高中数学专题精编系列

高中数学思想方法

第二版

李正兴 著

考点

新题

好题

要点

妙题

难点

引领解题高手
造就高分学霸

上海科学普及出版社

高中数学专题精编系列

高中数学思想方法

第二版

李正兴 著

考点

新题

好题

要点

妙题

难点

引领解题高手

高分学霸

上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学思想方法/李正兴著. --2 版. --上海：上海科学普及出版社，2018. 7

ISBN 978－7－5427－7239－8

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 138051 号

责任编辑　张建青

高中数学思想方法

·第二版·

李正兴　著

上海科学普及出版社出版发行

(上海中山北路 832 号　邮政编码 200070)

http://www. pspsh. com

各地新华书店经销　上海肖华印务有限公司印刷

开本 787×1092　1/16　印张 20　字数 480 000

2018 年 7 月第 1 版　2018 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978－7－5427－7239－8　**定价：50. 00 元**

前　言

本书是《高中数学专题精编》丛书的分册之一，共分为六章：函数与方程的思想、数形结合的思想、分类与整合的思想、转化与化归的思想、综合问题百战谋略、建模与应用的思想. 每章若干节，总计40节，实质上是40个小专题，在内容选取上，按高考要求精心挑选，科学设计难易适度，注重方法、技巧、规律的总结，每道例题都给出缜密的“解题策略”和详解，每章各有专题训练卷，囊括了多年来特别是近几年体现数学思想方法精髓的经典习题与精彩新题，配合使用，效果更佳.

数学在其漫长的发展过程中不仅建立起了严密的知识体系，而且形成了一整套行之有效的思想方法，数学思想方法是数学解题通法的概括和提升，制约着数学活动中主观意识的指向，可见数学思想是数学的核心，掌握了数学思想一定会大幅度提升解题能力.

从某种意义上讲，数学问题的解决是矛盾的解决，而数学思想的运用可以使矛盾的解决更为顺畅、简洁. 函数与方程的思想把函数、方程、不等式融为一体，让我们找到一个新的视角实现知识之间的转化而顺利地解决问题. 分类与整合是科学研究中最为基本的解法. 数形结合可以使问题变得直观，当问题从表层看难以看清楚，则转化与化归会把我们带进另一扇破解问题之门，数学问题复杂多变，当然离不开解题谋略的作用，而数学应用题的解答重在“建模”，“建模”成功，问题迎刃而解.

当然本册的撰写尽量避免平铺直叙，“函数与方程的思想”一章把函数、数列、解析几何、立体几何融为一体，突出这一思想在解题中的作用，并重点分析构造函数或构造方程或使问题中的函数与方程的特征显化的技巧. “数形结合的思想”这一章突出“以形助数”、“以数辅形”的辨证关系，重点放在“以数辅形三大法宝”、“以形助数的两大抓手”上，力求使读者耳目一新. “分类与整合的思想”这一章以知识板块作为每一节的标题，同时又介绍了简化和避免分类讨论的技巧. “转化与化归”这一章重点放在转化与化归是一种击破问题的策略上，推出了十大问题：正与反、分解与组合、多元与一元、静止与运动、新知识与旧知识、数与形、高维向低维、高次向低次、命题之间以及知识板块之间的转化与化归. “综合问题百战谋略”这一章把高中数学问题解决中的谋略来一个总的盘点，授之以渔——给您以方法之“舟”，解题的“孙子兵法”. 最后一章“建模与应用的思想”，实行分类总结，让您提升解应用题的能力.

聚集数学思想——它是探索创新的沃土，是提高学习能力的原动力，数学家怀特海曾经这样告诫我们：“许多数学家知道所研究的东西的细节，但对表述数学学科的哲学特征他却毫无所知. ”数学家冯·诺伊曼说：“尽管数学家的家谱是悠久而又朦胧的，但是数学思想是起源于经验的，这些思想一旦产生，这个学科就以特有的方式存在下去，和任何其他学科，尤其与经验学科相比，数学可以比作一种创造性的，又几乎完全受审美动机控制的学科. ”对于数学思想在数学发展中的作用，数学教育家M·克莱因有这样一段生动的表述：“数学思想的波涛不断地拍击岩石的海岸，海岸阻止了它们顺利、安静地进入它们欲拥抱的大地. 然而，

数世纪的拍击甚至侵蚀大块大块的花岗岩，从而开辟了包围新领域的途径.”

