 1$, $\dfrac{b}{c} \leqslant 1$, 则

$$n = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} + \frac{a}{cb} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$$