数学解题中的美感只留给欣赏她的人. 杜甫诗云：“野色更无山隔断，山光直与水相通.”王国维用诗词来讲述如何做学问的三境界：“昨夜西风凋碧树，独上高楼，望断天涯路.”此第一境界也.“衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴.”此第二境界也.“众里寻她千百度，蓦然回首，那人却在灯火阑珊处.”此第三境界也. 用于研究数学解题策略，用于选择解题方向、刻苦探索和获得成果何等贴切，未尝不可！

我要告诫莘莘学子的是学习数学必须脚踏实地，一步一个脚印地前进，正如王国维一首词中所言：“万事不如身手好”、“雕弓声急马如飞”. 学习的过程是知识与经验累积的过程，是系统归纳的过程，要完整地把知识网络梳理清楚，只有牢固地掌握了解题通法，您的思维能力、运算能力、空间想象能力、解决实际问题的能力自然会达到一个高水平，进入“重梳理、方法储、策略生、数学思想打头阵”的自由王国.

让我们去领略数学思想的魅力吧！

李正兴

2018 年春于海上述而斋

目　录

第一章　函数与方程的思想

数学思想是指导解题的核心，是一种重要的思维模式.《考试大纲》指出：“数学科的命题，在考查基础知识的基础上，注重对数学思想和方法的考查，注重对数学能力的考查”. 这里所讲的数学思想主要有：函数与方程的思想、分类讨论与整合的思想、数形结合的思想、化归与转化的思想、特殊与一般的思想、有限与无限的思想、或然与必然的思想、对称与对偶的思想、构造与建模的思想、统计与概率的思想、算法与程序(框图)的思想等等. 而其中放在首位的、最为突出的数学思想是函数与方程的思想.“高考把函数与方程的思想作为思想方法的重点来考查，使用选择题和填空题考查函数与方程思想的基本运算. 而在解答题中，则从更深的层次在知识网络的交汇点处、从思想方法与相关能力相综合的角度进行深入考查.”

什么是函数和方程的思想方法呢?

所谓函数思想就是运用运动变化的观点，分析和研究具体问题中的数量关系，剔除问题中的非数学因素，抽象其数学特征，用函数的形式把这种数学关系表示出来，并加以研究，运用函数的性质使问题获得解决的思想. 所谓方程思想，就是在解决问题时，把函数中数量间的制约关系看作方程，运用方程理论架设由已知探索未知的桥梁. 方程思想是动中求静，研究运动中的等量关系. 函数思想与方程思想是一个整体，运用函数与方程的思想方法解题，实质是对所给的数学问题，可以从不同的角度加以审视，看看此数学问题的解决与函数或方程是否有关联，若有关联，就可用函数与方程的有关性质求解. 函数的性质，就是我们通常讲的：奇偶性、周期性、单调性、最值四大性质. 而方程的性质通常指解方程或解方程组过程中所运用的一整套理论，主要有消元法、判别式、韦达定理等等，而零点正是沟通两者的主要概念.

当然，一般所给出的数学问题从表面上看是非函数或非方程问题，这就要求我们对问题进行一些转化或显化，使问题中函数与方程的特征变得明显，或实施某种构造，即把一个不是函数的问题根据要解决的问题的特征及求解的目标，构造一个函数或看作一个方程，构造函数与方程的解题思路有着广泛的应用.

巴甫洛夫有一句名言：“科学是以依赖于方法的进步程度为前提的”. 这句话并不假. 方法每前进一步，和每上一个台阶一样，它会为我们展开更为广阔的视野，因而看到前所未有的现象.

从某种意义上讲，学习数学就是掌握数学思想方法，一旦学会运用思想方法解题，会使你的数学学习收到事半功倍之效，开发灵性，深入到数学的精髓.

下面让我们深入研究函数与方程的思想在解题中的应用，讲五个方面：

第一节　函数与方程、不等式三者之间的相互转化，可使问题易于突破

例 1　已知关于 x 的二次方程 $x^2+2mx+2m+1=0$.

(1) 若方程有两根,其中一根在区间$(-1,0)$内,另一根在区间$(1,2)$内,求m的取值范围;

(2) 若方程两根均在区间$(0,1)$内,求m的取值范围.

解题策略: 本题由方程根的范围确定方程系数的范围,关键是实施由方程向函数的转化、由函数向不等式的转化. 那么如何来实施这二次转化呢? 熟知方程的根对于二次函数性质所具有的意义是正确实施转化的核心. 在用二次函数的性质结合图形对方程的根进行限制时,应密切注意条件的严谨性. 条件不严谨是解答本题的主要困难,务请考虑周全.

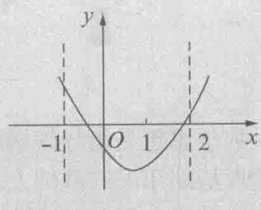
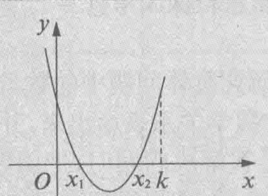
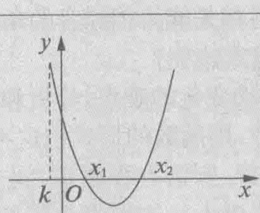
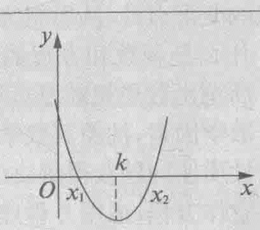
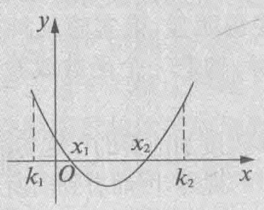
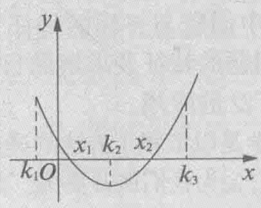
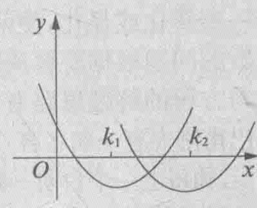


图 1-1

关于一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a>0)$根的分布的讨论,可以用下面表格总结:

根的分布	$x_1<x_2<k$	$k<x_1<x_2$	$x_1<k<x_2$
相应二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$的图像			
充要条件	$\begin{cases}\Delta>0\\ f(k)>0\\ -\dfrac{b}{2a}<k\end{cases}$	$\begin{cases}\Delta>0\\ f(k)>0\\ -\dfrac{b}{2a}>k\end{cases}$	$f(k)<0$
根的分布	$k_1<x_1<x_2<k_2$	$k_1<x_1<k_2<x_2<k_3$	在(k_1,k_2)内有且仅有一个根
相应二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$的图像			
充要条件	$\begin{cases}\Delta>0\\ f(k_1)>0\\ f(k_2)>0\\ k_1<-\dfrac{b}{2a}<k_2\end{cases}$	$\begin{cases}f(k_1)>0\\ f(k_2)<0\\ f(k_3)>0\end{cases}$	$f(k_1)\cdot f(k_2)<0$ 或$\begin{cases}\Delta=0\\ -\dfrac{b}{2a}\in(k_1,k_2)\end{cases}$ 或$\begin{cases}f(k_1)=0\\ k_1<-\dfrac{b}{2a}<\dfrac{k_1+k_2}{2}\end{cases}$ 或$\begin{cases}f(k_2)=0\\ \dfrac{k_1+k_2}{2}<-\dfrac{b}{2a}<k_2\end{cases}$

若根的范围在闭区间内或两根 $x_1 \leqslant x_2$ 等情况对充要条件可作相应调整.

解:(1) 由题设知抛物线 $f(x)=x^2+2mx+2m+1$ 与 x 轴的交点分别在区间 $(-1,0)$ 和 $(1,2)$ 内,画出二次函数的示意图如图 1-1 所示,得

$$\begin{cases} f(0)=2m+1<0, \\ f(-1)=2>0, \\ f(1)=4m+2<0, \\ f(2)=6m+5>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<-\dfrac{1}{2}, \\ m>-\dfrac{5}{6}. \end{cases} \text{故} -\frac{5}{6}<m<-\frac{1}{2}.$$

(2) 如图 1-2 所示,抛物线与 x 轴交点落在区间 $(0,1)$ 内,对称轴 $x=-m$ 在区间 $(0,1)$ 内通过(千万不能遗漏),可列出不等式组

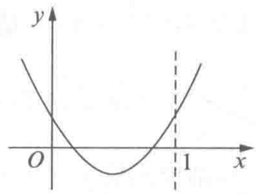


图 1-2

$$\begin{cases} \Delta=4m^2-4(2m+1)\geqslant 0 (\text{等号不能漏}), \\ f(0)=2m+1>0, \\ f(1)=4m+2>0, \\ 0<-m<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{1}{2}, \\ m\geqslant 1+\sqrt{2} \text{或} m\leqslant 1-\sqrt{2}, \\ -1<m<0. \end{cases}$$

于是有 $-\frac{1}{2}<m\leqslant 1-\sqrt{2}$.

例 2 (1) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} |x|, x\leqslant m, \\ x^2-2mx+4m, x>m, \end{cases}$ 其中 $m>0$. 若存在实数 b,使得关于 x 的方程 $f(x)=b$ 有三个不同的根,则 m 的取值范围是________;

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leqslant 0, \\ 2^x; & x>0, \end{cases}$ 则满足 $f(x)+f(x-\frac{1}{2})>1$ 的 x 的取值范围是________;

(3) 已知 $a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=\left|x+\frac{4}{x}-a\right|+a$ 在区间 $[1,4]$ 上的最大值是 5,则 a 的取值范围是________.

解题策略:这是一组近两年高考题,都是围绕函数、方程、不等式之间的关系命制,第(1)问,结合函数图像确定实数 m 满足的条件,从而确定 m 的取值范围. 这也是解一般的函数与方程问题的基本解题方法;第(2)问旨在考查分段函数与不等式的解法;第(3)问旨在考查耐克函数与绝对值函数的性质,可以结合函数图像解,也可以转化为解绝对值不等式,这三题虽是小题,但思维量颇大,值得推敲.

解:(1) **解法一**(直接由方程分类讨论求解):由 $x^2-2mx+4m=b$,即 $(x-m)^2=b+m^2-4m$ 在 $(m,+\infty)$ 有解(且这个解唯一),得 $b+m^2-4m>0$,即 $4m-m^2<b$,由 $|x|=b$ 在 $(-\infty,m]$ 有解(且要有两个解)得 $0<b\leqslant m$. $\therefore 4m-m^2<m$,解得 $m>3$,$\therefore m$ 的取值范围是 $(3,+\infty)$.

解法二(结合函数图像求解):函数 $f(x)$ 的大致图像如图 1-3 所示. 根据题意知只要 $m>4m-m^2$ 即可,又 $m>0$,解得 $m>3$,故实数 m 的取值范围是 $(3,+\infty)$.

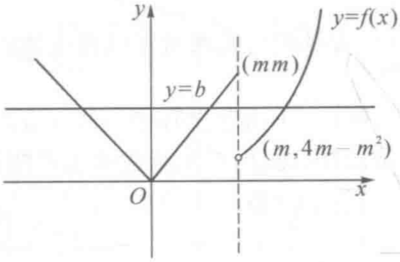


图 1-3

(2) **解法一**(分类讨论解函数不等式)：当 $x>\frac{1}{2}$ 时，不等式 $f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)>1$ 可化为 $2^x+2^{x-\frac{1}{2}}>1$. 又结合指数函数的图像易知该不等式显然恒成立，$\therefore x>\frac{1}{2}$ 适合；当 $x\leqslant 0$ 时，不等式 $f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)>1$ 可化为 $x+1+\left(x-\frac{1}{2}\right)+1>1$. 解得 $x>-\frac{1}{4}$，又 $x\leqslant 0$，$\therefore -\frac{1}{4}<x\leqslant 0$ 适合；

当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，不等式 $f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)>1$ 可化为 $2^x+\left(x-\frac{1}{2}\right)+1>1$，即 $2^x+x>\frac{1}{2}$，结合函数 $y=2^x+x$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 内单调递增易知不等式显然成立，$\therefore 0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 适合.

综上，所求 x 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$.

解法二(根据函数性质讨论求解)：当 $x>0$ 时，$f(x)=2^x>1$ 恒成立，当 $x-\frac{1}{2}>0$，即 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f\left(x-\frac{1}{2}\right)=2^{x-\frac{1}{2}}>1$，当 $x-\frac{1}{2}\leqslant 0$，即 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f\left(x-\frac{1}{2}\right)=x+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$，则不等式 $f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)>1$ 恒成立，当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)=x+1+x+\frac{1}{2}=2x+\frac{3}{2}>1$，$\therefore -\frac{1}{4}<x\leqslant 0$.

综上，所求 x 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$

解法三(结合函数图像求解)：

$f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)>1\Rightarrow f\left(x-\frac{1}{2}\right)>1-f(x)$，

$\because f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0.\end{cases}$ $\therefore$ 由图像变换可画出 $y=f\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 与 $y=1-f(x)$ 的图像，如图 1-4 所示. 并求出交点坐标为 $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$，由图像可知，满足 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)>1-f(x)$ 的解为 $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$，故可求 x 的范围是 $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$.

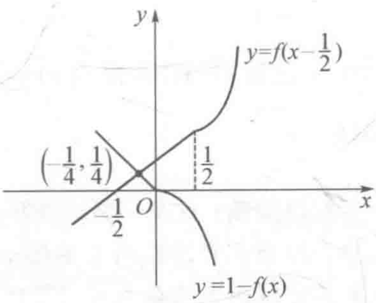


图 1-4

(3) **解法一**(由极值点与区间端点综合讨论求解)：

由题意可知 $a\leqslant 5$，$\because$ 函数 $g(x)=x+\frac{4}{x}$ 的极值点为 $x=2$.

$\therefore [f(x)]_{\max}=\max\{f(1),f(4),f(2)\}$.

则$\begin{cases} f(1)=|5-a|+a\leqslant 5, \\ f(4)=|5-a|+a\leqslant 5, \\ f(2)=|4-a|+a\leqslant 5, \end{cases}$解得 $a\leqslant\frac{9}{2}$.

故 a 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{9}{2}\right]$.

解法二(结合"耐克函数"$g(x)=x+\frac{4}{x}$在 $x\in[1,4]$的性质讨论求解):

结合函数 $g(x)=x+\frac{4}{x}$,$x\in[1,4]$的图像易知$[g(x)]_{\min}=g(2)=4$.

$[g(x)]_{\max}=\max\{g(1),g(4)\}=5$,∴当 $x\in[1,4]$时,$x+\frac{4}{x}\in[4,5]$,若 $a\leqslant 4$,则当 $x\in[1,4]$时,$f(x)=x+\frac{4}{x}\in[4,5]$. 显然最大值是 5,适合题意;

若 $4<a<5$,则当 $x\in[1,4]$时,$[f(x)]_{\max}=\max=\{|4-a|+a,\ |5-a|+a\}=\max\{2a-4,5\}$,∴由题设知应满足 $2a-4\leqslant 5$,解得 $a\leqslant\frac{9}{2}$,又 $4<a<5$,∴$4<a\leqslant\frac{9}{2}$适合题意;

若 $a\geqslant 5$,则当 $x\in[1,4]$时,$f(x)=2a-\left(x-\frac{4}{x}\right)\in[2a-5,\ 2a-4]$.

∴由题设知 $2a-4=5$,解得 $a=\frac{9}{2}$,这与 $a\geqslant 5$ 矛盾.

综上,a 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{9}{2}\right]$.

解法三(通过函数图像变换求解):

当 $a\leqslant 0$ 时,∵$x\in[1,4]$,∴$f(x)=\left|x+\frac{4}{x}-a\right|+a=x+\frac{4}{x}-a+a=x+\frac{4}{x}$,$[f(x)]_{\max}=5$; $a>0$ 时,$f(x)=\left|x+\frac{4}{x}-a\right|+a$ 的图像可由 $g(x)=x+\frac{4}{x}$的图像向下平移 a 个单位,然后关于 x 轴翻折后再向上平移 a 个单位得到,∵$x\in[4,5]$,∴$g(x)=x+\frac{4}{x}\in[4,5]$,如图 1-5 所示. 最多向下平移 4.5 个单位,才能保证$[f(x)]_{\max}=5$. 故 a 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{9}{2}\right]$.

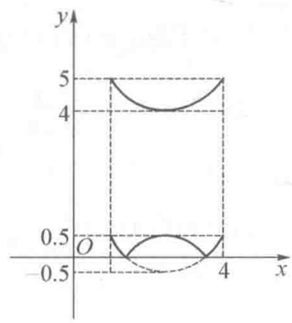


图 1-5

解法四(转化为含参数绝对值不等式恒成立求解):

由题意可知 $a\leqslant 5$. ∵函数 $f(x)=|x+\frac{4}{x}-a|+a$ 在区间$[1,4]$上的最大值是 5,∴不等式$\left|x+\frac{4}{x}-a\right|+a\leqslant 5-a$ 在区间$[1,\ 4]$上恒成立,即不等式$-(5-a)\leqslant x+\frac{4}{x}$在区间$[1,4]$上恒成立,即不等式组$\begin{cases} 2a-5\leqslant x+\frac{4}{x}, \\ x+\frac{4}{x}\leqslant 5 \end{cases}$在区间$[1,4]$上恒成立. 即不等式组$\begin{cases} 2a-5\leqslant x+\frac{4}{x} \\ x+\frac{4}{x}\leqslant 5 \end{cases}$在区间$[1,4]$上恒成立. ∴$2a-5\leqslant\left[x+\frac{4}{x}\right]_{\min}=4$. 故 a 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{9}{2}\right]$.

例 3 已知 $a\geqslant\frac{1}{2}$，$f(x)=-a^2x^2+ax+c$.

(1) 证明对任意 $x\in[0,1]$，$f(x)\leqslant 1$ 的充要条件是 $c\leqslant\frac{3}{4}$；

(2) 已知关于 x 的二次方程 $f(x)=0$ 有两个实根 α、β. 证明：$|\alpha|\leqslant 1$ 且 $|\beta|\leqslant 1$ 的充要条件是 $c\leqslant a^2-a$.

解题策略：本题是以二次函数为载体探究不等式成立以及方程根在特定范围内充要条件的证明，实质上所给的函数属能随参数的变化而变化的动态方程，所研究的数学对象已经不是一些孤立的点(对于方程 $f(x)=0$)，而是具有某种共性的几何曲线. 显而易见，(1)的证明需抓住函数的性质(特别是最值). (2)的证明是结合图形实施向不等式的转化. 通过解不等式组求出充要条件.

证明：(1) $f(x)=-a^2\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2+c+\frac{1}{4}$，$\because a\geqslant\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{1}{2a}\in(0,1]$.

$\therefore x\in[0,1]$时，$f(x)_{\max}=c+\frac{1}{4}$.

充分性：若 $c\leqslant\frac{3}{4}$，则 $f(x)\leqslant f(x)_{\max}=c+\frac{1}{4}\leqslant 1$.

必要性：若 $f(x)\leqslant 1$，则 $f(x)_{\max}=c+\frac{1}{4}\leqslant 1$，即 $c\leqslant\frac{3}{4}$.

$\therefore$ 对任意 $x\in[0,1]$，$f(x)\leqslant 1$ 的充要条件是 $c\leqslant\frac{3}{4}$.

(2) $\because a\geqslant\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{1}{2a}\in(0,1]\subseteq[-1,1]$，而 $f(x)=-a^2x^2+ax+c$ 开口向下，

$\therefore \begin{cases}|\alpha|\leqslant 1,\\|\beta|\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=0$ 的两根在 $[-1,1]$ 内 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geqslant 1,\\-1\leqslant\frac{1}{2a}\leqslant 1,\\f(1)\leqslant 0,\\f(-1)\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)\leqslant 0,\\f(-1)\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}-a^2+a+c\leqslant 0,\\-a^2-a+c\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c\leqslant a^2-a,\\c\leqslant a^2+a\end{cases}\Leftrightarrow c\leqslant a^2-a.$

例 4 函数 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-ax+3)$在$[1,2]$上恒为正数，则 a 的取值范围是(　　).

A. $2\sqrt{2}<a<2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{2}<a<\frac{7}{2}$　　C. $3<a<\frac{7}{2}$　　D. $3<a<2\sqrt{3}$

解题策略：依据对数函数的原调性将函数恒为正数转化为一元二次不等式在$[1,2]$上恒成立的问题，采用分离参数的方法求解其取值范围.

解：由题意得，当 $x\in[1,2]$时，$y=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-ax-3)>0$ 恒成立，
故恒有 $0<x^2-ax+3<1$.

$\because x\in[1,2]$，$\therefore$由 $x^2-ax+3>0$，可得 $a<\frac{x^2+3}{x}=x+\frac{3}{x}$. 令 $t(x)=x+\frac{3}{x}$，$x\in[1,2]$，

显然函数在$[1,\sqrt{3}]$上为减函数,在$[\sqrt{3},2]$上为增函数,故其最小值为$t(\sqrt{3})=\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.

要使不等式$a<x+\frac{3}{x}$,$x\in[1,2]$恒成立,则需$a<2\sqrt{3}$.

由$x^2-ax+3<1$,得$x^2-ax+2<0$. 又$x\in[1,2]$,故由上式可得$a>\frac{x^2+2}{x}=x+\frac{2}{x}$. 令$h(x)=x+\frac{2}{x}$,该函数在$[1,\sqrt{2}]$上为减函数,在$[\sqrt{2},2]$上为增函数,而$h(1)=h(2)=3$,故$h(x)$的最大值为3. 要使不等式$a>x+\frac{2}{x}$在$[1,2]$上恒成立,则需$a>3$.

综上所述,a的取值范围是$3<a<2\sqrt{3}$,故选D.

例5　已知函数$f(x)=\log_{\sqrt{3}}(3x-a)$,当点$P(x,y)$在函数$y=f(x)$图像上时,点$Q\left(3x,\frac{y}{2}\right)$在函数$y=g(x)$图像上.

(1) 求$y=g(x)$的表达式;

(2) 若$A(x+a,y_1)$,$B(x,y_2)$,$C(3+a,y_3)$为$y=g(x)$图像上的三点,且满足$2y_2=y_1+y_3$的实数x有且只有两个不同的值,求实数a的取值范围.

解题策略: 需求出$y=g(x)$的解析式,问题便转化为一元二次方程$\varphi(x)=0$的根的分布问题,结合二次函数的图像进行分析. 利用本节例1的“解题策略”中的表格中的相应类型转化为解相应的不等式组.

解: (1) 由题意,得$\begin{cases}y=\log_{\sqrt{3}}(3x-a),\\ \frac{y}{2}=g(3x)\end{cases}\Rightarrow g(3x)=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(3x-a)$,令$t=3x$,

则$t>a$,并且$g(t)=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(t-a)$.　$\therefore g(x)=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(x-a)\ (x>a)$.

(2) 由$g(x)=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(x-a)\ (x>a)$,

得$y_1=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}x$,$y_2=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(x-a)$,$y_3=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}3=1$.

于是,$2y_2=y_1+y_3\Rightarrow\log_{\sqrt{3}}(x-a)=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}x+1$. 上式可化为

$$\begin{cases}x>a,\\ x>0,\\ (x-a)^2=3x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>a,\\ x^2-(2a+3)x+a^2=0.\end{cases}$$

问题等价于方程$x^2-(2a+3)x+a^2=0(x>a)$有且仅有两个不等的实根. 记$\varphi(x)=x^2-(2a+3)x+a^2$,则$\varphi(x)=0$在$(a,+\infty)$上有两个不等实根的充要条件$\begin{cases}\Delta>0,\\ \varphi(a)>0,\\ \frac{2a+3}{2}>a\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}12a+9>0,\\-3a>0,\\2a+3>2a,\end{cases}$ 解得$-\dfrac{3}{4}<a<0$.

例6 已知函数 $g(x)=ax^2-2ax+1+b(a\neq0,b<1)$ 在区间$[2,3]$上有最大值4和最小值1.设 $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.

(1) 求 a、b 的值;

(2) 不等式 $f(2^x)-k\cdot2^x\geqslant0$ 在 $x\in[-1,1]$上恒成立,求实数 k 的取值范围;

(3) 方程 $f(|2^x-1|)+k\left(\dfrac{2}{|2^x-1|}-3\right)=0$ 有三个不同的实数解,求实数 k 的取值范围.

解题策略: 函数是方程与不等式的"中介",它们既有区别,又联系紧密.第(1)问,由题设所给二次函数在区间上的最值,运用待定系数法确定 a、b 之值,实质是使原问题转化为解方程组问题,由于二次项系数可正可负,则又必须分类讨论;第(2)问是含参数不等式恒成立问题,通过参变分离又使问题转化为函数的最小值的求法;第(3)问是方程根的分布问题,使之转化为函数图像的交点问题,重在对问题中的变量的动态研究,通过解不等式组使问题获解.

解: (1) $g(x)=a(x-1)^2+(1+b-a)$.

① 当 $a>0$ 时,$g(x)$在$[2,3]$上单调递增,于是$\begin{cases}g(3)=4,\\g(2)=1.\end{cases}$即$\begin{cases}3a+b=3,\\b=0,\end{cases}$故$\begin{cases}a=1,\\b=0.\end{cases}$

② 当 $a<0$ 时,$g(x)$在$[2,3]$上单调递减,于是$\begin{cases}g(3)=1,\\g(2)=4,\end{cases}$即$\begin{cases}3a+b=0,\\b=3,\end{cases}$故$\begin{cases}a=-1,\\b=3\end{cases}$(舍去).

综上所述,$a=1,b=0$.

(2) 由(1)知 $g(x)=x^2-2x+1$,于是 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}-2$.

由 $f(2^x)-k\cdot2^x\geqslant0$,有 $2^x+\dfrac{1}{2^x}-2\geqslant k\cdot2^x$,即 $k\leqslant\left(\dfrac{1}{2^x}\right)^2-2\left(\dfrac{1}{2^x}\right)+1$ 在 $x\in[-1,1]$上恒成立.

记 $t=\dfrac{1}{2^x}$,则 $t\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$,$k\leqslant t^2-2t+1$ 在 $t\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$上恒成立.

又$(t^2-2t+1)_{\min}=0$(当 $t=1$ 时),故 $k\leqslant0$,

即 k 的取值范围是$(-\infty,0]$.

(3) 依题意,$|2^x-1|+\dfrac{2k+1}{|2^x-1|}-(2+3k)=0$,

于是$|2^x-1|^2-(2+3k)|2^x-1|+(2k+1)=0$.

记 $t=|2^x-1|$,如图1-6所示,

则 $t^2-(2+3k)t+(2k+1)=0$ 有根 t_1、t_2,

且 $0<t_1<1<t_2$ 或 $0<t_1<1,t_2=1$.

设 $\varphi(t)=t^2-(2+3k)t+(2k+1)$,

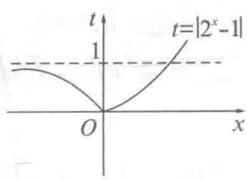


图1-6

则$\begin{cases}\varphi(0)>0,\\ \varphi(1)<0\end{cases}$或$\begin{cases}\varphi(0)>0,\\ \varphi(1)=0,\\ 0<\dfrac{2+3k}{2}<1,\end{cases}$　即$\begin{cases}2k+1>0,\\ -k<0\end{cases}$或$\begin{cases}2k+1>0,\\ -k=0,\\ 0<2+3k\leqslant 2,\end{cases}$　解得$k>0$.

故k的取值范围是$(0,+\infty)$.

例 7　已知$f(x)=x^2+(m+1)x+\lg|m+2|$ $(m\neq -2, m\in\mathbf{R})$.

(1) 若$f(x)$能表示成一个奇函数$g(x)$和一个偶函数$h(x)$的和，求$g(x)$和$h(x)$的解析表达式；

(2) 若$f(x)$和$g(x)$在区间$[\lg|m+2|,(m+1)^2]$上都是减函数，求m的取值范围；

(3) 在(2)的条件下，比较$f(1)$和$\dfrac{1}{6}$的大小.

解题策略：第(1)问，可从方程的观点解出$g(x)$和$h(x)$；第(2)问，由$f(x)$和$g(x)$的单调性可得到关于m的不等式组解之；第(3)问，可借助函数的单调性进行灵活转化.

解：(1) 由题意，得$f(x)=g(x)+h(x)$，　①

故$f(-x)=g(-x)+h(-x)=-g(x)+h(x)$.　②

由①和②，得$g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=(m+1)x$.

$h(x)=f(x)-g(x)=x^2+\lg|m+2|$.

(2) 由$g(x)=(m+1)x$为减函数得$m+1<0$，即$m<-1$.　③

又由$f(x)$在$[\lg|m+2|,(m+1)^2]$上为减函数，得$(m+1)^2\leqslant -\dfrac{m+1}{2}$.

故$-\dfrac{3}{2}\leqslant m\leqslant -1$.　④

由③和④，得$-\dfrac{3}{2}\leqslant m<-1$，此时$\lg|m+2|<(m+1)^2$.

故m的取值范围是$\left[-\dfrac{3}{2},-1\right)$.

(3) $f(1)=m+2+\lg|m+2|$.

易证$\varphi(m)=m+2+\lg|m+2|$在$\left[-\dfrac{3}{2},-1\right)$上为增函数，

故$f(1)=\varphi(m)\geqslant\varphi\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\lg\dfrac{1}{2}$.

又$\dfrac{1}{2}+\lg\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}-\lg\dfrac{1}{2}>0$，故$f(1)>\dfrac{1}{6}$.

例 8　设a为实数，函数$f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$的最大值为$g(a)$.

(1) 设$t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，求t的取值范围，并把$f(x)$表示为t的函数$m(t)$；

(2) 求$g(a)$；

(3) 试求满足$g(a)=g\left(\dfrac{1}{a}\right)$的所有实数.

解题策略：本题是一道递进式的综合题，主要考查函数、方程等基础知识，考查分类讨论以及函数与方程的思想方法和综合运用数学知识分析问题、解决问题的能力，难度上循序渐进，第(1)问考查变量代换的技巧，难点在新变量范围的确定，可以有不同的方法求解，第(2)问是含参数函数在区间上最大值的求法．分类讨论并结合函数单调性是解答的关键．第(3)问实质是解方程，由于$g(a)$是分段的，对于方程$g(a)=g\left(\frac{1}{a}\right)$解的讨论更要分类全面、环环相扣、紧紧深入、精彩纷呈．正如罗素所言："数学不仅拥有真理，而且还拥有至高的美——一种冷峻而严肃的美，正像雕塑所具有的美一样……"本题的解决不仅能显示解题者的数学功力，也展现了"一种冷峻而严肃的美"．

解：(1) **解法一**(代数法)：令$t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，要使t有意义，必须$\begin{cases}1+x\geqslant 0,\\1-x\geqslant 0,\end{cases}$即$-1\leqslant x\leqslant 1$．

$\because$ $t^2=2+2\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$，$t\geqslant 0$，(＊)　$\therefore$ t的取值范围是$[\sqrt{2},2]$．

由(＊)式得$\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}t^2-1$，故$m(t)=a\left(\frac{1}{2}t^2-1\right)+t=\frac{1}{2}at^2+t-a$，$t\in[\sqrt{2},2]$．

解法二(三角换元法)：令$x=\sin 2\theta$，$\theta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$．

$t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{1+\sin 2\theta}+\sqrt{1-\sin 2\theta}=|\sin\theta+\cos\theta|+|\sin\theta-\cos\theta|=\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta+\cos\theta=2\cos\theta$，$a\sqrt{1-x^2}=a\sqrt{1-\sin^2 2\theta}=a\cos 2\theta$，

由于$\theta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，所以$\cos\theta\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，即$t\in[\sqrt{2},2]$，$f(x)=a\cos 2\theta+t$．

又$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times\frac{t^2}{4}-1=\frac{t^2}{2}-1$，

故$m(t)=a\left(\frac{1}{2}t^2-1\right)+t=\frac{1}{2}at^2+t-a$，$t\in[\sqrt{2},2]$．

(2) 由题意知$g(a)$即为函数$m(t)=\frac{1}{2}at^2+t-a$，$t\in[\sqrt{2},2]$的最大值．

注意到直线$t=-\frac{1}{a}$是抛物线$m(t)=\frac{1}{2}at^2+t-a$的对称轴，故分以下几种情况讨论．

① 当$a>0$时，函数$y=m(t)$，$t\in[\sqrt{2},2]$的图像是开口向上的一段抛物线，

$\because t=-\frac{1}{a}<0$，知$m(t)$在$[\sqrt{2},2]$上单调递增，$\therefore$ $g(a)=m(2)=a+2$．

② 当$a=0$时，$\because$ $m(t)=t$，$t\in[\sqrt{2},2]$，$\therefore$ $g(a)=2$．

③ 当$a<0$时，函数$y=m(t)$，$t\in[\sqrt{2},2]$的图像是开口向下的一段抛物线．

若$t=-\frac{1}{a}\in[0,\sqrt{2}]$，即$a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$g(a)=m(\sqrt{2})=\sqrt{2}$；

若$t=-\frac{1}{a}\in(\sqrt{2},2]$，即$-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant-\frac{1}{2}$，则$g(a)=m\left(-\frac{1}{a}\right)=-a-\frac{1}{2a}$；

若$t=-\frac{1}{a}\in(2,+\infty)$，即$-\frac{1}{2}<a<0$，则$g(a)=m(2)=a+2$．